УДК 517.928

АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО ПОИСКА ПОГРАНСЛОЙНЫХ ЛИНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

К.С. Алыбаев, К.Б. Тампагаров

Построен алгоритм для поиска линии, разделяющей области различного асимптотического поведения решений начальной задачи для дифференциального уравнения на комплексной плоскости.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение; аналитическая функция; сингулярное возмущение; пограничный слой; асимптотика; алгоритм.

ALGORITHM TO SEARCH BOUNDARY LAYER LINES OF SINGULARLY PERTURBED ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ANALYTICAL FUNCTIONS

K.S. Alybaev, K.B. Tampagarov

Algorithm is built to search a line separating domains of different asymptotic behavior of solutions of a boundary value problem for a differential equation on the complex plane.

Keywords: ordinary differential equation; analytical function; singular perturbation; boundary layer; asymptotics; algorithm.

Введение. В работах [1, 2] показано, что дифференциальные уравнения с частными производными с аналитическими функциями имеют специфику, отличную от уравнений с бесконечно дифференцируемыми функциями. В [4] на основе метода [3], получены условия для возникновения на плоскости изменения аргумента линии в форме петли, названной авторами «простирающимся пограничным слоем». В работе [5] показано, что такие линии естественно возникают для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями, что можно рассматривать как специфическое свойство таких уравнений. Также предложено называть их более кратко – погранслойными линиями.

1. Результаты, используемые в настоящей статье

Обозначим $\boldsymbol{R} = (-\infty,\infty)$, $\boldsymbol{R}_+ = [0,\infty)$; $\boldsymbol{C}$ – комплексная плоскость,

$\boldsymbol{C}_1 = \{\theta \in C, |\theta| = 1\}$;

$(\,)^*$ – комплексное сопряжение;

$Q(G)$ – пространство аналитических функций в области $G \subset C$;

ε – малый положительный вещественный параметр.

Рассмотрим уравнение с параметром ε при производной

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)z(t,\varepsilon), z \in \Omega \subset C, \tag{1}$$

с начальным условием

$$z(t_0,\varepsilon) = z_0, \tag{2}$$

где Ω – односвязная область; t_0 – ее внутренняя точка; $z_0 \in C,\ \ a(t),\ f(t) \in Q(\Omega)$.

Если правая часть фактически не зависит от z, то решение задачи (1)-(2) записывается в явном виде. Поэтому на заданную функцию $a(t)$ мы только наложим условие: эта функция существует, то есть $a(t)$ не равна тождественно нулю.

Будем обозначать решение задачи (1)–(2) через $Z(t,\varepsilon)$ (для тех значений t, для которых оно существует и однозначно определено).

Определение 1. Если $|Z(t_1,\varepsilon)|$ ограничено при $\varepsilon \to 0$, то будем называть точку t_1 регулярной для задачи (1)–(2), в противном случае – нерегулярной.

Определение 2. Точку, в любой окрестности которой существуют как регулярные, так и нерегулярные точки, будем называть погранслойной точкой.

Определение 3. Любое множество регулярных (погранслойных) точек будем называть регулярным (погранслойным) множеством.

Определение 4. Погранслойное множество, являющееся непрерывным, локально взаимно-однозначным образом отрезка, будем называть погран-слойной линией.

Определение 5. Для погранслойной точки $t_1 \in C$ число $\theta \in C_1$ называется погранслойным направлением, если для любого малого $\sigma > 0$ существует такое малое $\delta > 0$, что множество $\{t \in C \mid |Arg(t-t_1) - Arg\theta| < \sigma, \quad |t-t_1| = \delta\}$ содержит погранслойные точки.

Примечание. В погранслойных точках $lim\ \{Z(t_1,\varepsilon) \mid \varepsilon \to 0\}$, вообще говоря, не существует. Это видно из следующего простейшего примера.

Пример 1. Уравнение $\varepsilon z'(t,\varepsilon) = z(t,\varepsilon)$, с начальным условием $z(0,\varepsilon) = 1$, имеет решение $Z(t,\varepsilon) = exp(t/\varepsilon)$. Здесь $\{t \in C \mid Ret < 0\}$ – регулярные точки функции $Z(t,\varepsilon); \{t \in C \mid Ret > 0\}$ – сингулярные точки функции $Z(t,\varepsilon)$.

При $Ret = 0$ – погранслойные точки, образующие погранслойную линию, заменяем $t = is, s \in \boldsymbol{R}_+$, $Z(t,\varepsilon) = exp(is/\varepsilon)$ – быстрые колебания; можно также заменить $t = -is,\ s \in \boldsymbol{R}_+$. Таким образом, для $t = 0$ имеются два погранслойных направления: $\theta = i$ и $\theta = -i$.

Следующий пример показывает, что условие линейности является существенным.

Пример 2. Уравнение $\varepsilon z'(t,\varepsilon) = z^2(t,\varepsilon)$, с начальным условием $z(0,\varepsilon) = 1$, имеет решение $Z(t,\varepsilon) = \varepsilon/(\varepsilon - t)$. При $\varepsilon \to 0$ это решение не стремится к нулю только в окрестности точки $t = 0$. Таким образом, погранслойные линии отсутствуют.

Заменим $t_\omega(s) = t_0 + \omega s$, $\omega \in \boldsymbol{C}_1$, $s \in \boldsymbol{R}_+$. Подставляя в (1), получаем уравнение:

$$\varepsilon\, dz(t_\omega(s),\varepsilon)/(\omega\, ds) = a(t_\omega(s))z(t_\omega(s),\varepsilon). \tag{3}$$

Обозначая $W_\omega(s,\varepsilon) = z(t_\omega(s),\varepsilon)$, $A_\omega(s) = a(t_\omega(s))$, получаем уравнение

$$\varepsilon W_\omega'(s,\varepsilon) = \omega A_\omega(s)\, W(s,\varepsilon) \tag{4}$$

с начальным условием

$$W(0,\varepsilon) = z_0. \tag{5}$$

В силу условия (3), существует такое целое неотрицательное n, что

$$a(t) = (t - t_0)^n a_n(t),\ a_n(t) \in Q\ (\Omega),\ a_n(t_0) \neq 0. \tag{6}$$

При этом отметим, что n, как функция от t_0, может быть больше нуля только на множестве точек, не имеющих точку прикосновения, в силу свойств аналитических функций.

Подставляя (7), получаем:

$$\omega A_\omega(s) = \omega\, a(t_0 + \omega s) = \omega(\omega s)^n a_n(t_0 + \omega s) = \omega^{n+1} s^n a_n(t_0 + \omega s).$$

Уравнение (7) принимает следующий вид:

$$\varepsilon W_\omega'(s,\varepsilon) = \omega^{n+1} a_n(t_0 + \omega s)\, s^n\, W(s,\varepsilon),\ s \in \boldsymbol{R}_+. \tag{7}$$

Выбирая $\omega = \omega_0$ так, чтобы было $Re\ \omega_0^{\ n+1} a_n(t_0) = 0$, получаем погранслойное направление. Это можно сделать самое меньшее двумя способами.

В силу непрерывности, при ω, близких к ω_0, будет и $Re\ \omega^{n+1} a_n(t_0) > 0$, и $Re\ \omega^{n+1} a_n(t_0) < 0$.

Отсюда, в свою очередь, следует, что при $s < \delta$, где δ – достаточно мало, будет и $Re\ \omega^{n+1} a_n(t_0 + \omega s) > 0$, и $Re\ \omega^{n+1} a_n(t_0 + \omega s) < 0$.

Из общей теории сингулярных возмущений следует, что при таких ω решение уравнения (10) будет либо стремиться к ∞ при $\varepsilon \to 0$, либо стремиться к решению вырожденного уравнения с возможным всплеском в начале, но такие всплески (при $n>0$) будут только в отдельных точках.

Отметим также, что при движении от любой регулярной точки начальное условие (8) заменяется на условие вида: $|W(0,\varepsilon)|$ ограничено при $\varepsilon \to 0$. Но общие асимптотические оценки сохраняются.

Таким образом, в каждой погранслойной точке имеется не менее двух погранслойных направлений. Движение по соответствующему направлению является решением некоторого дифференциального уравнения на плоскости $\boldsymbol{C}$ и дает погранслойную линию.

Такое уравнение, если его можно построить, будем называть погранслойным уравнением, соответствующим начальной задаче (1)–(2).

Из изложенного выше видно, что вдоль погранслойной линии решение уравнения имеет быстрые колебания. Для упрощения исследования в [5] примена замена, аналогичная переходу от «фазовых координат» к «энергии».

Рассмотрим уравнение (1) в предположении, что $f(t) \equiv 0$. Введем функцию

$$U(s,\varepsilon) = z(T(s),\varepsilon)(z(T(s),\varepsilon))^*,\ s \in \boldsymbol{R}_+,\ T(0) = 0$$

– квадрат модуля функции $z(t,\varepsilon)$ вдоль некоторой траектории.

Наша цель – так подобрать функцию $T(s)$, чтобы было $U'(s,\varepsilon) \equiv 0$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon\, U'(s,\varepsilon) &= \varepsilon(z(T(s),\varepsilon)(z(T(s),\varepsilon))^*)' = \\ &= \varepsilon(z'(T(s),\varepsilon)\ (z(T(s),\varepsilon))^* + z(T(s),\varepsilon)\ (z'(T(s),\varepsilon))^*) = \\ &= A(T(s))\ z(T(s),\varepsilon)T'(s)\ (z(T(s),\varepsilon))^* + z(T(s),\varepsilon)(A(T(s))\ z((T(s),\varepsilon)T'(s))^* = \\ &= z(T(s),\varepsilon)\ (z(T(s),\varepsilon))^*(\ A(T(s))\ T'(s) + (A(T(s))\ T'(s))^*). \end{aligned} \tag{8}$$

Пример 3. Для уравнения Примера 1 положим $T(s) = is$:

$$\varepsilon U'(s,\varepsilon) = z(s,\ \varepsilon)z^*(s,\ \varepsilon)\ (i + (i)^*) = z(s,\ \varepsilon)z^*(s,\ \varepsilon)\ (i - i) = 0.$$

В общем виде, приравнивая правую часть (9) нулю, получим:

$$A(T(s))\ T'(s) + (A(T(s))\ T'(s))^* = 0, \tag{9}$$

$$Re(A(T(s))\ T'(s)) = 0.$$

Положим $A(T(s))T'(s) = \pm i$. Отсюда получаем:

$$A(T)dT = \pm i ds \tag{10}$$

– уравнение погранслойной линии в дифференциалах;

$$\int_0^T A(\tau)d\tau = \pm is \tag{11}$$

– интегральное уравнение погранслойной линии.

Пример 4. $\varepsilon z'(t,\varepsilon) = (1+2\ t)\ z(t,\varepsilon),\ z(0,\varepsilon)=1$. Уравнение (12) принимает вид:

$$\int_0^T (1+2\tau)d\tau = \pm is; T + T^2 = \pm is\ (T(0) = 0);$$

$$T_{12}(s) = \sqrt{1 \pm 4is} - 1/2.$$

Таким образом, эта погранслойная линия (ее две ветви, направленные от начала координат в первый квадрант и в четвертый квадрант) разделяют плоскость на сингулярную (вдоль оси OX) и регулярную области.

2. Построение алгоритма

Уравнение погранслойной линии в проекции на вещественную ось имеет вид

$$Re\ A(T)dT = 0. \tag{12}$$

Представим заданный коэффициент в виде $A(t) = U(t) + iV(t)$.

Выберем шаг $h>0$.

Для вектора длины h – сдвига ΔT из (13) получаем приближенное уравнение:

$$Re\,(A(T)\Delta T) = 0;\ Re\,((U(T)+iV(T))\Delta T) = 0.$$

Отсюда $\Delta T \parallel iU(T)+V(T);\ \Delta T(T) = (V(T)+iU(T))/\sqrt{(V^2(T)+U^2(T))}h.$

Расчетные формулы $T_0 := 0;\quad T_k := T_{k-1}+\Delta T(T_{k-1}), k = 1,2,3,\ldots$

Была написана программа на языке Pascal. Подставлены данные из Примера 4. Для контроля в ней было заложено также вычисление выражения $F(T)=T+T^2$ должно быть $(Re\,F(T) \approx 0)$.

Расчеты показали корректность программы.

Литература

1. *Pankov P.S.* Convergence of Finite Difference Method for First-Order Partial Differential Equations with Analytical Initial Conditions / P.S. Pankov, T.M. Imanaliev // Analytical and Approximate Methods: Intern. Conf. at the KRSU, Bishkek, Kyrgyzstan. Shaker Verlag, Aachen, Germany, 2003. P. 185–193.
2. *Панков П.С.* Экспериментальное исследование метода сеток для аналитически нелинейных уравнений в частных производных / П.С. Панков, Х.С. Сабирова // Тр. Средневолжского матем. общ-ва. 2004. Том 6. № 1. С. 289–292.
3. *Алыбаев К.С.* Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости / К.С. Алыбаев // Вестник КГНУ. 2001. Сер. 3. Вып. 6. Бишкек. С. 190–200.
4. *Алыбаев К.С.* Явление простирающегося пограничного слоя для сингулярно возмущенных уравнений при потере устойчивости / К.С. Алыбаев, М.Р. Нарбаев // Вестник ЖАГУ. 2000. № 1. С. 122–126.
5. *Алыбаев К.С.* Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями / П.С. Панков, К.Б. Тампагаров, К.С. Алыбаев, М.Р. Нарбаев // Вестник ОшГУ. 2013. № 1 (спец. вып.). С. 227–231.