УДК 539.30

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ИЗОТРОПНОЙ И АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ОТ ДЕЙСТВИЯ НАГРУЗКИ С ТРЕУГОЛЬНОЙ ЭПЮРОЙ

Б. Жумабаев, А.А. Аманалиев, А.А. Ширяева

Определено и исследовано напряженно-деформированное состояние изотропной и анизотропной полуплоскостей под действием распределенной нагрузки с треугольной эпюрой.

Ключевые слова: упругая полуплоскость; комплексные потенциалы; граничные задачи; напряжения; деформация; нагрузка с треугольной эпюрой.

ISOTROPIC AND ANISOTROPIC STRESS DISTRIBUTION OF HALF-PLANE UNDER ACTION OF LOAD WITH A TRIANGULAR DIAGRAM

B. Zhumabaev, A.A. Amanaliev, A.A. Shiryaeva

It is defined and examined the stress-strain condition of isotropic and anisotropic half-planes under the action of distributed load with triangular diagram.

Keywords: elastic half-plane; complex potentials; boundary tasks; stress; strain; load with triangular diagram.

Массивы горных пород обладают ярко выраженной неоднородностью строения и изменчивостью физико-механических свойств. Постановка и решение граничных задач для нижнего полупространства имеет прямое отношение оценки напряженного состояния Земной коры [1].

Связь между напряжениями σ_x, σ_y, τ_{xy} и деформациями ε_x, ε_y, γ_{xy} для трансверсально-изотропного массива аналогична случаю изотропного тела [1, 2] и имеет следующий вид [3]:

$$\varepsilon_x = a_{1,1}\cdot\sigma_x + a_{1,2}\cdot\sigma_y + a_{1,3}\cdot\sigma_z;\ \gamma_{xy} = 2\left(a_{1,1} - a_{1,2}\right)\tau_{xy};$$

$$\varepsilon_y = a_{1,2}\cdot\sigma_x + a_{2,2}\cdot\sigma_y + a_{2,3}\cdot\sigma_z;\ \gamma_{zy} = a_{4,4}\tau_{yz}; \tag{1}$$

$$\varepsilon_z = a_{1,3}\cdot\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + a_{3,3}\cdot\sigma_z;\ \gamma_{xz} = a_{5,5}\tau_{xz}.$$

В этом случае количество независимых констант равно 5. Такое тело принято Лявьем и названо трансверсально-изотропным телом. По закону Гука для изотропного массива E, ν – две независимые константы.

Граничные условия для двумерного случая имеют вид:

$$\sigma_x\cos\left(n,x\right) + \tau_{xy}\cos\left(n,y\right) = X_n;\ \tau_{xy}\cos\left(n,x\right) + \sigma_y\cos\left(n,y\right) = Y_n. \tag{2}$$

На поверхности полупространства заданы внешние силы, которые действуют нормально и по касательной к дневной поверхности земли. Обозначим такие внешние силы N и T, которые направлены нормально и по касательной к границе полуплоскости. Для трансверсального массива разрешающий дифференциальный оператор имеет вид

$$L_4 = \beta_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2\beta_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial y\cdot\partial x^3} + \left(2\beta_{16} + \beta_{26}\right)\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\cdot\partial y^2} - 2\beta_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial x\cdot\partial y^3} + \beta_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}. \tag{3}$$

Корни характеристического уравнения этого дифференциального оператора находим с помощью программы МАТКАД [1]:

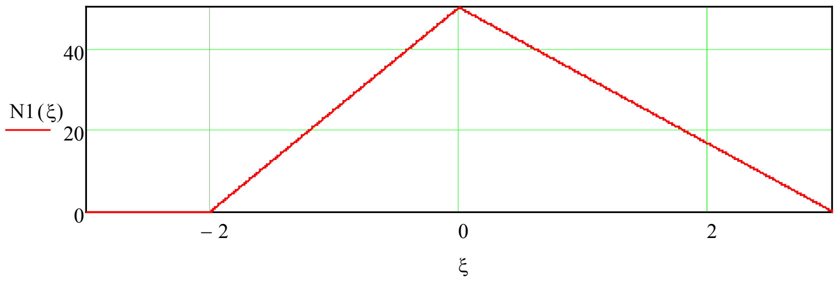


Рисунок 1 – Расчетная схема нагрузки для неравнобокой треугольной эпюры

$$\mu^4 + n\mu^2 + k^2;\ k = \sqrt{\frac{\frac{E_1}{E_2} - \nu_2^2}{1-\nu_1^2}};\ n = \sqrt{\frac{\frac{E_1}{G_2} - 2\nu_2\left(1+\nu_2\right)}{1-\nu_1^2} + 2k}. \tag{4}$$

Когда анизотропная среда испытывает плоское деформированное или плоское напряженное состояние, то по аналогии с методом Мусхелишвили [2], как это впервые было представлено С.Г. Лехницким [3], имеет место представление компонентов напряжений через комплексные потенциалы со сложными комплексными аргументами:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2}{\partial y^2}F; \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2}F; \qquad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}. \tag{5}$$

Положив корни характеристических уравнений в (4), найденных по аналогии с функций Мусхелишвили [2], С.Г. Лехницким [3] были введены функции обобщенных комплексных переменных $\Phi_1(z_1)$, $\Phi_2(z_2)$, аргументы которых образуются от обычных переменных x и y путём

$$x_k = x + \alpha_k y;\ \ y_k = \beta_k y.$$

Здесь α_k действительные и β_k – мнимые части корней характеристического уравнения. Причем из возможных четырех корней μ в [3] рекомендуется выбрать только те корни, у которых мнимые части имеют положительный знак. В рассмотренном ниже примере вычисленные значения первых двух корней отвечают этим требованиям.

Когда на контуре заданы внешние нагрузки (первая основная задача), формулируются следующие граничные задачи:

$$2\,\mathrm{Re}\left(\Phi_1 + \Phi_2\right) = \int_0^S N ds;\ 2\,\mathrm{Re}\left(\mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2\right) = \int_0^S -T ds. \tag{6}$$

После определения двух функций Φ_k (k = 1,2) вычисление компонентов напряжений особых затруднений не вызывает. Это обусловлено тем, что, во-первых, программный комплекс МАТКАД находит решение характеристических уравнений как аналитическими, так и численными методами; во-вторых, составление программ расчета полей напряжений без навыков программирования записывается аналогично записи алгебраических выражений школьной программы на странице экрана компьютера; в-третьих, разделение действительной части от мнимых выражений комплексных переменных выполняется в ПК более надёжно и без технических ошибок; в-четвертых, графическое оформление результатов расчета с помощью МАТКАД [4] является наиболее продвинутым разделом в области автоматизации проведения научных исследований.

Нормальные нагрузки N действуют на контур полуплоскости $y = 0$. Общие решения от действия распределенных нагрузок приведены в работах [2, 3] представлены через комплексные потенциалы Φ_1 и Φ_2. Для изотропного тела Φ_k имеются простые аргументы: $z(x, y) = x + iy$ и $\bar{z}\left(x, y\right) = x - iy$.

Нагрузка треугольная неравнобокая на контуре изотропной полуплоскости. Пусть L_1 – начало, а L_2 – конец возрастающей половины треугольной нагрузки; L_3 – начало, а L_4 – конец убывающей ветви треугольной нагрузки. Присвоим для конкретности (см. рисунок 1):

$$L_2 = 0; \quad L_1 = -2; \quad L_4 = 3,0; \quad L_3 = 0;$$

$$N_1(\xi)=\begin{vmatrix} nn\leftarrow 0 & if & (\xi<L_1\wedge\xi>L_4) \\ nn\leftarrow \dfrac{L_1-\xi}{L_1}p_0 & if & (L_1<\xi\le L_2) \\ nn\leftarrow \dfrac{L_4-\xi}{L_4}p_0 & if & (L_3<\xi\le L_4) \end{vmatrix}.$$

От действия нагрузки N_1 граничные задачи для комплексных потенциалов [2, 3] имеют следующий вид:

$$\Phi_1([x,y)=K_1\left\{\left[L_1-z(x,y)\right]\cdot\ln\left[\frac{L_2-z(x,y)}{L_1-z(x,y)}\right]+(L_1-L_2)\right\};$$

$$\Phi_{1p}([x,y)=K_1\left\{-\ln\left[\frac{L_2-z(x,y)}{L_1-z(x,y)}\right]+\left[L_1-z(x,y)\right]\cdot\left[\frac{-1}{L_2-z(x,y)}+\frac{1}{L_1-z(x,y)}\right]\right\};$$

$$\Phi_2([x,y)=K_2\left\{\left[L_4-z(x,y)\right]\cdot\ln\left[\frac{L_4-z(x,y)}{L_3-z(x,y)}\right]+(L_3-L_4)\right\};$$

$$\Phi_{2p}([x,y)=K_2\left\{-\ln\left[\frac{L_4-z(x,y)}{L_3-z(x,y)}\right]+\left[L_4-z(x,y)\right]\cdot\left[\frac{-1}{L_4-z(x,y)}+\frac{1}{L_3-z(x,y)}\right]\right\},$$

где $K_1=\dfrac{-P_0}{2\pi i(L_1-L_2)}$; $\quad K_2=\dfrac{-P_0}{2\pi i(L_4-L_3)}$;

$$\psi_1(x,y)=-z(x,y)\Phi_{1p}(x,y);\ \ \psi_2(x,y)=-z(x,y)\Phi_{2p}(x,y);\ \ \psi(x,y)=\psi_1(x,y)+\psi_2(x,y);$$

$$\Phi(x,y)=\Phi_1(x,y)+\Phi_2(x,y);\ \Phi_p(x,y)=\Phi_{1p}(x,y)+\Phi_{2p}(x,y);$$

$$S_1(x,y)=4\mathrm{Re}[\Phi(x,y)];\ S_2(x,y)=2\left[\overline{z(x,y)}\cdot\Phi_p(x,y)+\Psi(x,y)\right];\ S_3(x,y)=4\mathrm{Re}[S_2(x,y)];$$

$$\sigma_x(x,y)=\frac{S_1(x,y)-S_3(x,y)}{2};\ \ \sigma_y(x,y)=\frac{S_1(x,y)+S_3(x,y)}{2};\ \ \tau_{xy}(x,y)=\frac{\mathrm{Im}\left[S_2(x,y)\right]}{2}.$$

По закону Гука [2] для изотропного тела компоненты деформаций ε_x, ε_y, γ_{xy} вычисляются через напряжения:

$$\varepsilon_x(x,y)=\frac{\sigma_x(x,y)-\nu\sigma_y(x,y)}{E};\ \ \gamma_{xy}(x,y)=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}(x,y);\ \ \varepsilon_y(x,y)=\frac{\sigma_y(x,y)-\nu\sigma_x(x,y)}{E}.$$

Для выполнения расчетов принято E = 2,2·10^4 МПа, ν = 0,4. Для горизонтальных сечений при y = –0,01; –2; –3; –3,5 построены эпюры напряжений σ_x (рисунок 2), σ_y (рисунок 3), τ_{xy} (рисунок 4) и эпюры деформаций γ_{xy} (рисунок 5). На рисунках 6, 8, 10 представлены поверхности напряжений, а изолинии их распределений – на рисунках 7, 9, 11.

Для случая песчанистого сланцевого горного массива комплексные переменные имеют сложные аргументы: $z_1(x,y) = x + m_1 y$ и $z_2(x,y) = x + m_2 y$, где $m_1 = i\times 1{,}662$ и $m_2 = i\times 0{,}937$. Комплексные потенциалы определены с помощью общего решения в [3] и найдены для случая действия треугольной нагрузки (см. рисунок 1). Соотношения для найденных потенциалов имеют следующий вид:

$$\Phi_{01}(x,y)=r_1\left\{\left[L_1-z_1(x,y)\right]\cdot\ln\frac{L_2-z_1(x,y)}{L_1-z_1(x,y)}-(L_2-L_1)\right\};$$

$$\Phi_{02}(x,y)=r_2\left\{\left[L_4-z_1(x,y)\right]\cdot\ln\frac{L_4-z_1(x,y)}{L_3-z_1(x,y)}-(L_4-L_3)\right\};$$

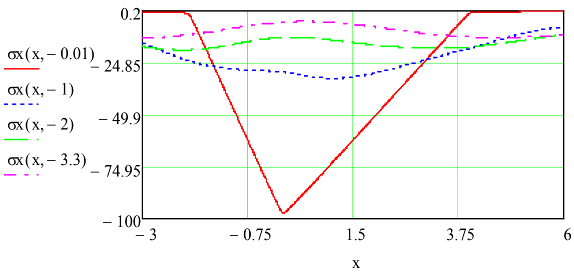


Рисунок 2 – Эпюра напряжений σ_x

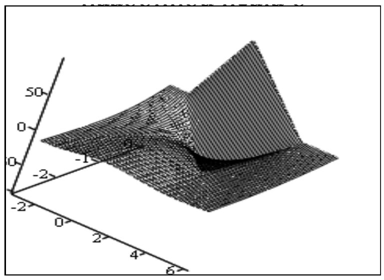


Рисунок 6 – Поверхность σ_x

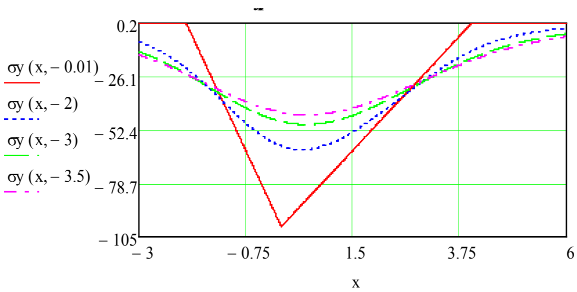


Рисунок 3 – Эпюра напряжений σ_y

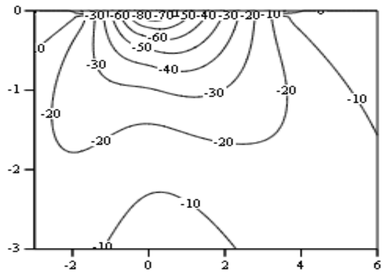


Рисунок 7 – Изолинии σ_x

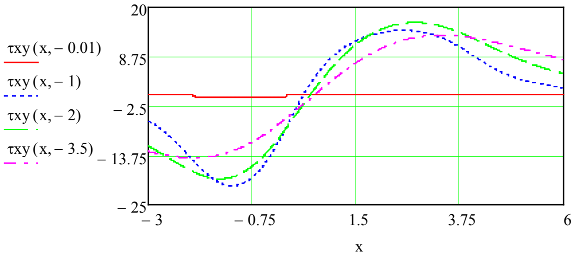


Рисунок 4 – Эпюра касательных напряжений

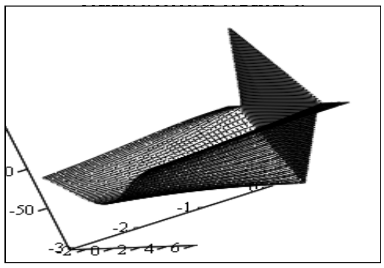


Рисунок 8 – Поверхность σ_y

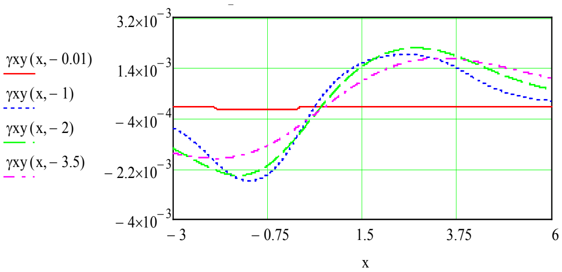
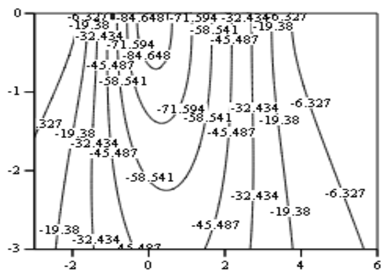


Рисунок 5 – Эпюра сдвиговых деформаций



Риунок 9 – Изолинии σ_y

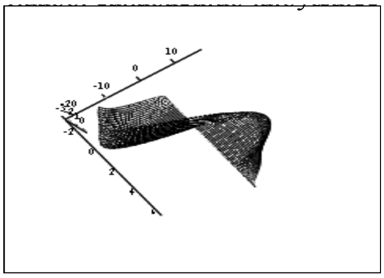


Рисунок 10 – Поверхность касательных напряжений

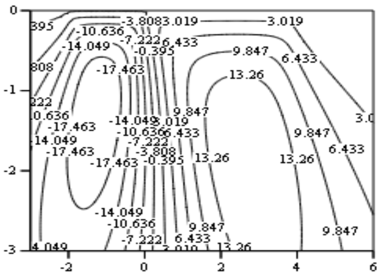


Рисунок 11 – Изолинии касательных напряжений

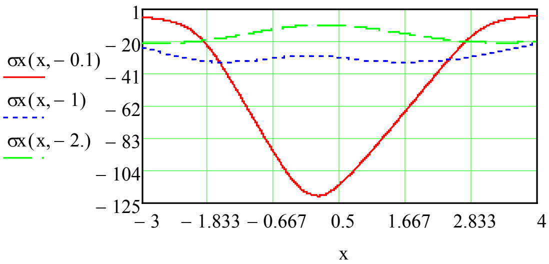


Рисунок 12 – Эпюры σ_x

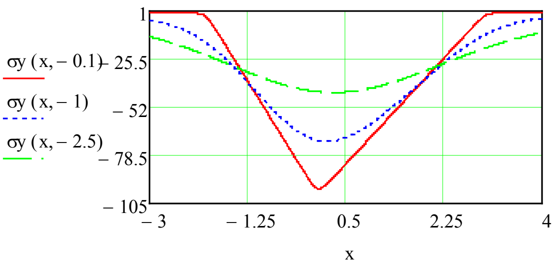


Рисунок 13 – Эпюры σ_y

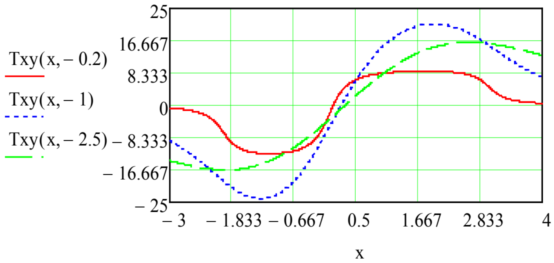


Рисунок 14 – Эпюры τ_{xy}

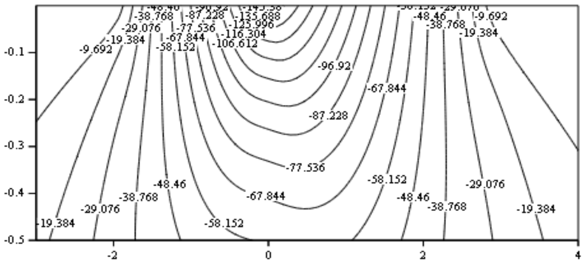


Рисунок 15 – Изолинии σ_x

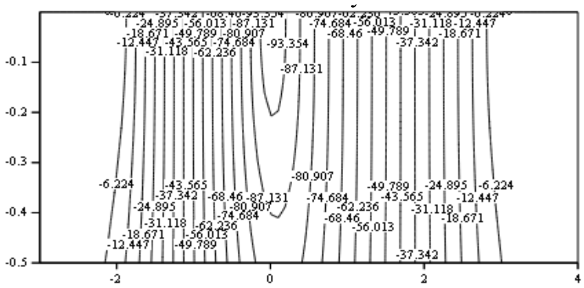


Рисунок 16 – Изолинии σ_y

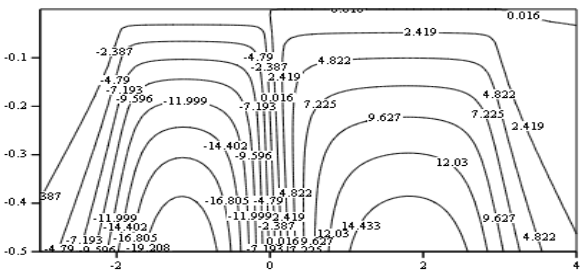


Рисунок 17 – Изолинии τ_{xy}

$$\Phi_{21}(x,y)=r_3\left\{\left[L_1-z_2(x,y)\right]\cdot\ln\frac{L_2-z_2(x,y)}{L_1-z_2(x,y)}-(L_2-L_1)\right\};$$

$$\Phi_{22}(x,y)=r_4\left\{\left[L_4-z_2(x,y)\right]\cdot\ln\frac{L_4-z_2(x,y)}{L_3-z_2(x,y)}-(L_4-L_3)\right\},$$

где $r_1=\frac{P_0\mu_2}{L_1}\Delta_0;\quad r_2=\frac{P_0\mu_2}{L_4}\Delta_0;\quad r_3=\frac{P_0\mu_1}{L_1}\Delta_0;\quad r_4=\frac{P_0\mu_1}{L_4}\Delta_0;\ \Delta_0=\frac{1}{2\pi i(\mu_1-\mu_2)}.$

$$\Phi_1(x,y)=\Phi_{01}(x,y)+\Phi_{02}(x,y);\ \ \Phi_2(x,y)=\Phi_{21}(x,y)+\Phi_{22}(x,y).$$

Компоненты напряжений определяются формулами:

$$\sigma_x(x,y)=2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1^2\Phi_1(x,y)+\mu_2^2\Phi_2(x,y)\right];$$

$$\sigma_y(x,y)=2\mathrm{Re}[\Phi_1(x,y)+\Phi_2(x,y)];$$

$$T_{xy}(x,y)=-2\mathrm{Re}[\mu_1\Phi_1(x,y)+\mu_2\Phi_2(x,y)].$$

На рисунках 12–14 построены эпюры компонентов напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} для полуплоскости, свойства которой являются песчанистым сланцем.

На рисунках 15–17 представлены закономерности распределения напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} в виде изолиний равных значений напряжений для анизотропной полуплоскости в окрестности загруженного участка контура полуплоскости.

Таким образом, дано аналитическое решение граничных задач для изотропной и анизотропной полуплоскости, когда на ее контуре действует распределенная нагрузка. Эпюры нагрузок имеют вид неравнобокого треугольника. Выполнены расчеты распределения напряжений и установлены закономерности распределения их напряжений в изотропной и анизотропной полупоскостях.

Построены эпюры распределения напряжений для различных глубин в горизонтальных сечениях полуплоскостей, которые указывают на правильность выполнения граничных условий полученных решений граничных задач.

Литература

1. *Жумабаев Б.Ж.* Распределение напряжений в массивах пород с гористым рельефом / Б.Ж. Жумабаев. Фрунзе: Илим, 1988. 190 с.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. М.: Наука, 1977. 416 с.
4. *Кирьянов Д.В.* Матсад 14 / Д.В. Кирьянов. СПб.: БХВ-Петербург. 704 с.