ЧЕЧЕЙБАЕВ Б.
ЧОТБАЕВ К.
МАМБЕТАЛИЕВ Р.Б.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ MATHCAD

Различные процессы, происходящие в природе, например, распространение сейсмических, электромагнитных и звуковых волн, колебания механических и электрических систем и др. описываются уравнениями гиперболического типа, т.е. волновым уравнением.

Явления диффузии в газах, нестационарные процессы распространения тепла в среде, фильтрационные течения жидкости и газа и др. изучаются на основе уравнений параболического типа, при известных начальных и граничных условиях.

При исследовании стационарных процессов различной физической природы (процессы колебания, теплопроводности, диффузии и т.д.) в двух и трехмерном случаях пространственных переменных обычно приходят к уравнениям эллиптического типа. Наиболее распространенным уравнением этого типа является уравнения Лапласа, Пуассона, Гельмгольца, бигармоническое уравнение и др. Таким образом, физические процессы в таких областях науки и техники, как механика, аэрогазодинамика, теплофизика, электричество, магнетизм, оптика и др. описываются с помощью уравнений с частными производными.

Изучению дисциплины уравнения математической физики на физических и математических факультетах университетов, а также на инженерных специальностях технических вузов уделяется также соответствующее внимание. Традиционно занятия по уравнениям математической физики проводятся в лекционной и практической формах, где изучаются основные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка и методы их интегрирования, способы постановки начальных и граничных условий краевых задач.

В настоящее время, в связи с развитием и широким распространением вычислительной техники во всех сферах деятельности человека, возникает необходимость использования компьютеров в учебном процессе ВУЗов.

В этой работе мы рассмотрим некоторые вопросы применения на практических занятиях пакета прикладных программ для персональных компьютеров, где решаются задачи, приводящиеся к уравнениям эллиптического типа. MATHCAD - одна из самых мощных компьютерных систем, предназначенная для решения математических, инженерных и экономических задач.

Входной язык системы MATHCAD позволяет использовать не только встроенные команды, но и разрабатывать собственные визуальные приложения. Известно, что основным методом решения простейших задач классической математической физики является метод суперпозиции. Этот метод позволяет на базе частных линейно независимых решений получать решения исходной линейной задачи.

Частные решения находятся применением метода разделения переменных (при нулевых граничных условиях). К сожалению, этот метод оказывается применим лишь для областей, обладающих определенной симметрией (например, шара).

Рассмотрим задачу Дирихле в кольце для уравнения Лапласа. Пусть требуется решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа Ам = 0 в области, заключенной между двумя концентрическими окружностями, I, *и* L_2, с радиусами R_x *и* R_2 с центром в

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{y}). \sim \circ > {}^{R}i < x^2 + y^2 < R^2 \\ u L_1 = f_1 > \quad U_{L_2} = fl \end{cases}$$

начале координат:

Введя далее полярные координаты $(p, <p)$, задачу Дирихле можно записать так:

$$p^2 u_{pp} + p u_p + u_w = 0, R_x < p < R_2, 0 < q > < 2n,$$

$$-u(R_x, (p) = f_x(<p), \quad 0 < < p < 2mг \qquad (1)$$

$$u(R_x, <p) = f_x(<p),$$

При этом граничные функции $f_x(q>)$ и $f_2\{cp)$ будем считать периодическими функциями с периодом *2п* . Для решения задачи применим метод Фурье. Будем искать решения в виде

$$u(p,<p) = R(p)Z(<p).$$

Подставив выражение $u(p, <p) = R\{p) Z((p)$ в уравнение (1),
получим

$Zp^2R''+ZpR + R3 = 0$. Разделим теперь обе части этого уравнения на i?3, результате чего получим

R 3

Тогда относительно неизвестных функций $R(p)$ и 3(<p) получаются следующие линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка.

$$p^2R''+pR'-AR = 0, \qquad (3)$$

$$3''+Я3 = 0. \qquad (4)$$

Функция 3(<p) является периодической функцией с периодом *2тг*, т.е. 3(p) = 3(<p + *2л)*.

Из уравнения (4) следует, что решение имеет следующий вид

= *A*

cos(VA$>) + *B* sin где A и B произвольные постоянные.

В силу периодичности функции 3(<p), должно быть выполнено равенство $X = n^2$, где *п* > 0 - целое число.

Теперь из уравнения (3) получаем

$$p^2R''+pR'-n^2R = 0 \qquad (5)$$

Если $n \ne 0$, то решение этого уравнения будем искать в виде $R(p) = p''$.

Подставляя это выражение в уравнение (5) и сокращая на p^p, находим $p^2 = n^2$, или $p = \pm n$

При п=0 уравнение (5) имеет два решения: 1 и In p.

Итак, мы получили бесконечный набор функций (частных решений):

1, $\ln p$, $p'' cos(nq>)$, $p'' sin(n<p)$, p^{-n} cos(rc<p), $p^{-n} sin(n(p)$ (п=1,2,...), удовлетворяющих исходному уравнению с частными производными.

Поскольку сумма этих решений также является решением, то общее решение Лапласа в нашем случае будет иметь вид

°0 r-

"(АР) = «о +bo 1n Р + Zka«^" +bnP' ")cos(n<p) + (cnp" +dnp-
")sm(n<pj\ (6)

n=l

Теперь необходимо найти коэффициенты в сумме (6) так, чтобы были удовлетворены граничные условия

u(R, <p) = /,(<p), u(R2 ,<p) = f2 (<p).

Полагая в формуле (6) $p = R_x$ и $p = R_2$; получим

$u(R_x, <p) = J$^[$a_nR_x'' + b_nR_l$-'')cos(n<p) + ($c_nR_j^n + d_xR'_x$'')sm{n(p) +a, $+b_0$ \n$R_x$,

u(Я $_2$,<p) = ^[(aX + b^'') cos(n<p) + (cX2 + d ^2^n) sm(n<p) + $a_0 + b_0 lnR_2$.
n-l

Учитывая выражения для коэффициентов Фурье тригонометрического ряда, приходим к следующим системам уравнений:

1 1п
a_0 + b_0\n$R_x$ = — \$f_x(s)ds$,
In ∂ (7 а)
In
$a_0 + b_0$ \n$R_2$ = — \$f_2(s)ds$ In I

(решается относительно a_Q и b_0)

2к
1
$a_nR_x'' + b_nR$;'' = ~ \Ms)cos(ns)ds,

(7 б)

1 2к

a_nK + K R2'' =- \$f_2(s)cos(ns)ds$

(решаетсяотносительно a_n и b_n)

ч 2к

(7 в)

$c_nR''_2 + d_nR_2^n$ = - \$f_2(s)sm(ns)ds$

$c_nR'_2$> $+ d_nR_2''$ =- l$f_2(s)sm(ns)ds$
n ь

(решается относительно c_n и d_n).

Тем самым, из этих систем уравнений определяются все неизвестные коэффициенты a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n. Теперь задача (1) полностью решена. Решение дается выражением (6), коэффициенты в котором определяются согласно формулам (7).

Пример.

Предположим, что потенциал на внутренней окружности кольца равен нулю, а потенциал на внешней - равен *cos ср.* Найти потенциал в кольце. Имеем задачу

Au = 0,1 < p < 2, 0 < (p < 2л, u(\,<p) = 0, u(2,<p)

= cos<p для определения потенциала в кольце.

В данном случае проще попытаться подобрать такие частные решения, линейная комбинация которых удовлетворяет граничным условиям. Здесь такую роль играет линейная комбинация $u(p,<p) = a_xp\cos(p + b_xp$~^{x} coscp.

Из граничных условий получаем систему уравнений $a_x + Ъ_x$ = О,
2а.-Д = 1, 1
2

из которой находим, что $a_x = 2/3$, $Ь_x = -2/3$. Таким образом, решение есть"(A^) = |(P--^{1}-) cos <p. 3 p

Итак, в процессе решения задачи Дирихле для потенциала в кольце, студенты подкрепляют знания, приобретенные во время лекционных занятий, запоминают вид записи уравнения Лапласа в декартовых и полярных системах координат.

Формулируют задачу Дирихле, при этом понимают необходимости задания значения искомой функции на границе рассматриваемой области. Применяя метод разделения переменных Фурье относительно неизвестных функций, они получают линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка.

На основе принципа суперпозиции, присущего для уравнений математической физики, находят общее решение уравнения Лапласа в виде бесконечного тригонометрического ряда. Постоянные интегрирования и коэффициенты ряда находятся из заданных граничных условий. Аналогичным образом, решая и другие задачи в аудитории под непосредственным руководством и вниманием преподавателя, а также самостоятельно выполняя внеаудиторные домашние задания, студенты повышают свой уровень знаний и приобретают навыки решения более сложных задач

Перейдем теперь к вопросам применения компьютерной техники и новых информационных технологий в учебном процессе.

Рассмотрим разностную схему для эллиптического уравнения в прямоугольной области $Q(R - b < x < R + b; -a < y < a)$ с граничными условиями Дирихле на границе Г.

$$5\partial Ч> \quad 5^{2v}F \quad \partial^2 Ч>$$
$$Au = —г-"+ ——————— = -2,$$
$$\partial x \quad \partial y \quad x\,\partial x \qquad (8)$$

$$п x,y)\backslash_{(x}\hat{}_{г}=0$$

Построим сетку , для чего проведем в области Q прямые, параллельные осям $У \sim Уj$ и $x = x_{(}$, где $x, = R - b + ihx$, $hx = 2b/n$, $i = 0,1,...,n$; $yj = -a + jhy$, $hy = 2a/k$, **7** $= 0,1,...,*$.

Для построения разностного уравнения заменим частные производные и граничные условия следующими разностными соотношениями:

$$\partial^2 Ч>(x_n y,) \quad \%_{+lJ} - 2\%_{J+}\%_{\_hj}$$

$$\partial x^2 \qquad И \qquad (9)$$

$$x^2$$

$$\partial y \qquad hy$$

$$*/.о=\hat{}=0, \quad i = \mathbf{0},\backslash,...,Nx,$$

$$4Y,=4V,=0, \quad j = \mathbf{0,1,..}, Ny. \qquad (10)$$

С помощью соотношений (9),(10), преобразуем эллиптическую краевую задачу к следующей системе разностных уравнений:

$$\%_j - \hat{}(B\hat{} + C_{\hat{}j} + DQY\hat{} + \%_{J+l}) + 2),$$

$$2 \quad 2 \qquad 1 \;\{\; 5 \quad =\_1\_ \quad J>\_{D=} \; 1\,hx^2 \quad 2hxx_t\,'\,' \quad hx^2$$

$$hx \quad hy \;\; {}_2 \qquad {}_J \; 2hxx_t\,' \quad hy^2\,'\,*=l,2,...,JVx\text{-}l;\;\; ;=l,2,...,JVy\text{-}l,$$

$$\%.о=\hat{}=0, \quad i = \mathbf{0,l},..,Ny, \; \%_{J=}V_{NxJ}=\mathbf{0}, \; j = \mathbf{0},\backslash,...,Ny.$$

Эту систему можно решить итерационным методом Зейделя:

Д:=18 a:=3 6:= 6 JVSc := 16 $Ny:=8$ $hy\sim —$ $hx =—$
Ny Nx

i := O.jVx j := O.JVy x, := $R - b + ihx$ y_x := -a + y/гу

i//,$_0$:=0 $y/„ Ny\hat{}Q$ $WoJ'-=°$ $y/Nx,j:=0$

$:=— - \overset{2}{+} ■ {}^2Л$
hy^2 hx^2

/ :=l.JVx]C,. :=
/zx^2 2/rxx; /7X^2 2/?xx,

Функция ellip, предназначенная для решения уравнения (8) сеточным методом, имеет следующий вид

p*-100 к<г-
e/fip (if/, Nx, Ny, e) := 0

while p > s \forie\..Nx-\
for j e \HNy-\

y<- -A ■ [Bi Щ.u+C, <рц, +)+2]

V
R

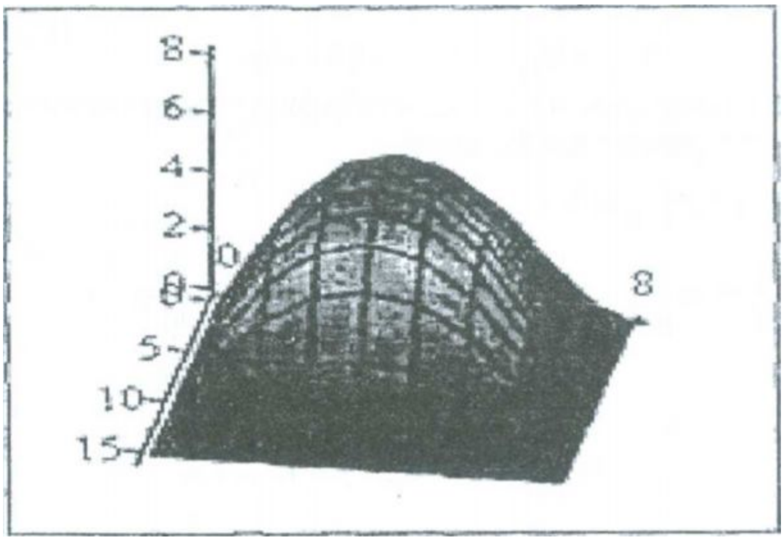

График решения уравнения (8)

p <— тах(R)

Для численного решения задач математической физики с использованием универсальной системы математических расчетов Mathcad необходимо: аппроксимировать уравнения в частных производных второго порядка включительно центральными разностными отношениями.

Уравнения математической физики гиперболического, эллиптического и параболического типов заменяются соответствующими разностными уравнениями, а граничные и начальные условия также с помощью разностных отношений приводятся к соответствующим разностным условиям. Затем, составляя программу, получают результаты расчета в виде графиков и поверхностей. Отметим, что применение компьютерных технологий и пакетов прикладных программ позволяют решить сложные задачи в учебном процессе, при этом результаты вычислений отображаются на мониторе. Используя математические пакеты, можно также произвести на компьютерах аналитические, символьные вычисления. Применение Mathcad в учебном процессе в данном случае укрепляет межпредметную связь, а именно между физико-математическими дисциплинами и компьютерными технологиями.

Студенты старших курсов ВУЗов, ознакомляясь с возможностями пакетов прикладных программ, при этом развиваются у студентов навыки практической работы на персональных компьютерах и приобретают глубокие знания в области уравнений математической физики, дифференциальных уравнений и др. Внедрение новых информационных технологий в учебном процессе в настоящее время имеет важное существенное значение при подготовке высококвалифицированных специалистов.

Системы аналитических вычислений Matchad, Matlab, Mapple, Reduce, Пролог, Фокал и другие могут быть успешно использованы при подготовке дипломных проектов выпускниками ВУЗов. Составляя математических моделей различных физических химических, биологических и других процессов происходящих в природе можно провести вычислительные эксперименты на компьютерах, результаты вычислений которых полностью являются адекватными и согласующимися с экспериментальными данными.

Литература

1. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Mathcad 12. - М.: НТ Пресс, 2005. - 345 с.
2. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. - М.: Физматлит, 2003. - 688 с.
3. Дьяконов В. Mathcad 2000: Учебный курс. - СПб.: Питер, 2001. - 608 с.
4. Кирьянов Д.В. Самоучитель Mathcad 12. - СПб.: БХВ-Петербург, 2004. - 576 с.
5. Семененко М.Г. Математическое моделирование в Mathcad. - М.: Альтекс-А, 2003. - 208 с.
6. ТихоновА.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966.-724 с.
7. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. - М.: НТ Пресс, 2006. - 496 с: ил. -(Самоучитель).