УДК. 517.968.23/73(045/046)

З.К. ИМАНАЛИЕВ, А.М. ОСМОНКАНОВ,
Ж.А..АЛТЫМЫШОВА
Z. K. IMANALIEV, A.M. OSMONKANOV, ZH. A. ALTYMYSHOVA
E.mail. ksucta@elcat.kg

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

ALGORITHMS OF SINGULARLY PERTURBED DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEM

Сунуш кылынган макалада сингулярдык дискреттик башкаруу системасынын кыймылдарын бөлүштүрүү ыкмасы иштелип чыгарылган. Жыйынтыгында, тез кыймылдын жай кыймылдан (же тескерисинче) бөлүнүүсүн камсыз кылуучу шарттары көрсөтүлгөн жана сызыктуу стационардык дискреттик системанын өтмө матрицасын түзүүнүн алгоритми келтирилди. Мындан сырткары бөлүштүрүлгөн система үчүн оптималдык башкаруунун маселеси каралды.
***Ачкыч сөздөр**: сингулярдык – система, дискреттик башкаруу системасы, өтмө матрица, жай камтылган система, тез камтылган система, кичине параметр.*

В данной статье разработан способ разделения движений сингулярно-возмущенной дискретной управляемой системы. В результате, указаны условия гарантирующие отделимость быстрых движений от медленных или наоборот и приведен алгоритм построение переходной матрицы стационарной линейной дискретной системы. Кроме того для разделенной системы рассмотрена задача оптимального управления.
***Ключевые слова:** сингулярно-возмущенная система, дискретная управляемая система, переходная матрица, медленная подсистема, быстрая подсистема, малый параметр.*

This article provides a method of separation of motions singularly perturbed discrete controlled system. As a result, given the conditions of separability guaranteeing rapid movements from slow or vice versa, and an algorithm for the construction of the transition matrix of stationary linear discrete system. In addition to the split system we consider the problem of optimal control.
***Keywords:** singularly perturbed system, discrete control systems, transition matrix, slow subsystem, the fast subsystem, a small parameter.*

Рассмотрим систему вида

$$x(t+1) = A_1x(t) + A_2z(t) + B_1u(t), \qquad x(0) = x_0,\ x(N) = x_N, \tag{1}$$

$$\mu z(t+1) = A_3x(t) + A_4z(t) + B_2u(t), \qquad z(0) = z_0,\ z(N) = z_N \tag{2}$$

где $A_1 - (n \times n),\ A_2 - (n \times m),\ A_3 - (m \times n),\ A_4 - (m \times m),$
$B_1 - (n \times n),\ B_2 - (m \times n)$ – постоянные матрицы,
$x \in R^n,\ z \in R^m$ – векторы переменных состояния, $u \in R^r$ – вектор управления,
$\mu > 0$ – малый параметр, $t = 0,1,\dots,N$.

Предположим, что собственные значения λ_i матрицы A_4 удовлетворяют условию

$$|\lambda_i| < q_0 < 1. \tag{3}$$

Введем замены:

$$x = \tilde{x} - \mu N\tilde{z}, \tag{4}$$

$$z = \tilde{z} + Hx, \tag{5}$$

где матрицы H и N имеют размерности $m \times n$, $n \times m$ соответственно.

Преобразуя уравнения (4) и (5) можно получить следующие соотношения:

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & -\mu N \\ H & E_m - \mu HN \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n - \mu NH & \mu N \\ H & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Используя замены (5) с учетом (4) из системы (1) и (2) получаем:

$$x(t+1) = \tilde{A}_1 x(t) + A_2 \tilde{z}(t) + B_1 u(t), \; x(t_0) = x_0, \; x(N) = x_1, (8)$$
$$\mu \tilde{z}(t+1) = \tilde{A}_4 \tilde{z}(t) + \tilde{B}_2 u(t), \quad \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0, \; \tilde{z}(N) = \tilde{z}_1,$$

где $\tilde{A}_1 = A_1 + A_2 H$, $\tilde{A}_4 = A_4 - \mu H A_2$, $\tilde{B}_2 = B_2 - \mu H B_1$, (9)

$\tilde{z}_0 - z_0 - Hx_0$, $\tilde{z}_N - z_N - Hx_N$

при условии

$$\mu H A_1 + \mu H A_2 H - A_3 + A_4 H. \qquad (10)$$

Теперь, используя соотношения (4) и (5) из системы (8) получим:

$$\tilde{x}(t+1) = \tilde{A}_1 \tilde{x}(t) + \tilde{B}_1 u(t), \; \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \; \tilde{x}(N) = \tilde{x}_N, \qquad (11)$$
$$\mu \tilde{z}(t+1) = \tilde{A}_4 \tilde{z}(t) + \tilde{B}_2 u(t), \; \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0, \; \tilde{z}(N) = \tilde{z}_N$$

где $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_4$, $\tilde{B}_2$, $\tilde{z}_i$ определяются из (9),

$$\tilde{B}_1 = B_1 + N\tilde{B}_2, \quad \tilde{x}_0 - x_0 + \mu N \tilde{z}_0, \quad \tilde{x}_N - x_N + \mu N \tilde{z}_N \qquad (12)$$

при условии

$$\mu \tilde{A}_1 N - N\tilde{A}_4 - A_2 = 0. \qquad (13)$$

Уравнения (10) и (13) являются алгебраическими уравнениями Риккати и Ляпунова соответственно. Используя теорему о неявной функции, можно показать, что эти уравнения имеют решения, которые могут быть представлены в виде равномерно сходящихся степенных рядов [1, 2]:

$$H(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i \mu^i, \quad N(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k \mu^k. \qquad (14)$$

Матрицы H_i и N_k $(i, k = 0, 1, \dots)$ однозначно вычисляются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ в уравнениях (10) и (13). В результате имеем:

$$H_0 = -A_4^{-1} A_3, \quad H_1 = A_4^{-1} H_0 (A_1 + A_2 H_0), \dots \qquad (15)$$
$$H_i = A_4^{-1} (H_{i-1} A_1 + \sum_{j=0}^{i-1} H_j A_2 H_{v-1}),$$
$$i = 1, 2, \dots, \quad v = i, \; i-1, \; i-2, \dots,$$
$$N_0 = -A_2 A_4^{-1}, \quad N_1 = (A_1 N_0 + A_2 H_0 N_0 + N_0 H_0 A_2) A_4^{-1}, \dots,$$
$$N_k = \left[A_1 N_{k-1} + A_2 \left(\sum_{j=0}^{k-1} H_j N_{s-1} \right) + \left(\sum_{j=0}^{k-1} N_j H_{s-1} \right) A_2 \right] A_4^{-1},$$
$$k = 1, 2, \dots, \quad s = i, \; i-1, \; i-2, \dots .$$

Таким образом, в результате имеем систему (11) у которой медленные и быстрые подсистемы разделены и они объединяются через управляющей функции *u(t)*, но имеют различные собственные значения. Свойства управляемости системы (1) те же, что и у системы (11).

Теперь рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J = \sum_{j=0}^{N-1} u'(j) u(j) \qquad (16)$$

при ограничениях (11).

Предположим, что:

1. Матрицы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_4$ являются матрицами простой структуры [4] и не имеют нулевых собственных значений λ_i $(i = \overline{1, n})$, ν_k $(k = \overline{1, m})$ соответственно.

2. Для собственных значений λ_i ($i=\overline{1,n}$), ν_k ($k=\overline{1,m}$) матрицы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_4$ выполняются следующие ограничения:

$|\lambda_i| < q_1 < 1$ ($i=\overline{1,n}$), $|\nu_k| < q_2 < 1$ ($k=\overline{1,m}$).

3. $\tilde{z}_0 = \mu^N \cdot z_0^*$, $z_0^* \in R^m$.

По первому условию матрицы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_4$ не имеют нулевых собственных значений и не вырождены. Тогда собственные значения матрицы $(\tilde{A}_1)^{-1}$, $(\tilde{A}_4)^{-1}$ равны $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ и $\nu_1^{-1}, \nu_2^{-1}, \dots, \nu_m^{-1}$, а соответствующие их собственные векторы совпадают с собственным векторам для $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$.
Функционал (16) оценивает затрачиваемую энергию в процессе управления [5].

С учетом вышеуказанного условия 3 решения системы (11) можно записать в виде

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A}_1^t \tilde{x}_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \tilde{A}_1^{t-j-1} \tilde{B}_1 u(j) \tag{17}$$

$$\tilde{z}(t) = \tilde{A}_4 \cdot \mu^{N-t} z_0^* + \sum_{j=0}^{t-1} \mu^{-(t-j)} \tilde{A}_4^{t-j-1} \tilde{B}_2 u(j) \tag{18}$$

Используя конечные условия системы (11) будем иметь

$$\sum_{j=0}^{N-1} \tilde{A}_1^{N-j-1} \tilde{B}_1 u(j) = \alpha_{1N}, \tag{19}$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \mu^{-(N-j)} \tilde{A}_4^{N-j-1} \tilde{B}_2 u(j) = \alpha_{2N}, \tag{20}$$

где $\alpha_{1N} = \tilde{x}_1 - \tilde{A}_1^N \tilde{x}_0$, $\alpha_{2N} = \tilde{z}_1 - \tilde{A}_4^N z_0^*$.
Равенства выражают необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $u(j)$ ($j = 0, 1, \dots, N$-1), чтобы система (11) перешла из заданного начального состояния в конечное состояние. Кроме того она должна доставлять минимум функционалу (16).

Однако система (11) состоит из двух подсистем и их движения являются разнотемповыми, в этой связи решить совместно уравнения (19), (20) относительно $u(j)$ не является возможным. Для того чтобы быстрая подсистема перешла из заданного начального состояния в конечное состояние выбрать такое управление, которое «замедляет» ее движение при $\mu \to 0$. Кроме того функция $u(j)$ удовлетворяющее уравнение (20) выражается через обратной матрицы Грама [5] и возникает еще требование ее существования при $\mu \to 0$.

Поэтому для подпространства переменных состояния $\tilde{x}, \tilde{z}$ выбирается управление отдельно и каждое уравнение (19), (20) решается независимо друг от друга относительно неизвестных параметров.

С учетом вышесказанному будем искать управление в виде

$$u(j) = \begin{cases} u(j, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1 = \tilde{B}_1'(\tilde{A}_1')^{N-j-1} C_1 & \text{для } \tilde{x} \in [\tilde{x}_0, \tilde{x}_1] \subset R^4 \\ \tilde{u}(j, \tilde{z}_0^*, \tilde{z}_1) = \mu^{N-j} \tilde{B}_2'(\tilde{A}_4')^{N-j-1} C_2 & \text{для } \tilde{z} \in [\tilde{z}_0^*, \tilde{z}_1] \subset R^m. \end{cases} \tag{22}$$

Подставляя (21) в (19), (20) получим

$$W_1 \cdot C_1 - \alpha_{1N}, \tag{23}$$

$$W_2 \cdot C_2 - \alpha_{2N}, \tag{24}$$

где $W_1 = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{A}_j^{N-j-1} \tilde{B}_1 \tilde{B}_2' (\tilde{A}_1')^{N-j-1}$, $W_2 = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{A}_4^{N-j-1} B_2 B_2' (\tilde{A}_4)^{N-j-1}$.

Так как матрицы W_1, W_2 положительно определенные [5] и управление (22) определяется однозначно. В результате имеем

$$u(j, \tilde{x}_0, x_1) = \tilde{B}_1'(\tilde{A}_1')^{N-j-1} \cdot W_1^{-1}(\tilde{x}_1 - \tilde{A}_1^N \tilde{x}_0), \tag{25}$$

$$u(j, \tilde{z}_0^*, \tilde{z}_1) = \mu^{N-j} \tilde{B}_2'(\tilde{A}_4')^{N-j-1} W_2^{-1}(\tilde{z}_1 - A^N \tilde{z}_0^*) \tag{26}$$

Тогда соответствующие переменные состояния записываются в виде

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A}_1^t \tilde{x}_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \tilde{A}_1^{t-j-1} \tilde{B}_1 \tilde{B}_1' (\tilde{A}_1)^{N-j-1} \cdot W_1^{-1}(\tilde{x}_1 - \tilde{A}_1^N \tilde{x}_0) \tag{27}$$

$$\tilde{z}(t) - \ddot{A}_4 \mu^{N-t} \cdot z_0^* + \sum_{j-0}^{t-1} \mu^{N-t} \ddot{A}_4^{t-j-1} \ddot{B}_2 \ddot{B}_2' \left(\ddot{A}_4\right)^{N-j-1} \cdot W_2^{-1} (\tilde{z}_1 - \ddot{A}_4^N z_0^*) \qquad (28)$$

Предлагаемый метод обеспечивает понижение размерности изучаемых моделей и избавляет от вычислительной жесткости. Алгоритмы построения оптимального управления дискретными разнотемповыми системами обеспечивает устойчивости движения системы и положительной определенности матрицы Грама при нахождении оптимального управления для быстрой подсистемы.

Список литературы

1. Герашенко Е.И. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем [Текст] / Е.И. Герашенко, С.М. Геращенко. – Москва: Наука, 1975.- 296 с.

2. Стрыгин В. В. Разделение движений методом интегральных многообразий [Текст] /В.В. Стрыгин, В.А. Соболев. – Москва: Наука. 1988. - 256 с.

3. Иманалиев З.К. О переходных матрицах медленных и быстрых подсистем управляемой системы с малым параметром [Текст] / З.К. Иманалиев, Б.Ы. Аширбаев //Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике. Междунар. научн. конф. – Вестник КГНУ. – Вып 6, сер. 3. - Бишкек, 2001. - С.235 - 239.

4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц [Текст] / Ф.Р. Гантмахер. - Москва: Наука, 1988.- 552 с.

5. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами [Текст]/ Ю.Н.Андреев. – Москва: Наука. 1976. – 424 с.