

УДК 539.3; 539.115; 539.374

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПРЯМОГО ПРЕССОВАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСЫ В РЕЖИМАХ СВЕРХПЛАСТИЧНОСТИ

Рудаев Яков Исаакович, д.ф.-м.н., профессор, Сулайманова Света Мукашовна, д.ф.-м.н., доцент КРСУ, Кыргызстан, 720000, г. Бишкек, Киевская, 44, e-mail: sulai@bk.ru

Рассматривается аналитическое решение технологической задачи прессования полосы в изотермических условиях в диапазоне температур сверхпластичности. В зависимости от найденного вида разрешающей функции определены поля скоростей перемещений и деформаций, компоненты напряжений и вычислено усилие прессования. Установлены энергосиловые и кинематические характеристики, отвечающие изготовлению полуфабриката с качественными структурными показателями.

Ключевые слова: сверхпластичность, прессование, задача оптимизации, объемное формоизменение.

BOUNDARY PROBLEM OF DIRECT PRESSING RECTANGULAR STRIPE IN CONDITIONS TO SUPERPLASTICITY

Rudaev Yakov Isaakovich, doctor physic-mathematical science, professor, Sulaimanova Sveta Mukashovna, doctor physic-mathematical science, associate professor KRCU, Kyrgyzstan, 720000, Bishkek, Kyiv 44, e-mail: sulai@bk.ru

The analytical decision of a technological problem of pressure of a strip in isothermal conditions in a range of temperatures superplasticity is considered. Depending on the found kind of resolving function fields of strain rates and deformations are certain, components of the stresses and the power pressure is calculated. The energy-power and the kinematic characteristics adequating to manufacturing of a semifinished product with qualitative structural indicators are established.

Keywords: superplastic, pressure, optimization problem, volume form change.

1. Постановка задачи

Современный уровень теоретических и экспериментальных исследований позволяет рассматривать сверхпластичность как особое состояние поликристаллического материала, пластически деформируемого при пониженном напряжении с сохранением в продеформированном металле ультрамелкой исходной структуры (структурная сверхпластичность) или с её формированием в процессе нагрева и деформации (динамическая сверхпластичность).

Задача математического моделирования технологических операций горячего объемного формоизменения связана, а первую очередь, с установлением полей температур, напряжений и скоростей деформаций. При этом немаловажным считается обоснование и создание условий, обеспечивающих возможность формообразования при сравнительно невысоких деформирующих условиях. Такие условия реализуются при использовании эффекта сверхпластичности, особенности проявления которого для промышленных алюминиевых сплавов изложены в [5, 6]. Здесь показано, что путем оптимального сочетания силовых, кинематических и термических параметров можно прогнозировать изготовление полуфабрикатов с качественными структурными показателями.

В связи со сказанным рассмотрим задачу установления энергосиловых и кинематических характеристик процесса прямого горячего прессования алюминиевой полосы прямоугольного сечения в изотермических условиях при температуре, принадлежащей диапазону реализации эффекта сверхпластичности.

Прессованием полосы называется технологический процесс, в котором заготовка в форме призмы выдавливается из контейнера через матрицу с уменьшением поперечных размеров заготовки. Отношение площади поперечного сечения заготовки A_0 к площади поперечного сечения изделия на выходе из матрицы A_k называется вытяжкой и определяется отношением

$$\lambda = \frac{A_0}{A_k}. \quad (1.1)$$

В основу постановки задачи положено исследование течения металла в клиновидном сходящемся канале в предположении радиальности указанного течения [4, 7].

Примем, как в [4, 7], цилиндрическую систему координат $\rho\alpha z$, причем начало координат разместим в вершине клина, а ось направим перпендикулярно плоскости течения металла (рис. 1).

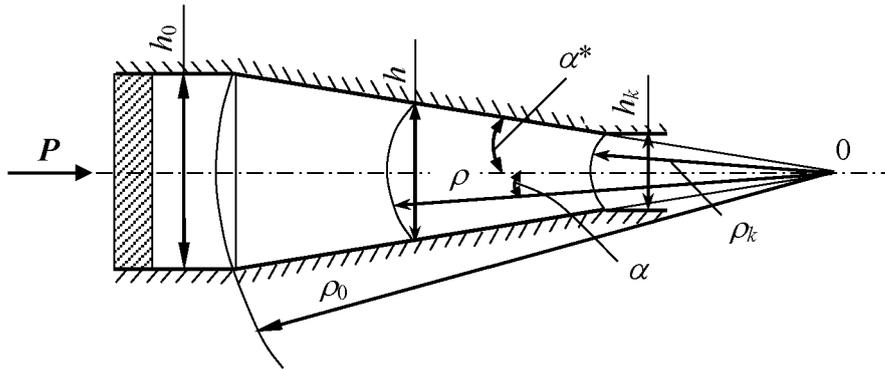


Рис. 1. Схема процесса прессования

Математическая формулировка задачи включает:

– уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\alpha}{\rho} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{\rho\alpha}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{2\tau_{\rho\alpha}}{\rho} = 0, \quad (1.2)$$

где компоненты тензора напряжений σ_{ij} предполагаются поделенными на напряжение σ^* , являющееся внутренним параметром состояния и зависящим от температуры [6];

– геометрические соотношения

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho}; \quad \varepsilon_\alpha = \frac{v_\rho}{\rho}; \quad \dot{\gamma}_{\rho\alpha} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \alpha}, \quad (1.3)$$

причем составляющие тензора скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ поделены на величину $\dot{\varepsilon}^*$, которая также является внутренним параметром состояния, альтернативным σ^* [6]; скорость радиального перемещения v_ρ также принята безразмерной, отнесенной к скорости $\dot{\varepsilon}^*$ и ширине полосы; понятно, что координаты ρ и z также поделены на ширину полосы, которая принята постоянной;

– условие несжимаемости в скоростях

$$\varepsilon_\rho + \varepsilon_\alpha = 0; \quad (1.4)$$

– определяющие уравнения, принятые в форме соотношений теории упругопластических процессов малой кривизны [3],

$$\sigma_\rho - \sigma_0 = \frac{2\sigma_u}{3\dot{\varepsilon}_u} \varepsilon_\rho; \quad \sigma_\alpha - \sigma_0 = \frac{2\sigma_u}{3\dot{\varepsilon}_u} \varepsilon_\alpha; \quad \tau_{\rho\alpha} = \frac{\sigma_u}{3\dot{\varepsilon}_u} \dot{\gamma}_{\rho\alpha}, \quad (1.5)$$

где σ_0 – среднее напряжение, а интенсивности напряжения σ_u и скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_u$ определяются формулами [6]

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_\rho - \sigma_\alpha)^2 + 4\tau_{\rho\alpha}^2}; \quad \dot{\varepsilon}_u = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4\varepsilon_\rho^2 + \dot{\gamma}_{\rho\alpha}^2}. \quad (1.6)$$

Уравнение состояния принято в форме [5, 6]

$$\sigma_u = 1 + m_0(\dot{\varepsilon}_u - 1)^3 + \beta(\dot{\varepsilon}_u - 1), \quad (1.7)$$

где $m_0 \sim \text{const}$, а величине $\beta = \beta(\xi)$ принадлежит роль управляющего параметра, причем ξ – приведенная температура (при сверхпластичности $\beta < 0$, $\xi \in] 0, 1 [$).

Граничные условия будем формулировать в процессе решения задачи.

2. К определению разрешающей функции

Подстановка зависимостей (1.3) в условие несжимаемости (1.4) приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} = 0. \quad (2.1)$$

Решение уравнения (2.1) имеет вид

$$v_\rho = -\frac{K(\alpha)}{\rho}, \quad (2.2)$$

где $K = K(\alpha)$ – произвольная функция, подлежащая определению.

С учетом (2.2) для компонента скоростей деформаций получаем

$$\varepsilon_\rho = \frac{K(\alpha)}{\rho^2}; \quad \varepsilon_\alpha = -\frac{K(\alpha)}{\rho^2}; \quad \gamma_{\rho\alpha} = -\frac{K'(\alpha)}{\rho^2} \quad (2.3)$$

Подставив (2.3) в выражение для интенсивности скоростей деформации (1.6), будем иметь

$$\varepsilon_u = L^{1/2}(\alpha) \cdot \rho^{-2} \quad (2.4)$$

где обозначено

$$L(\alpha) = \frac{1}{3} (4K^2(\alpha) + K'^2(\alpha)). \quad (2.5)$$

Воспользовавшись (2.4), уравнение состояния (1.7) можно переписать так

$$\frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} = F(\rho, \alpha) = (1 - m_0 - \beta) \rho^2 L^2(\alpha) + 3m_0 + \beta - 3m_0 L^2(\alpha) \rho^{-2} + m_0 L(\alpha) \rho^{-4}. \quad (2.6)$$

Определяющие соотношения (1.5), принимая во внимание (2.6), запишутся следующим образом

$$\sigma_\rho = \sigma_0 + \frac{2}{3} F(\rho, \alpha) \frac{K(\alpha)}{\rho^2}; \quad \sigma_\alpha = \sigma_0 - \frac{2}{3} F(\rho, \alpha) \frac{K(\alpha)}{\rho^2}; \quad \tau_{\rho\alpha} = -\frac{1}{3} F(\rho, \alpha) \frac{K'(\alpha)}{\rho^2} \quad (2.7)$$

Теперь становится очевидным, что поля напряжений, скоростей деформаций и перемещений могут быть определены, если установлено явное выражение функции $K = K(\alpha)$, которую назовем разрешающей. Для нахождения вида указанной функции воспользуемся следующим приемом. Подставим соотношения (2.7) в

дифференциальные уравнения равновесия (1.2). Найденные при этом производные $\frac{\partial \sigma_0}{\partial \rho}, \frac{\partial \sigma_0}{\partial \alpha}$ продифференцируем соответственно по α и ρ и приравняем друг другу. После несложных преобразований получаем, что функция $K = K(\alpha)$ должна удовлетворять уравнению

$$K''' + 4K' = 0. \quad (2.8)$$

Интеграл этого уравнения есть

$$K(\alpha) = -\frac{C_1}{2} \cos 2\alpha + \frac{C_2}{2} \sin 2\alpha + C_3, \quad (2.9)$$

где C_1, C_2, C_3 - постоянные интегрирования, подлежащие определению из граничных условий.

На рассматриваемом этапе решения могут быть сформулированы следующие два граничных условия

$$\tau_{\rho\alpha}|_{\alpha=0} = 0; \quad S = -\chi \tau_{max}|_{\alpha=\alpha^*} \quad (2.10)$$

Здесь S - интенсивность сил трения (касательное напряжение) на контакте матрицы и деформируемого материала, τ_{max} - максимальное касательное напряжение, χ - коэффициент пропорциональности, определяемый экспериментально [3], α^* - угол наклона матрицы (рис. 1).

Воспользовавшись граничными условиями (2.10), для функции $K(\alpha)$ получим

$$K(\alpha) = \frac{C_1}{2} (\psi - \sin 2\alpha) \quad (2.11)$$

где

$$\psi(\alpha^*, \chi) = \cos 2\alpha^* + \frac{\sqrt{1-\chi^2}}{\chi} \sin 2\alpha^*. \quad (2.12)$$

Таким образом, найдено явное выражение разрешающей функции, в которое входит не установленная еще постоянная C_1 . Для ее определения необходимо исследовать поле скоростей перемещений.

3. Скорости перемещений и деформаций

Рассмотрение кинематики течения связано с выбором очага деформации, который ограничен [4] поверхностью клина и двумя поверхностями разрыва скоростей $\rho_0 = \rho_0(\alpha), \rho_k = \rho_k(\alpha)$ (рис. 1).

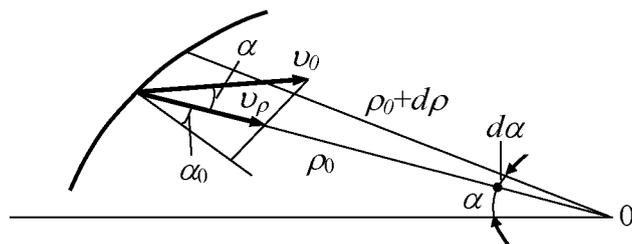


Рис. 2. К выводу уравнения поверхности разрыва скоростей перемещений на входе в матрицу

На рис. 2. изображены направления векторов скоростей перемещений при входе в очаг пластической деформации – средней v_0 и радиальной v_ρ , заимствованные в [4, 7]. С привлечением последних, опуская промежуточные выкладки, для радиуса поверхности $\rho_0 = \rho_0(\alpha)$, ограничивающей очаг деформации на входе в матрицу, получим

$$\rho_0 = \frac{C_1(\sin^2 \alpha - \psi\alpha)}{2v_0 \sin \alpha} \tag{3.1}$$

Если принять условие несжимаемости в форме $v_0 h_0 = v_k h_k$, то функция $\rho_k = \rho_k(\alpha)$ определится так

$$\rho_k = \frac{C_1(\sin^2 \alpha - \psi\alpha)}{2v_0 \lambda \sin \alpha} \tag{3.2}$$

Здесь, как и выше, $\lambda = h_0 / h_k$ – степень обжатия полосы (вытяжка), а для $\psi(\alpha^*, \chi)$ получено (2.12).

Перейдем теперь к непосредственному установлению постоянной C_1 . Запишем выражение для секундного объема материала, проходящего через поверхность $\rho_0 = \rho_0(\alpha)$. Имеем

$$W_c = \iint_A v_\rho|_{\rho=\rho_0} dA, \tag{3.3}$$

где A – площадь сечения матрицы при $\rho_0 = \rho_0(\alpha)$.

Если учесть, что в цилиндрических координатах $dA = \rho_0 d\alpha dz$, то вместо (3.3) для полосы единичной ширины с привлечением теоремы о среднем и с учетом (2.2) получим

$$\int_0^{\alpha^*} K(\alpha) d\alpha = v_0 \alpha^* \tag{3.4}$$

Подставив в это уравнение формулу (2.11) и вычислив интеграл в левой части, для $K = K(\alpha)$ будем иметь

$$K(\alpha) = \frac{v_0}{2\bar{\psi}} (\psi - \sin 2\alpha), \tag{3.5}$$

где

$$\bar{\psi} = \frac{\alpha^*}{\psi\alpha^* - 1 + \cos \alpha^*}. \tag{3.6}$$

Теперь окончательно кинематические характеристики процесса будут определяться зависимостями: – скорость радиального перемещения

$$v_\rho = \frac{v_0}{2\bar{\psi} \rho} (\sin 2\alpha - \psi), \tag{3.7}$$

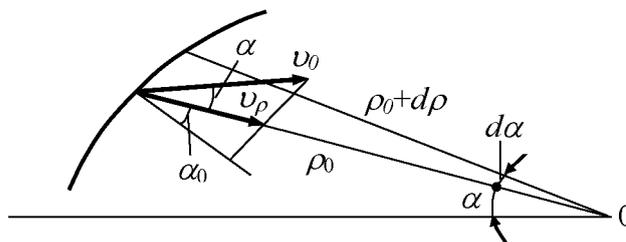
– функции $\rho_0 = \rho_0(\alpha)$, $\rho_k = \rho_k(\alpha)$, ограничивающие в радиальном направлении очаг пластической деформации,

$$\rho_0(\alpha) = \frac{\sin^2 \alpha - 4\alpha}{2\bar{\psi} \sin \alpha}; \quad \rho_k = \frac{\sin^2 \alpha - \psi\alpha}{2\bar{\psi} \lambda \sin \alpha}; \tag{3.8}$$

– скорости деформаций

$$\varepsilon_\rho = \frac{v_0}{2\bar{\psi} \rho^2} (\psi - \sin 2\alpha); \quad \varepsilon_\alpha = -\frac{v_0}{2\bar{\psi} \rho^2} (\psi - \sin 2\alpha); \quad \gamma_{\rho\alpha} = -\frac{v_0}{\bar{\psi} \rho^2} \cos 2\alpha. \tag{3.10}$$

Здесь для $\psi(\alpha^*, \chi)$, $\bar{\psi}(\alpha^*, \chi)$ получены соответственно формулы (2.12), (3.6).



4. Определение компонентов напряжений

Для составляющих напряжений приведем формулы в виде, удобном для дальнейшего использования. При этом учтено граничное условие в форме

$$\sigma_\rho \Big|_{\rho=\rho_k} = 0. \tag{4.1}$$

С использованием указанного условия, обозначив $\varphi(\alpha) = K''(\alpha) - 4K(\alpha)$, зависимости для напряжений в окончательной редакции могут быть записаны следующим образом

$$\begin{aligned} 3\sigma_\rho &= (1 - m_0 - \beta)L^{-1/2} \left(\frac{L'K'}{L} - \varphi \right) \ln \frac{\rho}{\rho_k} - 4(1 - m_0 - \beta)L^{-1/2}K - \\ &- \frac{3m_0 + \beta}{2} \varphi \left(\frac{1}{\rho_k^2} - \frac{1}{\rho^2} \right) - 4(3m_0 + \beta) \frac{K}{\rho_k^2} + \frac{3}{4} m_0 L^{1/2} \left(\frac{L'K'}{2L} + \varphi \right) \times \\ &\times \left(\frac{1}{\rho_k^4} - \frac{1}{\rho^4} \right) + 12m_0 L^{1/2} \frac{K}{\rho_k^4} - \frac{m_0}{6} L \left(\frac{L'K'}{L} + \varphi \right) \left(\frac{1}{\rho_k^6} - \frac{1}{\rho^6} \right) - 4m_0 L \frac{K}{\rho_k^6}; \\ 3\sigma_\alpha &= (1 - m_0 - \beta)L^{-1/2} \left(\frac{L'K'}{L} - \varphi \right) \ln \frac{\rho}{\rho_k} - \frac{3m_0 + \beta}{2} (\varphi + 8K) \left(\frac{1}{\rho_k^2} - \frac{1}{\rho^2} \right) + \\ &+ \frac{3}{4} m_0 L^{1/2} \left(\frac{L'K'}{2L} + \varphi + 16K \right) \cdot \left(\frac{1}{\rho_k^4} - \frac{1}{\rho^4} \right) - \frac{m_0}{6} L \left(\frac{L'K'}{L} + \varphi + 24K \right) \left(\frac{1}{\rho_k^6} - \frac{1}{\rho^6} \right); \\ 3\tau_{\rho\alpha} &= \left[(1 - m_0 - \beta)L^{-1/2} + \frac{3m_0 + \beta}{\rho^2} - \frac{3m_0}{\rho^4} L^{1/2} + \frac{m_0}{\rho^6} L \right] K'. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Обратимся к незадействованному еще граничному условию, в соответствие которому деформирующее усилие на выходе из матрицы отсутствует. Имеем

$$\int_0^{\alpha^*} \sigma_\rho \Big|_{\rho=\rho_k} \rho_k d\alpha = 0. \tag{4.3}$$

После подстановки в (4.3) первой формулы (4.2) приходим к интегралу

$$\int_0^{\alpha^*} K(\alpha) \left[(1 - m_0 - \beta)L^{-\frac{1}{2}}(\alpha)\rho_k + (3m_0 + \beta)\rho_k^{-1} - \right. \\ \left. - 3m_0 L^{\frac{1}{2}}(\alpha)\rho_k^{-3} + m_0 L(\alpha)\rho_k^{-5} \right] d\alpha = 0. \tag{4.4}$$

Вычислив (4.4) и введя обозначение

$$\mu = \nu_0 \lambda^2 \psi / \sqrt{3}, \tag{4.7}$$

получим следующее кубическое уравнение относительно μ

$$a_1(\alpha^*)\mu^3 + a_2(\alpha^*)\mu^2 + a_3(\alpha^*)\mu + a_4(\alpha^*) = 0. \tag{4.6}$$

Здесь коэффициенты $a_i(\alpha^*)$ равны

$$\begin{aligned} a_1(\alpha^*) &= m_0 \int_0^{\alpha^*} (\psi^2 + 1 - 2\psi \sin 2\alpha) (\psi - \sin 2\alpha) \left(\frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \psi \alpha} \right)^5 d\alpha; \\ a_2(\alpha^*) &= -3m_0 \int_0^{\alpha^*} (\psi^2 + 1 - 2\psi \sin 2\alpha)^{\frac{1}{2}} (\psi - \sin 2\alpha) \left(\frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \psi \alpha} \right)^3 d\alpha; \\ a_3(\alpha^*) &= (3m_0 + \beta) \int_0^{\alpha^*} (\psi - \sin 2\alpha) \frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \psi \alpha} d\alpha; \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$a_4(\alpha^*) = (1 - m_0 - \beta) \int_0^{\alpha^*} \frac{\sin^2 \alpha - \psi \alpha}{2 \sin \alpha} \frac{\psi - \sin 2\alpha}{\sqrt{\psi^2 + 1 - 2\psi \sin 2\alpha}} d\alpha.$$

5. Определение деформирующего усилия

Зная величину и распределение напряжений на поверхности, ограничивающей вход в очаг деформации, можно определить усилие прессования так

$$P = 2 \int_0^{\alpha^*} \sigma_\rho \Big|_{\rho=\rho_0} \rho_0 d\alpha. \tag{5.1}$$

После подстановки в интеграл (5.1) выражения для σ_ρ (4.2) при $\rho = \rho_0$, получим

$$P = \frac{2\sqrt{3}}{3\psi} \left[m_0 b_1(\alpha^*) \mu^3 + 3m_0 b_2(\alpha^*) \mu^2 + 2(3m_0 + \beta) b_3(\alpha^*) \mu - 2(1 - m_0 - \beta) b_4(\alpha^*) \right], \tag{5.2}$$

где $\mu = \frac{\mu}{\lambda^2} = \frac{\nu_0 \psi}{\sqrt{3}}$, причем $\lambda = \frac{\rho_0}{\rho_k} = \sqrt{\frac{\nu_k}{\nu_0}}$, а коэффициенты b_i формулы (5.2) равны

$$\begin{aligned} b_1(\alpha^*) &= 2 \int_0^{\alpha^*} (\psi^2 + 1 - 2\psi \sin 2\alpha) (\psi - \sin 2\alpha) \left(\frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \psi \alpha} \right)^5 d\alpha - \\ &\quad - \frac{(1 - \lambda^6)}{2\psi} \int_0^{\alpha^*} (\psi^2 + 1 - 2\psi \sin 2\alpha)^2 \left(\frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \psi \alpha} \right)^5 d\alpha; \\ b_2(\alpha^*) &= \frac{(1 - \lambda^4)}{3\psi} \int_0^{\alpha^*} \sqrt{(\psi^2 + 1 - 2\psi \sin 2\alpha)^3} \left(\frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \psi \alpha} \right)^3 d\alpha - \\ &\quad - 2 \int_0^{\alpha^*} \sqrt{\psi^2 + 1 - 2\psi \sin 2\alpha} (\psi - \sin 2\alpha) \left(\frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \psi \alpha} \right)^3 d\alpha; \\ b_3(\alpha^*) &= \int_0^{\alpha^*} (\psi - \sin 2\alpha) \frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \psi \alpha} d\alpha; \\ b_4(\alpha^*) &= \int_0^{\alpha^*} \frac{\psi - \sin 2\alpha}{\sqrt{\psi^2 + 1 - 2\psi \sin 2\alpha}} \frac{\sin^2 \alpha - \psi \alpha}{2 \sin \alpha} d\alpha. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Для вычисления интегралов (4.7), (5.3) разработана соответствующая процедура, осуществленная с использованием Mathcad.

6. Об оптимизации процесса прессования полосы с использованием сверхпластичности

Трудности, встречаемые при математической формулировке и решении технологических задач объемного формоизменения, в том числе в термомеханических режимах сверхпластичности, обсуждены в [6]. Поэтому целесообразной представляется возможность выработки технологической стратегии [2] с обеспечением оптимальности некоторых критериев. Нельзя не согласиться с мнением [1], утверждающим, что из множества общепризнанных критериев выбирается лишь один из них или априорно задается путь их приведения к единственному критерию.

Использование сверхпластичности способствует выработке нетрадиционных критериев оптимизации. Так, на изменение силовых, термических и кинематических параметров процесса очаг деформации откликается изменением объема и расположения области сверхпластичности, которая составляет часть очага деформации. Следовательно, при таком подходе оптимизационная задача разбивается на две части. В первой из них определению подлежат условия, при которых объем зоны сверхпластичности будет максимальным. Вторая сторона задачи состоит в обеспечении требуемого расположения указанной зоны в очаге деформации в зависимости от конечной цели процесса.

Считаем температуру процесса постоянной и не выходящей за термический диапазон сверхпластичности. Исключив таким образом температуру, обратим внимание на анализ поля скоростей деформаций, внешней характеристикой которого может служить средняя скорость прессования ν_0 .

В качестве целевой функции выбираем объем зоны сверхпластичности ($W^{СП}$) в очаге деформации. Принимаем, что указанный объем при оптимальном сочетании силовых, термических и кинематических условий достигает максимума

$$W^{СП} = \iiint_{(W)} dW \rightarrow max. \tag{6.1}$$

В цилиндрических координатах вместо (6.1) можем записать

$$2 \int_0^{\alpha^*} \rho^2 d\alpha \rightarrow max. \tag{6.2}$$

К условию (6.2) добавим ограничения на сверхпластическую область по скоростям деформаций, которые, следуя [5, 6], имеют вид

$$1 - \left(-\frac{\beta}{3m_0}\right)^{1/2} \leq \varepsilon_u \leq 1 + \left(-\frac{\beta}{3m_0}\right)^{1/2}, \tag{6.3}$$

причем, как и выше, m_0 – постоянная материала, β – управляющий параметр (при сверхпластичности $\beta < 0$), ε_u – интенсивность скоростей деформаций (2.4), (2.5).

Неравенство (6.3), используя (2.4) и (2.5), можно свести к следующему

$$\rho_n \leq \rho \leq \rho_l, \tag{6.4}$$

где положено

$$\rho_l = \left\{ \left[1 - \left(-\frac{\beta}{3m_0}\right)^{1/2} \right]^{-1} \left(\frac{4K^2 + K'^2}{3} \right)^{1/2} \right\}^{1/2};$$

$$\rho_n = \left\{ \left[1 + \left(-\frac{\beta}{3m_0}\right)^{1/2} \right]^{-1} \left(\frac{4K^2 + K'^2}{3} \right)^{1/2} \right\}^{1/2}. \tag{6.5}$$

Здесь через ρ_l , ρ_n обозначены соответственно верхнее и нижнее значения радиуса ρ , ограничивающие область сверхпластичности.

Произвольная величина $\rho \in]\rho_l, \rho_n[$ может быть определена так

$$\rho = \frac{1}{\Pi} \left(\frac{4K^2 + K'^2}{3} \right)^{1/4}, \tag{6.6}$$

где

$$\Pi \in \left[\left(1 - \left(-\frac{\beta}{3m_0}\right)^{1/2} \right); \left(1 + \left(-\frac{\beta}{3m_0}\right)^{1/2} \right) \right].$$

Теперь можно утверждать, что получена задача вариационного исчисления, для решения которой в соответствии с (6.2) и (6.6) необходимо построить функционал

$$\Phi = \int_0^{\alpha^*} (4K^2 + K'^2)^{1/2} d\alpha. \tag{6.7}$$

Случай (6.7) относится к разряду, когда подынтегральная функция зависит только от $K(\alpha)$, $K'(\alpha)$, т.е.

$$J = J(K, K') = (4K^2 + K'^2)^{1/2}. \tag{6.8}$$

При этом первый интеграл уравнения Эйлера вычисляется сразу и имеет вид

$$J - K'J_{K'} = C, \tag{6.9}$$

где C – произвольная постоянная интегрирования.

Теперь уравнение (6.9) с учетом (6.8) приводится к дифференциальному уравнению с разделенными переменными

$$K' = \frac{2K}{C} (4K^2 - C^2)^{1/2}. \tag{6.10}$$

Интеграл уравнения (6.10) с учетом краевого условия $K(\alpha)|_{\alpha=0} = 0$ будет равен

$$K(\alpha) = \frac{C}{2} \cos^{-1} 2\alpha. \quad (6.11)$$

Из (6.11) следует ограничение на величину угла $\alpha = \alpha^{**}$, образующего в окружном направлении границу области сверхпластичности,

$$\alpha^{**} \leq \frac{\pi}{4}. \quad (6.12)$$

Таким образом, объем зоны сверхпластичности будет максимальным, если имеют место условия (6.4), (6.12).

Перейдем теперь ко второй части оптимизационной проблемы, связанной с отысканием рационального расположения сверхпластической области. При этом будем предполагать, что конечной целью процесса прессования является получение высококачественной полосы с ультрамелкозернистой структурой. Поэтому сверхпластическую зону будем стремиться поместить так, чтобы исключить на выходе из матрицы скоростные условия за рамками диапазона сверхпластичности. Поверхность разрыва скоростей перемещений здесь определяется вторым уравнением (3.8), которое перепишем в форме

$$\rho_k^2 = \frac{(\sin^2 \alpha - \psi\alpha)^2}{4\lambda^2 \Psi^2 \sin^2 \alpha}. \quad (6.13)$$

где, как и выше, ψ и Ψ определяются соответственно формулами (2.12), (3.6).

Уравнение, ограничивающее область сверхпластичности по верхнему скоростному пределу (на выходе из матрицы), в соответствии (6.5), (3.5) будет иметь вид

$$\rho_n^2 = \frac{\nu_0 (1 + \psi^2 - 2\psi \sin 2\alpha)^{1/2}}{\sqrt{3\psi} [1 + (-\beta/3m_0)^{1/2}]}. \quad (6.14)$$

Условие пересечения поверхностей (6.13), (6.14) представляется равенством

$$\frac{4\mu (1 + \psi^2 - 2\psi \sin 2\alpha)^{1/2}}{1 - \left(\frac{\beta}{3m_0}\right)^{1/2}} = (\sin^2 \alpha - \psi\alpha)^2, \quad (6.15)$$

где для μ получено (4.5).

Несложно показать, что функция (6.15) положительно определена, по крайней мере, при условии (6.12). Последнее означает, что в пределах (6.12) пересечение поверхностей, ограничивающих очаг деформации $\rho_k = \rho_k(\alpha)$ и область сверхпластичности по верхнему пределу скоростей деформаций ($\rho_n = \rho_n(\alpha)$), отсутствует.

Более того, можно утверждать, что $\rho_k < \rho_n$.

Теперь очевидно, что оптимальным следует признать взаимное расположение поверхностей $\rho_k(\alpha)$ и $\rho_n(\alpha)$ таким, чтобы обеспечить (рис. 1) выполнение условия

$$\rho_k(\alpha^*) = \rho_n(\alpha^*). \quad (6.16)$$

Равенство (6.16) по существу есть требование касания поверхностей $\rho_k = \rho_k(\alpha)$ и $\rho_n = \rho_n(\alpha)$.

Поэтому, положив в (6.15) $\alpha = \alpha^*$, с учетом формул (4.7), (6.13), (6.14), получим оптимальное значение скоростного параметра $\mu = \mu_{opt}$. Имеем

$$\mu_{opt} = \frac{(\sin^2 \alpha^* - \psi\alpha^*)^2 \cdot [1 + (-\beta/3m_0)^{1/2}]}{4(1 + \psi^2 - 2\psi \sin 2\alpha^*)^{1/2}}. \quad (6.17)$$

На рис. 3 представлены в виде графиков зависимости $\mu \sim \alpha^*$, построенные на основании решения (6.17) оптимизационной задачи (кривая 1), и для случая (4.5)... (4.7), когда только температура принадлежит диапазону сверхпластичности (кривая 2). Как видно из представленных графиков, скорость прессования при удовлетворении, кроме температурных, еще и скоростных условий сверхпластичности, для изготовления полосы с ультрамелким зерном значительно снижается (примерно в 2,5 ... 3,0 раза).

На рис. 4 показаны графики зависимостей усилия прессования (5.2) от угла α^* . Анализ графических зависимостей, приведенных на рис. 4, показывает, что усилия прессования с введением оптимально расположенной области сверхпластичности снижаются сравнительно с полученными значениями из решения краевой задачи. Увеличение λ , при прочих равных условиях означающее удлинение конической части матрицы,

приводит к значительному возрастанию усилия прессования. Так, усилия при $\lambda = 1,5$ возрастают примерно на порядок для более длинных матриц. При сверхпластичности усилие снижается в 3...4 раза.

Укажем, что конкретные расчеты проводились для параметров, соответствующих сплаву АМг5 [5]. Качественно решение не изменится и для других сплавов, проявивших сверхпластические свойства при сжатии.

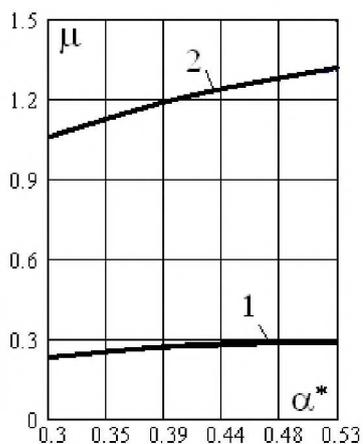


Рис.3. Зависимость оптимальной скорости прессования от угла α^* при $\Lambda = 1,5$; $\chi = 0,3$, $\beta = -0,1561$; кривая 2 соответствует скоростям прессования без оптимизации.

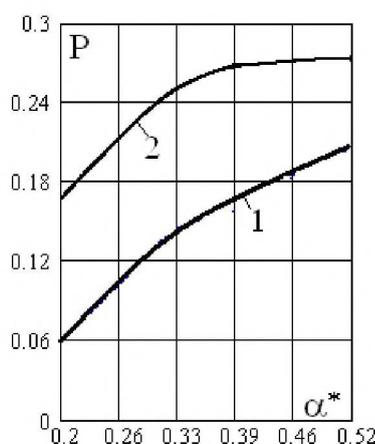


Рис. 4. Зависимость усилия прессования от угла α^* при $\Lambda = 1,5$; $\chi = 0,3$; $\beta = -0,1561$; кривая 2 соответствует усилиям прессования без оптимизации.

Таким образом, показано, что удовлетворение только температурных условий реализации сверхпластичности без учета скоростного фактора не может отвечать принятой цели изготовления конечного продукта с качественной ультрамелкозернистой структурой.

Список литературы

1. Аксенов Л.Б. Системное проектирование процессов штамповки/ Л.Б. Аксенов. – Л., 1990. – 240 с.
2. Кийко И.А. Пластическое течение металлов/ И.А. Кийко // Научные основы прогрессивной техники и технологии. – М., 1985. – С.102-103.
3. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести/ Н.Н. Малинин. – М., 1975. – 400 с.
4. Малинин Н.Н. Технологические задачи пластичности и ползучести/ Н.Н. Малинин. – М., 1979. – 119 с.
5. Рудаев Я.И. Введение в механику динамической сверхпластичности/ Я.И. Рудаев. – Бишкек, 2003. – 134 с.
6. Рудаев Я.И. Механика динамической сверхпластичности алюминиевых сплавов/ А.И. Рудской, Я.И. Рудаев.– СПб., 2009. – 217 с.
7. Соколовский В.В. Теория пластичности/ В.В. Соколовский - М., 1969. – 608 с.

References

1. Aksenov L.B. System planning of processes of stamping/ of Aksenov L.B. - L., 1990. - 240 p.
2. Kyiko I.A. Plastic flow of metals/ of Kyiko I.A. // is Scientific bases of progressive technique and technology. - Moscow, 1985. - C.102-103.
3. Malinin N.N. Applied theory of plasticity and creep/ of Malinin N.N. - Moscow, 1975. - 400 p.
4. Malinin N.N. Technological tasks of plasticity and creep/ of Malinin N.N. - Moscow, 1979. - 119 p.
5. Rudaev Ya. I. Introduction to mechanics of dynamic superplasticity/ of Rudaev Ya.I. - Bishkek, 2003. - 134 p.
6. Rudaev Ya.I. Mechanics of dynamic superplasticity of aluminium alloys/ of Rudskoy A.I., Rudaev Ya.I.- St. Petersburg, 2009. - 217 p.
7. Sokolovsky V.V. Theory of plasticity/ of Sokolovsky V.V. - Moscow, 1969. - 608 p.