

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СООРУЖЕНИЙ

APPLICATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN SOLVING PROBLEMS OF STRUCTURAL DYNAMICS

Макалада устундун ар кандай бекилишиндеги четтериндеги четки шарттарына карата дифференциалдык теңдемени чыгаруу каралган.

Ачкыч сөздөр: устун, таяныч, курулма, көпүрөлөр, иматтар, дифференциалдык теңдеме, четки шарттары.

В статье рассмотрены граничные условия балки с различными закреплениями на концах для решения дифференциального уравнения.

Ключевые слова: балки, опоры, сооружения, мосты, здания, дифференциальное уравнение, граничные условия.

The article deals with the boundary conditions of a beam with different fixtures on the ends to solve the differential equation.

Keywords: beams, pillars, buildings, bridges, buildings, differential equation, boundary conditions.

Динамика сооружений изучает колебания сооружений при различных динамических нагрузках и является специальным разделом строительной механики.

В отличие от статических нагрузок динамические нагрузки изменяются по величине, направлению в зависимости от времени и положению на сооружениях. Динамические нагрузки можно разделить на следующие виды: неподвижная периодическая нагрузка; импульсы; ударная нагрузка; подвижная нагрузка; сейсмическая нагрузка.

В работе представлены и систематизированы начальные и граничные условия при решения дифференциальных уравнений колебания конструкций зданий и сооружений. Под конструкциями в данной работе считаем балки, опоры, плиты, ленточные фундаменты и насыпи дороги.

При решении вынужденного колебания систем с одной степенью свободы используются неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами в виде:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = f(t) \quad (1)$$

где $\alpha = \frac{\beta}{2m} \left(\frac{1}{c} \right)$ — коэффициент затухания системы, β — коэффициент силы сопротивления, m — масса системы; ω — круговая частота собственного колебания системы $\left(\frac{\text{рад}}{c} \right)$; $f(t)$ — внешняя нагрузка, имеет размерности ускорения $\left(\frac{M}{c^2} \right)$; $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$ и $y(t)$ — ускорения, скорость и перемещение массы m системы соответственно.

Общее решение уравнения (1) будет [1]

$$y = y_{\text{св}} + \int_0^t f(\tau) \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot \frac{\sin \omega_1(t-\tau)}{\omega_1} d\tau \quad (2)$$

где $y_{\text{св}}$ — общее решение однородного дифференциального уравнения (1) без правой части; $f(\tau)$ — внешняя нагрузка, изменяющаяся по произвольному закону; ω_1 — круговая частота собственного колебания системы с учетом затухания α , τ — переменная

интегрирования; t — продолжительность колебания в секундах, ω_1 и α определяются из однородного дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение (1) используется при решении колебания малоэтажных зданий, опор, балок транспортных сооружений и при определении коэффициента динамичности зданий и сооружений [1, 2; 3, 4]. Числом степеней свободы системы называется число независимых геометрических параметров, определяющих положение системы в любой момент времени при любом ее движении. В зданиях число степеней свободы равно, числу этажей, а транспортных сооружений это число выбирается в зависимости от точности решения задачи и конструкций сооружения.

Причем, сколько сосредоточенных масс имеется в системе, столько дифференциальных уравнений пишется в виде (1) и решения ищет разложением на формы собственных колебаний.

Пролетные строения мостов, зданий и сооружений, опоры транспортных сооружений в действительности представляют собой систему с бесконечными степенями свободы.

Их положения в любой момент времени определяются упругими линиями балок, которые при динамических воздействиях представляется функцией двух переменных; положения точки x и времени t , тогда перемещение точек ищет в виде $y = y(x, t)$.

Дифференциальное уравнение вынужденного колебания балок будет уравнениями четвертого порядка в частных производных [1, 5].

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\alpha m(x) \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = f(x, t) \quad (3)$$

где $EJ(x)$ — жесткость при изгибе балки, $m(x)$ — распределенная масса по длине балки, α — коэффициент затухания балки, $f(x, t)$ — внешняя нагрузка. Если балка постоянного сечения u из однородного материала, тогда $EJ(x) = const$, $m(x) = const$ и не зависят от x , тогда дифференциальное уравнение будет.

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{m \partial^2 y}{\partial t^2} + 2\alpha m \frac{\partial y}{\partial t} = f(x, t) \quad (4)$$

Для определения круговых частот собственных колебаний и форм колебаний дифференциального уравнения (4) пишется без правой части [1]

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{m \partial^2 y}{\partial t^2} + 2\alpha m \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

$$0 < x < l, \quad t > 0, \quad l — \text{длина балки.}$$

Решение дифференциального уравнения (5) ищет в таком виде методом Фурье.

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(x) \cdot \varphi_i(t), \quad (6)$$

с подстановкой его в дифференциальное уравнение (5) и после некоторых преобразований получим два обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \frac{d^2 \varphi_i(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{d\varphi_i(t)}{dt} + \omega_i^2 \varphi_i(t) = 0 \\ EJ \frac{d^4 y_i(x)}{dx^4} + m y_i(x) \cdot \omega_i^2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $y_i(x)$ — i -тая форма собственных колебаний балки, ω_i — круговая собственная частота колебания балки без учета затухания α для i -той формы колебания, $\varphi(t)$ — функция времени.

Решения первого дифференциального уравнения (7) будет

$$\varphi_i(t) = e^{-\alpha t} (A_i \cdot \sin \overline{\omega}_i t + B_i \cdot \cos \overline{\omega}_i t); \quad (8)$$

где A_i и B_i произвольные коэффициенты, определяемые из начальных условий

$\overline{\omega}_i = \sqrt{\omega_i^2 - \alpha^2}$ — круговая частота собственных колебаний с учетом коэффициента затухания α .

Второе дифференциальное уравнение из (7) представим в виде

$$\frac{d^4 y_i(x)}{dx^4} + k_i^4 y_i(x) = 0 \quad (9)$$

где $k_i = \sqrt[4]{\frac{m \omega_i^2}{EJ}}$ – характеристическое число измеряется в $\left(\frac{1}{m}\right)$.

Основным этапом при расчете сооружений на динамические воздействия является определение собственных частот и собственных форм колебаний. Значения этих динамических параметров зависят от граничных условий балок или опор сооружений.

Решение однородного обыкновенного дифференциального уравнения (9) с производными до третьего порядка будет

$$y_i(x) = C \operatorname{sh}(k_i x) + D \operatorname{ch}(k_i x) + E \cos(k_i x) + F \sin(k_i x) \quad (10)$$

$$y'_i(x) = k_i C \operatorname{ch}(k_i x) + k_i D \operatorname{sh}(k_i x) - k_i E \sin(k_i x) + k_i F \cos(k_i x) \quad (11)$$

$$y''(x) = k_i^2 C \operatorname{sh}(k_i x) + k_i^2 D \operatorname{ch}(k_i x) - k_i^2 E \cos(k_i x) - k_i^2 F \sin(k_i x) \quad (12)$$

$$y'''(x) = k_i^3 C \operatorname{ch}(k_i x) + k_i^3 D \operatorname{sh}(k_i x) + k_i^3 E \sin(k_i x) - k_i^3 F \cos(k_i x) \quad (13)$$

где C, D, E, F – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий балок.

Если выражения (10-13) описывают колебания балки, то $y_i(x)$ – прогиб, $y'_i(x)$ – угол поворота сечения балки для i -той формы колебания, $y''(x) = -\frac{M_i(x)}{EJ}$, $y'''(x) = \frac{Q_i(x)}{EJ}$, где $M_i(x)$ – изгибающий момент; $Q_i(x)$ – поперечная сила для i -той формы колебания, EJ – жесткость при изгибе балки.

Рассмотрим граничные условия балок с различными закреплениями на концах:

1. Балка шарнирно закреплённая на концах, что характерно для перекрытий зданий и пролетного строения мостов.

Граничные условия будут:

при $x = 0$, $y(0) = 0$ и $y''(0) = 0$;

при $x = l$, $y(l) = 0$ и $y''(l) = 0$.

Это означает, что на концах шарнирно опертой балки перемещения и моменты равны нулю.

2. Балка жёстко закреплённая обоими концами.

Граничные условия будут:

при $x = 0$, $y_i(0) = 0$ и $y'_i(0) = 0$;

при $x = l$, $y_i(l) = 0$ и $y'_i(l) = 0$.

Для балки с закреплёнными концами прогиб и угол поворота равны нулю.

3. Балка одним концом закреплёна, а другим концом шарнирно опирается на опору.

Граничные условия:

при $x = 0$, $y_i(0) = 0$ и $y'_i(0) = 0$;

при $x = l$, $y_i(l) = 0$ и $y''_i(l) = 0$,

Эти граничные условия означает, что в левой части балки на опоре прогиб и угол поворота равны нулю, а правой части балки на опоре прогиб и момент равны нулю.

Перемещение сечения и прогиб сечения одна и та же величина. В литературе встречаются такие слова, как перемещение или прогиб балки.

4. Балка обоими концами без закреплений.

Таковыми случаями бывают крылья и корпуса самолетов и ракет, а также висячие конструкции сооружений.

Граничные условия для этого случая будут:

при $x = 0$, $y''_i(0) = 0$ и $y'''_i(0) = 0$;

при $x = l$, $y''_i(l) = 0$ и $y'''_i(l) = 0$.

Эти значения означают, что на концах балки моменты и поперечные силы равны нулю.

5. Балка с одним концом жестко закреплена, а другая сторона без закрепления (свободная).

Граничные условия будут:

$$\text{при } x = 0, y_i(0) = 0 \text{ и } y'_i(0) = 0;$$

$$\text{при } x = l, y''_i(l) = 0 \text{ и } y'''_i(l) = 0.$$

Такие граничные условия объясняются, что в левой части балки прогиб и угол поворота равны нулю, а в правой части момент и поперечная сила равна нулю.

Такие балки применяются в консольных конструкциях зданий и сооружений а также мостостроении тоже бывают пролетные строения с консольными конструкциями.

6. Балка шарнирно опирается на упругие опоры.

Граничные условия будут:

$$\text{при } x = 0, y''_i(0) = 0 \text{ и } y'''_i(0) = -\frac{C_0 y_i(0)}{EJ};$$

$$\text{при } x = l, y''_i(l) = 0 \text{ и } y'''_i(l) = -\frac{C_0 y_i(l)}{EJ}.$$

где C_0 — жесткость упругой опорной части, EJ — жесткость балки при изгибе.

Это значит, моменты на концах балки равны нулю, а поперечные силы определяются по закону Гука через жесткости упругих опорных частей.

Такие конструкции в балках используются для сейсмоизоляции и гашения колебаний зданий и сооружений.

7. Балка опирается нешарнирно на упругие опоры (есть угловая жесткость).

Граничные условия для такой системы будут

$$\text{при } x = 0, y''_i(0) = -\frac{k_0 y'_i(0)}{EJ}, y'''_i(0) = -\frac{C_0 y_i(0)}{EJ};$$

$$\text{при } x = l, y''_i(l) = -\frac{k_0 y'_i(l)}{EJ}, y'''_i(l) = -\frac{C_0 y_i(l)}{EJ};$$

где k_0 — угловая жесткость упругой опорной части.

Такие условия будут в балках, опорах мостов и в конструкциях зданий при сейсмоизоляции зданий и мостов с использованием резиновых и других упругих материалов.

8. Балка опирается на скользящие опоры которые дают возможности перемещения без поворота торцов балок на скользящем поясе.

Граничные условия для такой системы будут:

$$\text{при } x = 0, y'(0) = 0, y'''(0) = -\frac{fmg}{EJ};$$

$$\text{при } x = l, y'(l) = 0, y'''(l) = \frac{fmg}{EJ}.$$

где m — масса сооружения над скользящей опоры; g — ускорения свободного падения; f — коэффициент трения скользящего пояса.

Такие системы могут применяться при сейсмоизоляции опор мостов и фундаментов зданий и сооружений.

9. Балка опирается на скользящие опоры, которые дают возможности перемещения в двух направлениях.

Граничные условия для такой системы будут:

$$\text{при } x = 0, y''_i(0) = -\frac{f_y y'_i(0)}{EJ}, y'''(0) = -\frac{fmg}{EJ};$$

$$\text{при } x = l, y''_i(l) = \frac{f_y y'_i(l)}{EJ}, y'''(l) = \frac{fmg}{EJ};$$

где f_y — угловой коэффициент трения при повороте торца балки относительно вертикальной оси, проходящей через центр скользящего пояса. Такие системы используются для сейсмоизоляции зданий, мостов и других сооружений.

Следует отметить, что граничные условия балки или опоры используются для определения коэффициентов C, D, E, F в формулах (10-13), далее определяются собственные частоты и собственные формы колебания балки или опоры с различными закреплениями на концах. После этого разлагают заданную внешнюю нагрузку по формам свободных колебаний, решают соответствующие неоднородные дифференциальные уравнения, наконец получают движение системы как сумму нормальных ее составляющих. Внутренние усилия и напряжения в элементах сооружений легко определяется через перемещения колеблющейся системы.

Список литературы

1. Киселев В.А. Строительная механика [Текст] / В.А.Киселев. - М.: Стройиздат, 1980. - 610 с.
2. СНиП II – 7 – 81*. Строительство в сейсмических районах [Текст] . - М.: Стройиздат, 1992. - 32 с.
3. СНиП 20÷02:2009. Сейсмостойкое строительство. [Текст]. - Бишкек: 2009. - 48 с.
4. Карцивадзе Г.Н. Сейсмостойкость дорожных искусственных сооружений [Текст] / Г.Н.Карцивадзе. - М.: Транспорт, 1974. - 265 с.
5. Масленникова В.Н. Дифференциальное уравнение в частных производных [Текст] / В.Н.Масленникова. - М.: РУДН, 1997. - 447 с.