## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 519.633

# АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

**Омуралиев А.С.,** проф. док. 720044, Бишкек, проспект Мира, 56, Кыргызско-Турецкий университет “Манас”, e-mail: asan.omuraliev@mail.ru**,**
**Кожошова А. Ж.,** КГТУ им. И.Раззакова, 720044, г.Бишкек, пр. Мира 66, e-mail: mooriam@gmail.com

В данной статье, строится асимптотика решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения параболического типа, содержащего квадратичную нелинейность. С позиции метода регуляризации для сингулярно возмущенных задач впервые изучается нелинейное, сингулярно возмущенное уравнение.

**Ключевые слова:** Сингулярно возмущенная параболическая задача, асимптотика, метод регуляризации.

# ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS THE SINGULARLY PERTURBED PARABOLIC EQUATIONS WITH QUADRATIC NONLINEARITY.

**Omuralyev A. S., Prof.Dr**, Turkey University "Manas", 56 Mir avenue, 720044, Bishkek, Kyrgyzstan, e-mail: asan.omuraliev@mail.ru
**Kozhoshova A. Zh.,**KSTU named after I. Razzakov, 66 Mir avenue, 720044, Bishkek, Kyrgyzstan, e-mail: mooriam@gmail.om

In this thesis we construct an asymptotic solution of singularly perturbed differential equation of parabolic type containing quadratic nonlinearity. From the position of the regularization method of singularly perturbed problems the nonlinear singularly perturbed equation is being studied for the first time in this thesis.

**Keywords:** singularly perturbed parabolic problem, asymptotic behavior, regularization method.

## П.1. ВВЕДЕНИЕ

Асимптотическому решению сингулярно возмущенного линейного дифференциального уравнения параболического типа посвящены работы [1]-[3]. В данной работе, с позиции метода регуляризации для сингулярно возмущенных задач, впервые изучается нелинейное сингулярно возмущенное уравнение

$$L_\varepsilon \equiv \partial_t u - \varepsilon^2 a(x)\partial_x^2 u - u^2(x,t,\varepsilon) = 0, \qquad (x,t) \in \Omega$$
$$u|_{t=0} = h(x), \quad u|_{x=0} = 0, \tag{1}$$

когда малый параметр $\varepsilon \to 0$, здесь $\Omega = \{(x,t): x \in (0,\infty), t \in (0,T]\}$.

Задача (1) изучается при следующих приближениях:

1) существует гладкое решение задачи Коши для вырожденного уравнения $\partial_t V = V^2(x,t)$, $V(x,0) = h(x)$;
2) функция $a(x) > 0, \forall x \in [0,\infty)$ и $a(x) \in C^\infty[0,+\infty)$;
3) согласованы начальные и граничные условия $h(0) = 0$.

## П.2. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Для регуляризации сингулярно возмущенной задачи (1) введем регуляризующие функции

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}, \qquad \xi = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}, \qquad \varphi(x) = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{a(s)}} \tag{2}$$

и объявим их, наряду с переменными $(x,t)$, независимыми переменными расширенной функции $\tilde{u}(M,\varepsilon)$, $M = (x,t,\xi,\tau)$. Расширенная функция $\tilde{u}(M,\varepsilon)$ вводится так, чтобы ее сужение посредством регуляризующих функций совпало с искомой функцией

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\eta=\psi(x,t,\varepsilon)} \equiv u(x,t,\varepsilon), \quad \eta = (\tau,\xi), \quad \psi(x,t,\varepsilon) = \left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right). \tag{3}$$

С учётом (2), найдем из (3) производные

$$\partial_t u \equiv \left(\partial_t \tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon}\partial_\tau \tilde{u}\right)_{\eta=\psi(x,t,\varepsilon)}$$
$$\partial_x u = \left(\partial_x \tilde{u} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^3}}\varphi'(x)\partial_\xi \tilde{u}\right)_{\eta=\psi(x,t,\varepsilon)},$$

$$\partial_x^2 = \left(\partial_x^2 u + \left(\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varepsilon^3}}\right)^2 \partial_\xi^2 \tilde{u} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^3}} L_1 \tilde{u}\right)_{\eta=\psi(x,t,\varepsilon)},$$

$$L_1 = 2\varphi'(x)\partial_{x\xi}^2 + \varphi''(x)\partial_\xi \tag{4}$$

На основании (1), (3), (4) для расширенной функции $\tilde{u}(M,\varepsilon)$ поставим задачу:

$$\widetilde{L_\varepsilon}\tilde{u} \equiv \frac{1}{\varepsilon}\left(\partial_\tau \tilde{u} - \partial_\xi^2 \tilde{u}\right) - \sqrt{\varepsilon} L_\xi \tilde{u} - \tilde{u}^2(M,\varepsilon) + \partial_t \tilde{u} - \varepsilon^2 L_x \tilde{u} = 0$$

$$\tilde{u}|_{t=\tau=0} = h(x), \quad \tilde{u}|_{x=\xi=0} = 0 \tag{5}$$

$$L_\xi \equiv a(x)L_1, \ L_x = a(x)\partial_x^2$$

причем имеет место тождество

$$\widetilde{L_\varepsilon}\tilde{u}(\mathrm{M},\varepsilon)|_{\eta=\psi(x,\varepsilon)} \equiv L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon) \tag{6}$$

Расширенная задача (5) является регулярной по $\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$, поэтому решение этой задачи ищем в виде ряда

$$\tilde{u}(M,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^i u_i(M) \tag{7}$$

## П.3. ИТЕРАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Подставим ряд (7) в задачи (5) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$, при этом для коэффициентов получим следующие итерационные задачи:

$$Tu_0(M) \equiv \partial_\tau u_0 - \partial_\xi^2 u_0 = 0, \qquad Tu_1(M) = 0,$$

$$Tu_2(M) = u_0^2(M) - \partial_t u_0, \qquad Tu_3(M) = 2u_0 u_1(M) - \partial_t u_1 + L_\xi u_0, \tag{8}$$

$$Tu_i(M) = -\partial_t u_{i-2} + 2u_0(M)u_{i-2}(M) + P(u_1, \dots, u_{i-3}) + L_3 u_{i-3} + L_x u_{i-5}$$

$$u_0|_{t=\tau=0} = h(x), \qquad u_i|_{t=0} = 0 \ \forall\, i \geq 1, \quad u_i|_{x=0,\xi=0} = 0$$

Решением задачи (8) при $i = 0{,}1$ является

$$u_\nu(M) = V_\nu(x,t) + C_\nu(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad \nu = 0{,}1. \tag{9}$$

Непосредственно подставив эту функцию в уравнение (8) при $i = 0{,}1$, убеждаемся, что она удовлетворяет его. Краевые условия дают соотношения

$$V_0(x,0) = h(x), \quad V_1(x,0) = 0, \quad C_\nu(x,0) = C_\nu^0(x),$$

$$C_\nu(0,t) = -V_\nu(0,t), \qquad \nu = 0{,}1. \tag{10}$$

Так как

$$\lim_{\tau\to 0} erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) = 0,$$

то в качестве начальной функции для $\mathrm{C}_\nu(x,0)$ выбираем произвольную функцию $C_\nu^0(x)$.

Перейдем к следующему уравнению (8) при $i = 2$, правая часть этого уравнения, после подстановки (9), примет вид

$$F_2(M) = -\partial_t V_0 - \partial_t C_0(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) + V_0^2(x,t) +$$

$$+2V_0(x,t)C_0(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) + \left(C_0(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)\right)^2$$

Положим

$$\partial_t V_0(x,t) = V_0^2(x,t),$$

$$\partial_t C_0(x,t) = 2V_0(x,t)C_0(x,t), \tag{11}$$

тогда функция $F_2(M)$ примет вид

$$F_2(M) = \left(C_0(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)\right)^2$$

Согласно предположению 1) задачи (10), (11) разрешимы, из этих задач определим

$$V_0(x,t) \text{ и } C_0(x,t) = C_0^0(x)B(x,t), \quad B(x,t) = \exp(2\int_0^t V_0(x,s)ds)$$

Решением уравнения (8) при $i = 2$, с такой правой частью будет функция

$$u_2(M) = V_2(x,t) + \omega_2(M), \tag{12}$$

если $\omega_2(M)$ будет решением уравнения

$$\partial_\tau \omega_2 = \partial_\xi^2 \omega_2 + \left(C_0(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)\right)^2$$

Решением этого уравнения будет функция

$$\omega_2(M) = C_2(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) + \tag{13}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau}\int_0^{\infty}\left(C_0(x,t)\right)^2\frac{\left(erfc\left(\frac{y}{2\sqrt{\mu}}\right)\right)^2}{\sqrt{(\tau-\mu)}}\left[\exp\left(-\frac{(\xi-y)^2}{4(\tau-\mu)}\right)-\exp\left(-\frac{(\xi+y)^2}{y(\tau-\mu)}\right)\right]dyd\mu,$$

причем для нее справедлива оценка (см.[3])

$$|\omega_2(M)|<c\exp\left(-\frac{\xi^2}{8\tau}\right).$$

Удовлетворяя функцию (12), с учетом (13), краевым условием (8) при $i=2$ , получим

$$V_2(x,0)=0,\quad C_2(x,0)=C_2^0(x),\quad C_2(0,t)=-V_2(0,t), \tag{14}$$

здесь $C_2^0(x)$ − произвольная функция.

В следующем шаге итерационное уравнение (8) при $i=3$ имеет свободный член:

$$F_3(M)=2u_0(M)u_1(M)-\partial_t u_1(M)+L_\xi u_0(M)=$$

$$=2\left[V_0(x,t)++C_0(x,t)erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)\right]\left[V_1(x,t)+C_1(x,t)erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)\right]-$$
$$-\left[\partial_t V_1+\partial_t C_1(x,t)erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)\right]+$$
$$+a(x)[2\varphi'(x)\partial_x C_0(x,t)++\varphi''(x)C_0(x,t)]\partial_\xi\left(erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)\right).$$

Обеспечивая разрешимость уравнения (8) при $i=3$, положим

$$\begin{gathered}\partial_t V_1=2V_0(x,t)V_1(x,t),\\ \partial_t C_1(x,t)=2V_0(x,t)C_1(x,t)+V_1(x,t)C_0(x,t)\\ 2\varphi'(x)\partial_x C_0(x,t)+\varphi''(x)C_0(x,t)=0.\end{gathered} \tag{15}$$

Первое уравнение имеет тривиальное решение, так как оно решается при нулевом начальном условии. В силу того, что начальное условие для второго уравнения выражается через $V_1(x,t)$, то и второе уравнение также имеет нулевое решение. а поэтому получим $u_1(M)=0$.

Подставим значение $C_0(x,t)$ в третье уравнение

$$2\varphi'(x)\frac{dC_0^0}{dx}B(x,t)+\varphi''(x)\partial_x B(x,t)C_0^0(x)=0,$$

решая которое, при начальном условии

$$C_0^0(0)=-B^{-1}(0,t)V_0(0,t),$$

определим $C_0^0(x)$, а потом и $C_0(x,t)$.

На основании (15) свободный член $F_3(M)$ примет вид

$$F_3(M)=2C_0(x,t)C_1(x,t)\left(erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)\right)^2,$$

что обеспечивает существование решения уравнения (8) при $i=3$ в классе непрерывно дифференцируемых решений. Это решение представимо в виде (12), (13).

Далее, проводя аналогичное рассуждение, можно показать, что $u_3(M)=0$ и, вообще, коэффициенты ряда (7) с нечетными номерами $u_{2i+1}(M)=0$.

Продолжая данный процесс, найдем все коэффициенты частичной суммы

$$u_{\varepsilon,n}(M)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^n u_{2i}(M) \tag{16}$$

## П.4. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА

Сужение частичной суммы (16) посредством регуляризующей функции $\xi=\varphi(x)/\varepsilon$, на основании необходимого условия регуляризации (6), является формальным асимптотическим решением задачи (1).

Принимая во внимание (8) для функции $u_{\varepsilon,n}(M)$, получим задачу

$$\tilde{L}_\varepsilon u_{\varepsilon,n}(M)=f(x,t)+\varepsilon^{n+1}g_n(M), \tag{17}$$

где функция $g_n(M)$ равномерно ограничена по $\varepsilon$ и непрывна по $M$ в изучаемой области для любого $n=0,1,2,\ldots$. Производя сужение в (17), с учетом (6), получим задачу

$$L_\varepsilon u_{\varepsilon,n}\left(x,t,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right)=f(x,t)+\varepsilon^{n+1}g_n\left(x,t,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right),$$
$$u_{\varepsilon,n}\left(x,t,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right)|_{\,t=0}=h(x),\ \ u_{\varepsilon,n}\left(x,t,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right)|_{\,x=0}=0. \tag{18}$$

Исходя из задач (1), (18), для остаточного члена $R_n(x,t,\varepsilon) = u(x,t,\varepsilon) - u_{\varepsilon,n}\left(x,t,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right)$, получим задачу

$$L_\varepsilon R_n(x,t,\varepsilon) = -\varepsilon^{n+1} g_n\left(x,t,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right), R_n(x,t,\varepsilon)|_{\ t=0} = \ R_n(x,t,\varepsilon)\ |_{\ x=0} = 0.$$

В наших предположениях функция $g_n\left(x,t,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right)$ равномерно ограничена по ε и непрерывна по *x, t* в изучаемой области для любого *n=0,1,2,…*. Справедлива следующая теорема об оценке остаточного члена.

Теорема. *Пусть выполнены условия 1)-3). Тогда для достаточно малых ε>0 имеет место следующая оценка:*

$$|R_n(x,t,\varepsilon)| < c\ \varepsilon^{n+1}, \ \ \forall\ n = 0,1,2,\ldots$$

**Список литературы**

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.–Москва.: Наука, 1981- 400 с.
2. Омуралиев А.С. Регуляризация сингулярно возмущенных параболических задач. – Бишкек, 2005 – 151 с.
3. Омуралиев А.С. Регуляризация двумерной сингулярно возмущенной параболической задачи//Журн.вычисл. математ. и математ.физики.- 2006, т.46, N 8. С.1423-1432.

**References**

1. Lomov S. A. Vvedenie v obshuyu teoriyu singulyarnih vozmusheniy.-Moskva. : Nauka, 1981-400 s.
2. Omuraliyev A. S. Regulyarizasiya singulyarno vozmushennih parobolicheskih zadach. – Bishkek, 2005 – 151 s.
3. Omuraliyev A. S. Regulyarizasiya dvumernoi singulyarno vozmushennoi parabolicheskoi zadachi//Jurn.vichisl.matem. I matemat.fiziki.-2006, t.46, N 8. S.1423-1432.

УДК 532.517.4

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ОТКРЫТЫХ РАЗВЕТВЛЁННЫХ КАНАЛАХ

**Жайнаков Аманбек Жайнакович,** д.ф.-м.н, профессор, институт горного дела и горных технологий им. У.И.Асаналиева Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова, Кыргызстан, 714000, г. Бишкек, пр. Чуй - 216, e-mail: jainakov-41@mail.ru

**Калеева Анара Колбаевна,** старший преподаватель, Кызыл-Кийский гуманитарно-педагогический институт Баткенского государственного университета, Кыргызстан, 715200, г. Кызыл-Кия, ул. Дехканская - 1, e-mail: Kaleeva79@mail.ru

**Курбаналиев Абдикерим Ырысбаевич,** д.ф.-м.н, профессор, Кызыл-Кийский гуманитарно-педагогический институт Баткенского государственного университета, Кыргызстан, 715200, г. Кызыл-Кия, ул. Дехканская - 1, e-mail: kurbanaliev@rambler.ru

**Турганбаева Акпари Балтабаевна,** преподаватель, Ошский государственный педагогический институт, Кыргызстан, г. Ош, ул. Н. Исанова – 73, e-mail: turganbaeva@mail.ru

Течение вязкой жидкости в различных разветвленных сетях открытых каналов часто встречается во многих гидротехнических сооружениях. При этом динамика потока в области перехода от одного канала в другой является слишком сложной. По сравнению с экспериментом трехмерное численное моделирование может быть полезно для получения более полного представления о динамике потока, что весьма существенно при составлении различных гидротехнических проектов. В данной работе представлены результаты численного моделирования турбулентных течений в открытом разветвленном канале. Для моделирования использовался открытый пакет OpenFOAM. Сравнение результатов расчета с соответствующими экспериментальными данными свидетельствует об адекватности использованной математической модели.

**Ключевые слова:** Разветвленный открытый канал, трехмерное моделирование, турбулентность, метод конечных объемов, OpenFOAM.

## MODELING OF TURBULENT FLOWS IN OPEN CHANNEL JUCTIONS

**Jainakov A. J.,** d.f.-m.n., professor, institute of mining and mining technology named after U. Asanaliev under KSTU named after I. Razzakov, Kyrgyzstan, Bishkek, Chu prospect-216, e-mail: **jainakov-41@mail.ru**

**Kaleeva A. K.,** senior teacher, Kyzyl-Kiya humanitarian pedagogic institute under BatkenSt ate University, Kyrgyzstan, 715200, Kyzyl-Kiya town, Dehkanskaya-1, e-mail: Kaleeva79@mail.ru

**Kurbanaliev A.Y. ,** Dr., professor, Kyzyl-Kiya humanitarian pedagogic institute under Batken state university, Kyrgyzstan, 715200, Kyzyl-Kiya town, Dehkanskaya-1, e-mail: kurbanaliev@rambler.ru

**Turganbaeva Akpar Baltabaevna,** teacher, Osh state pedagogic institute, Kyrgyzstan, Osh town,N. Isanov - 73 , e-mail: turganbaeva@mail.ru