УДК 519.928

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОГРАНСЛОЙНЫХ ЛИНИЙ С ТОЧКАМИ ВЕТВЛЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

ФУНКЦИЯЛАРЫ АНАЛИТИКАЛЫК БОЛГОН СИНГУЛЯРДЫК ДҮҮЛҮККӨН КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН БУТАКТАНУУ ЧЕКИТТЕРИ БОЛГОН ЧЕК АРАЛЫК КАТМАРДЫК СЫЗЫКТАРДЫ, РЕГУЛЯРДЫК ЖАНА СИНГУЛЯРДЫК ОБЛАСТАРДЫ ТАБУУ.

Матанов Ш.М. – аспирант ЖАГУ.

Аннотации: На основе метода характеризующих функций построены погранслойные линии, регулярные и сингулярные области для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальныхуравнений с аналитическими функциями.

Мүнөздөөчү функциялар методун колдонуу аркылуу функциялары аналитикалык болгон кадимки сингулярдык дүүлүккөн дифференциалдык теңдемелер үчүн чек аралык катмардык сызыктар, регулярдык жана сингулярдык областар түзүлгөн.

Введение. В [2] на основе метода [1], получены условия для возникновения на плоскости изменения аргумента линии в форме петли, названной авторами “простирающимся пограничным слоем”.

В [3] показано, что такие линии естественно возникают для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений (с.в.у.) с аналитическими функциями, что можно рассматривать, как специфическое свойство таких уравнений.

Было предложено назвать их – погранслойными линиями (п.с.л.). В статьях [4], [5] предложены другие методы исследования. В [6] разработан алгаритм приближенного поиска погранслойных линий с точками ветвления для (с.в.у.) с аналитическими функциями.

Данная работа посвящена вычислению (п.с.л.) на основе методов предложенных в работах [4], [5].

Обозначения и понятия

1. $R = (-\infty, +\infty)$,

   $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость;
2. $Q(\Omega)$- пространство аналитических функций в области $\Omega \subset \mathbb{C}$;
3. $0 < \varepsilon$ – малый вещественный параметр;
4. $\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)z(t,\varepsilon) + \varepsilon\varphi\big(t, z(t,\varepsilon)\big)$, (1)

   $z(t,\varepsilon)$ −скалярная функция;

   где $t \in \Omega$; $a(t) \in Q(\Omega)$;

$\varphi\big(t, z(t,\varepsilon)\big) \in Q(H), H = \{(t,z) | t \in \Omega, |z| \le \delta - const\}$;

(1) – с.в.у. с аналитическими функциями.

Пусть существует решение $z(t,\varepsilon)$уравнения (1) удовлетворющее условию

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0, \qquad (2)$$

t_0 – внутреняя точка области Ω.

5. Определение 1. Если $|z(t_1,\varepsilon)|$ограничено при $\varepsilon \to 0$, то точка t_1называется регулярной для задачи (1)-(2), в противном случае – нерегулярной.

Определение 2. Точка, в любой окресности которой существуют как регулярные, так и нерегулярные точки, называется погранслой точкой.

Определение 3. Любое множество регулярных (погранслойных) точек называется регулярным (погранслойным) множеством.

Определение 4. Погранслойное множество, являющееся непрерывным, локально взаимно – однозначным образом отрезка, называется погранслойной линией.

Введем в рассмотрение функцию

$$F(t) - F(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)dc. \qquad (3)$$

Пологая$t = t_1 + i\, t_2$, где t_1, t_2 –действительные переменные, обозначим

$$F_1(t_1 t_2) = Re\big(F(t) - F(t_0)\big),$$
$$F_2(t_1 t_2) = Jm\big(F(t) - F(t_0)\big). \qquad (4)$$

Определение 5. Функции$F_к(t_1, t_2)(\kappa = 1,2)$ называются характеризующими функциями.

Постановка задачи и ее решение. Поставим задачу определения (П.С.Л.), (Ро), (Со) для решения задачи (1)-(2).

Длярешения поставленной задачи используем характеризующие функции[4,5].

Для простоты изложения в (1) будем считать $\varphi(t,z) \equiv 0$.

Тогда решение задачи (1)-(2) можно представить в виде

$$z(t,\varepsilon) = z^{\circ} e^{\frac{F(t)-F(t_0)}{\varepsilon}} \qquad (5)$$

Определение 6. Множество $\{(t_1, t_2)|G(t_{1,}t_2) = \tilde{c}\}$называется линией уровня функции $G(t_1, t_2)$.

Асимптотическое поведение функции (5) зависит от функций (4).

Пусть $t_{\circ} = t_{10} + it_{20}$.

Введем следующие обозначения

$\{(t_1, t_2)|F_1(t_1, t_2) - F_1(t_{10}, t_{20}) = 0\} = \{\tilde{c}_{\circ}\}$,

$\{(t_1, t_2)|F_2(t_1, t_2) - F_2(t_{10}, t_{20}) = 0\} = \{\tilde{\tilde{c}}_{\circ}\}$.

Пусть $\forall t \in \Omega: a(t) \neq 0$.

Из этого условия следует, что точки области Ω являются простыми для функции $a(t)$.

Тогда через любую точку области Ω проходит единственная линия уровня функций $F_{\kappa}(t_1, t_2)(\kappa = 1,2)$.

Рассмотрим линии уровня $\{\tilde{c}_{\circ}\}, \{\tilde{\tilde{c}}_{\circ}\}$ проходящие через точку (t_{10}, t_{20}).

Пусть $(t_1, t_2) \in \{\tilde{c}_{\circ}\}$, тогда функция (5) вдоль $\{\tilde{c}_{\circ}\}$ совершает быстрые колебания, но $|z| \leq |z^{0}|$. Согласно определению (1) все точки принадлежащие $\{\tilde{c}_{\circ}\}$ являются регулярными.

Известно, что функции $F_{\kappa}(t_1, t_2)$ в области Ω образуют гармоническую пару и линии уровня $\{\tilde{c}_{\circ}\}, \{\tilde{\tilde{c}}_{\circ}\}$ взаимно ортогональны в точке $(t_{10} t_{20})$.

По линии уровня$\{\tilde{\tilde{c}}_{\circ}\}$ функция $F_1(t_1, t_2)$ убывает, либо возрастает. Пусть вдоль $\{\tilde{\tilde{c}}_{\circ}\}$ (по определенному направлению) функция $F_1(t_1, t_2)$ возростает.

Если исходить из точки (t_{10}, t_{20}), то существуют две (противоположные) направления. По одной данная функция возрастает, а по другой убывает.

Часть $\{\tilde{\tilde{c}}_{\circ}\}$ по которой $F_1(t_1, t_2)$убывает обозначим $\{\tilde{\tilde{c}}_{\circ} -\}$, часть по которой $F_1(t_1, t_2)$ возростает обозначим $\{\tilde{\tilde{c}}_{\circ} +\}$.

$\forall t \in \{\tilde{\tilde{c}}_{\circ} -\}: \; F_1(t_1, t_2) - F_1(t_{10}, t_{20}) \leq 0; \; \forall t \in \{\tilde{\tilde{c}}_{\circ} +\}$:

$F_1(t_1, t_2) - F_1(t_{10}, t_{20}) \geq 0$, причем равенство имеет место только в точке (t_{10}, t_{20}).

Согласно определения 2 точка (t_{10}, t_{20}) погранслойная точка, а множесто $\{\tilde{\tilde{c}}_o\}$ погранслойная линия. Часть области Ω , разделенная линией $\{\tilde{\tilde{c}}_o\}$, регулярная, а другая часть сингулярная.

Если условие $a(t) \neq 0$ нарушается т.е если $a(to) = 0$, то это точка называется точкой ветвление погранслойной линии.

Если $a(t_0) = 0$ и $a^{(n+1)}(t_0) \neq 0$, то точка t_0 называется $2n$-кратного ветвления, так-как в этом случае из точки t_0будут исходить $2n$направленний погранслойных линий.

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. $a(t) = 3t^2 + 1, \quad t_0 = 0.$

$F(t) = \int_0^t (3\tau^2 + 1)d\tau = t^3 + t.$ Определим следующие функции.

$F_1(t_1, t_2) = Re[(t_1 + it_2)^3 + (t_1 + it_2)] = t_1^3 - 3t_1t_2^2 + t_1;$

$F_2(t_1, t_2) = 3t_1^2t_2 - t_2^3 + t_2.$

$F_1(t_1, t_2) = 0$ или $t_1(t_1^2 - 3t_2^2 + 1) = 0.$ Отсюда

$t_1 = 0$ или $t_1^2 - 3t_2^2 + 1 = 0.$ Из второго уравнения получим $t_2 = \pm\sqrt{\frac{t_1^2+1}{3}}.$

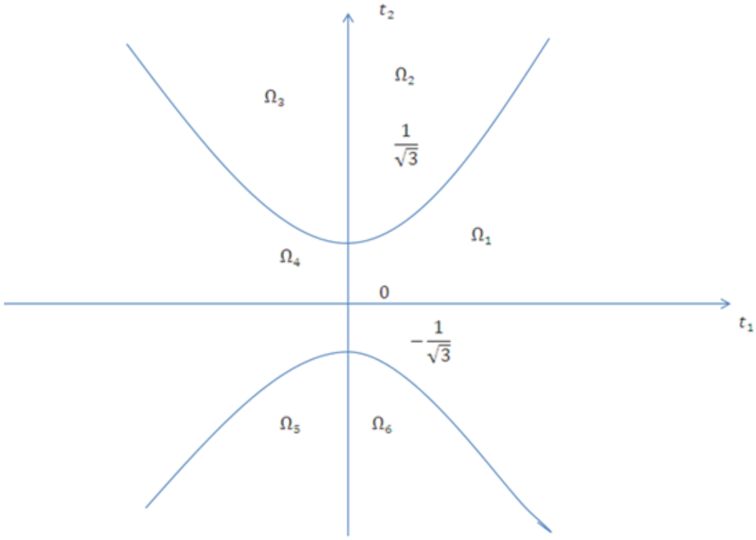

рис.1.

Линия уровня $ReF_1(t_1, t_2) = 0$разветвляется в точках $(t_1 = 0, t_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$и всю комплексную область делит на 6 частей (рис.1.).

$\Omega_2 \cup \Omega_4 \cup \Omega_6 - (PO), \ \Omega_1 \cup \Omega_3 \cup \Omega_5 - (CO).$

Если исходить из точки $t = 0$в направление возрастания t_2, то в точке $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ имеется три направления (п.с.л.)

Если будем двигатся из точки $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$, то получим четыре направления (п.с.л.)

Пример 2. $a(t) = e^{it}, \ t_0 = \frac{\pi}{2}, \ \Omega = \{(t_1, t_2) | 0 < t_1 < \pi, \ -\infty < t_2 < +\infty\}.$

Особенность ассматриваемой задачи заключается в том, что $a(t)$не имеет точек ветвления.

$$F(t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{i\tau} d\tau = -1 - ie^{it}$$

$F_1(t_1, t_2) = e^{-t_2} Sint_1 - 1 = 0.$

Отсюда имеем $t_2 = lnsint_1$.

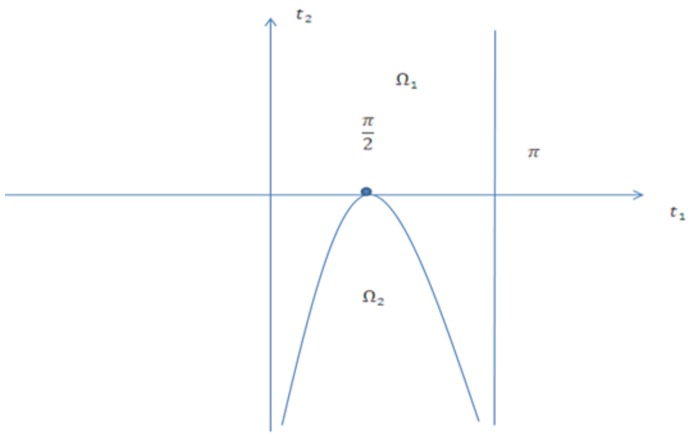

рис.2.

Линия уровня область Ωделит на две части Ω_1,Ω_2. $\Omega_1 - (po),\ a\ \Omega_2 - (Co)$.

Движение от точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$даёт две направления (п.с.л.)

Литературы:

1. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости //Вестник КГНУ. – Серия 3, Выпуск 6. – Бишкек, 2001. – С. 190-200.
2. Алыбаев К.С., Нарбаев М.Р. Явление простирающегося пограничного слоя для сингулярно возмущенных уравнений при потере устойчивости //Вестник ЖАГУ. – 2008, №1. – С. 122-126.
3. Панков П.С., Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б., Нарбаев М.Р. Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями //Вестник ОшГУ, 2013. - №1 (специальный выпуск). – С. 227-231.
4. Тампагаров К.Б. Метод характеризующих функций исследования асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексной плоскости //Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып.47. – Бишкек: Илим, 2014. – С. 98-102.
5. Alybaev K.S., Tampagarov K. Criterion of existence of boundary layer lines of regular and singular domains for singularly perturbed equations with analytical function //Abstracts of the Issyk-Kyl International Mathematical Forum (Kyrgyzstan, Bosteri, 24-27 June, 2015). Edited by Academician Altay BoruBaev. – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2015. – P. 32.
6. Панков П.С., Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б. Алгаритм приближенного поиска

погранслойных линий с точками ветвления для сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями //Доклады Национальной академии наук КР, 2015, №2. – 72с. ISSN 1694-7401 С.15-18.

Рецензент: Алыбаев К.С.–д.ф-м.н., профессор.