

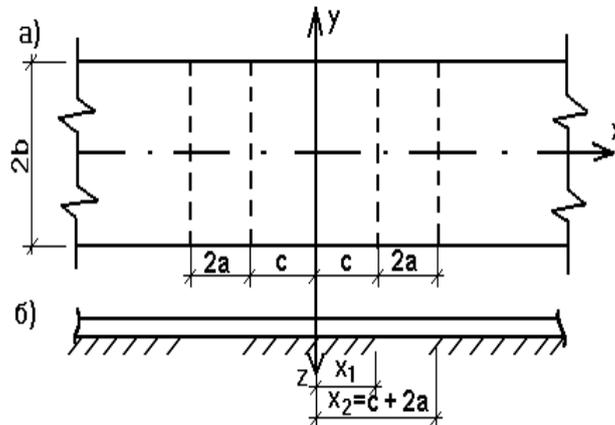
УДК.624.073.02 (575.2) (04)

**ИЗГИБ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ
С УЧЕТОМ НЕПОЛНОГО КОНТАКТА
С ОСНОВАНИЕМ В ВИДЕ ДВУХ ТРАНШЕЙ**

А.Т. Маруфий – канд. техн. наук

A problem of the curve of an infinite band on an elastic foundation with provision for partial contact with the foundation in a shape of two trenches is considered. The analytical decision for this problem was found due to generalized solutions and integrated transformation of Fourier.

В [1] приведена задача изгиба бесконечной полосы, лежащей на упругом основании с проемом в основании под полосой в виде одной траншеи, расположенной в центральной части полосы вдоль оси перпендикулярной продольной оси. Рассмотрим задачу изгиба бесконечной полосы на винклеровском упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде двух траншей, расположенных симметрично оси перпендикулярной продольной оси полосы (см. рисунок).



В этом случае дифференциальное уравнение относительно прогиба полосы $W(x,y)$, находящейся под действием произвольной нагрузки $q_0(x,y)$ имеет следующий вид:

$$D\nabla\nabla W(x,y) + K[\theta(x-c-2a)\theta(c-x)]W(x,y) = q(x,y), \tag{1}$$

где D – цилиндрическая жесткость плиты,
 K – коэффициент постели основания;
 $\theta(z)$ – функция Хевисайда;
 $2a$ – ширина траншей;
 $2b$ – ширина полосы;
 c – расстояние от оси Y до края траншей.

Переходя к безразмерным координатам и функциям [2], запишем уравнение (1):

$$\nabla\nabla W(x, y) + [\theta(x - c - 2a)\theta(c - x)]W(x, y) = q(x, y). \quad (2)$$

Правая часть уравнения (2) имеет следующий вид:

$$q(x, y) = \sum_{i=0}^2 q_i(x, y), \quad (3)$$

$$\text{где } q_i(x, y) = L_i(x, y)A_i(y)\delta(x - b) \quad (i=1,2) \quad (4)$$

На краях полосы при $y = \pm b$ должны удовлетворяться такие граничные условия: $L_i(x, \pm b) = 0$, $(i=1,2)$, где L_i – операторы, сопряженные операторам граничных условий, которые в случае свободного опирания полосы имеют вид:

$$L_1(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad L_2(x, y) = \frac{\partial^3}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2}. \quad (5)$$

Применив двойное cos-преобразование Фурье [3] к выражению (2), получим:

$$W(x, y) = W_\infty(x, y) + \frac{2}{\pi} \int_c^{c+2a} W(t, \lambda) \int_0^\infty K(x, \eta, t) \cos \eta y \cos \eta \lambda d\eta d\lambda dt + \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty A_2(\xi) \beta_{03}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi + \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty A_4(\xi) \beta_{04}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \beta_{03}(\xi, y, b) &= \lambda_{21}(\xi, y, b) + \nu \xi^2 \lambda_{01}(\xi, y, b), \\ \beta_{04}(\xi, y, b) &= \eta_{31}(\xi, y, b) + (2 - \nu) \xi^2 \eta_{32}(\xi, y, b), \\ \lambda_{21}(\xi, y, b) &= \frac{\pi}{4} \left\{ e^{-A(b-y)} [B \cos B(b-y) - A \sin B(b-y)] + \right. \\ &\quad \left. + e^{-A(b+y)} [B \cos B(b+y) - A \sin B(b+y)] \right\}, \\ \lambda_{01}(\xi, y, b) &= \frac{\pi}{4\sqrt{\eta^4 + 1}} \left\{ e^{-A(b-y)} [B \cos B(b-y) - A \sin B(b-y)] + \right. \\ &\quad \left. + e^{-A(b+y)} [B \cos B(b+y) + A \sin B(b+y)] \right\}, \\ \eta_{31}(\xi, y, b) &= \frac{\pi}{4} \left\{ e^{-A(b-y)} [\cos B(b-y) - \xi^2 \sin B(b-y)] + \right. \\ &\quad \left. + e^{-A(b+y)} [B \cos B(b+y) - \xi^2 \sin B(b+y)] \right\}, \\ \eta_{32}(\xi, y, b) &= \frac{\pi}{4} \left\{ e^{-A(b-y)} \sin(b-y) + e^{-A(b+y)} \sin B(b+y) \right\}, \\ A &= \sqrt{\frac{\sqrt{\eta^4 + 1} + \xi^2}{2}}, \quad B = \sqrt{\frac{\sqrt{\eta^4 + 1} - \xi^2}{2}} \end{aligned}$$

В интегральном уравнении (6) $W_\infty(x, y)$ представляет собой функцию прогиба бесконечной плиты, нагруженной заданной нагрузкой $q_0(x, y)$, а два интеграла с известными функциями $\beta_{03}(\xi, y, b)$, $\beta_{04}(\xi, y, b)$ и неизвестными пока плотностями нагрузок, приложенных на границах полосы $y = \pm b$ $A_1(\xi)$ и $A_2(\xi)$, которые определяются из удовлетворения граничным условиям при $y = \pm b$, т.е. $L_i(x, y)W(x, y)|_{y=b} = 0$

Ядро интегрального уравнения (6) имеет различный вид при $x > t$ и $x < t$

$$K(x, \eta, t) = [\varphi_1(\eta, x)\psi_1(\eta, t) + \varphi_2(\eta, x)\psi_2(\eta, t)] \frac{1}{\sqrt{\eta^4 + 1}} (x > t), \quad (7)$$

$$\varphi_1(\eta, x) = e^{-Ax} (B \cos Bx + A \sin Bx), \quad \psi_1(\eta, t) = ch \cdot At \cdot \cos Bt,$$

$$\varphi_2(\eta, x) = e^{-Ax} (B \cos Bx - A \sin Bx), \quad \psi_2(\eta, t) = sh \cdot At \cdot \sin Bt,$$

$$K(x, \eta, t) = [\varphi_1(\eta, t)\psi_1(\eta, x) + \varphi_2(\eta, t)\psi_2(\eta, x)] \frac{1}{\sqrt{\eta^4 + 1}} (x \leq t). \quad (8)$$

Для определения коэффициентов $A_i(\xi)$ потребуются выражения для изгибающих моментов и поперечных сил в площадке полосы, нормаль к которой параллельна оси x . Воспользовавшись (6), можем получить эти выражения.

$$M_y(x, y) = M_{\infty y}(x, y) + \frac{2c+2a}{\pi} \int_c^\infty W(t, \lambda) \int_0^\infty K_{M_y}(x, \eta, t) \cos \eta y \cos \eta \lambda d\eta d\lambda dt - \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty A_1(\xi) \beta_{53}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi - \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty A_2(\xi) \beta_{54}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi \quad (9)$$

$$N_y(x, y) = N_{\infty y}(x, y) - \frac{2c+2a}{\pi} \int_c^\infty W(t, \lambda) \int_0^\infty K_{N_y}(x, \eta, t) \sin \eta y \cos \eta \lambda d\eta d\lambda dt + \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty A_1(\xi) \beta_{73}(\xi, y, b) \sin \xi x d\xi + \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty A_2(\xi) \beta_{74}(\xi, y, b) \sin \xi x d\xi \quad (10)$$

Входящие в эти формулы функции $\beta(\xi, y, b)$ и $K(x, \eta, t)$ могут быть представлены в явном виде:

$$\beta_{53}(\xi, y, b) = 2(1-\nu)\xi^2 \lambda_{21}(\xi, y, b) + [1 + (1-\nu^2)\xi^4] \lambda_{01}(\xi, y, b),$$

$$\beta_{54}(\xi, y, b) = [1 + (1-\nu^2)\xi^4] \eta_{11}(\xi, y, b),$$

$$\beta_{73}(\xi, y, b) = [(1-\nu^2)\xi^4 + 1] \lambda_{11}(\xi, y, b),$$

$$\beta_{74}(\xi, y, b) = [(1-\nu^2)\xi^4 + 1] \eta_{21}(\xi, y, b) + 2(1-\nu)\xi^2(\xi^4 + 1)\eta_{01}(\xi, y, b),$$

$$\eta_{11}(\xi, y, b) = \frac{\pi}{4} \left\{ e^{-A(b-y)} \sin B(b-y) + e^{-A(b+y)} \sin B(b+y) \right\},$$

$$\lambda_{11}(\xi, y, b) = \frac{\pi}{4} \left\{ e^{-A(b-y)} \sin B(b-y) + e^{-A(b+y)} \sin B(b+y) \right\},$$

$$\eta_{21}(\xi, y, b) = \frac{\pi}{4} \left\{ e^{-A(b-y)} [B \cos B(b-y) - A \sin B(b-y)] - e^{-A(b+y)} [B \cos B(b+y) - A \sin B(b+y)] \right\},$$

$$\eta_{31}(\xi, y, b) = \frac{\pi}{4} \left\{ e^{-A(b-y)} [\cos B(b-y) - \xi^2 \sin B(b-y)] + e^{-A(b+y)} [\cos B(b+y) - \xi^2 \sin B(b+y)] \right\},$$

Аналогично можно представить в явном виде и другие функции.

$$K_{My}(\eta, x, t) = T_2(\eta, x, t) + \nu \eta^2 T_0(\eta, x, t),$$

где

$$T_2(\eta, x, t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ e^{-A(U)} (B \cos BU - A \sin BU) + e^{-A(\nu)} (B \cos B\nu - A \sin B\nu) \right\},$$

$$K_{Ny}(\eta, x, t) = \eta^3 T_0(\eta, x, t) + (2 - \nu) T_2(\eta, x, t)$$

Используя граничные условия на краях полосы при $y = \pm b$

$$M_y(x, b) = 0, \quad N_y(x, b) = 0,$$

получим из выражений (9 и 10) систему уравнений для определения $A_i(\xi)$

$$A_1(\xi) \beta_{53}(\xi, b, b) + A_2(\xi) \beta_{54}(\xi, b, b) = f_1(\xi, b),$$

$$A_1(\xi) \beta_{73}(\xi, b, b) + A_2(\xi) \beta_{74}(\xi, b, b) = f_2(\xi, b). \quad (11)$$

Здесь

$$f_1(\xi, b) = 2\pi \int_0^\infty M_{y\infty}(x, b) \cos \xi x dx + \int_0^{c+2a} W(t, \eta) \int_0^\infty \frac{(\eta^2 + \nu t^2) \cos \xi t}{(t^2 + \eta^2)^2 + 1} \cos \eta b d\eta dt$$

$$f_2(\xi, b) = 2\pi \int_0^\infty N_{y\infty}(x, b) \cos \xi x dx - \int_0^{c+2a} W(t, \eta) \int_0^\infty \frac{[\eta^3 + (2 - \nu)\eta t^2] \cos \xi t \sin \eta b}{(t^2 + \eta^2)^2 + 1} d\eta dt$$

Из системы (11) определяются коэффициенты $A_i(\xi)$

$$A_1(\xi) = [f_1(\xi)\beta_{73}(\xi, b, b) - f_2(\xi)\beta_{54}(\xi, b, b)][\beta_{53}(\xi, b, b)\beta_{74}(\xi, b, b) - \beta_{73}(\xi, b, b)\beta_{54}(\xi, b, b)]^{-1}$$

$$A_2(\xi) = [f_2(\xi)\beta_{53}(\xi, b, b) - f_1(\xi)\beta_{74}(\xi, b, b)][\beta_{53}(\xi, b, b)\beta_{74}(\xi, b, b) - \beta_{73}(\xi, b, b)\beta_{54}(\xi, b, b)]^{-1}$$

Продифференцировав формулу прогиба (6), получим выражения изгибающих моментов и поперечных сил.

$$M_x(x, y) = M_{\infty x}(x, y) + \frac{2c+2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{W(t, \lambda)}{c} \int_0^{\infty} K_{Mx}(x, \eta, t) \cos \eta y \cos \eta \lambda d\eta d\lambda dt - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_3(\xi) \beta_{43}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_4(\xi) \beta_{44}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi \quad (12)$$

$$M_y(x, y) = M_{\infty y}(x, y) + \frac{2c+2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{W(t, \lambda)}{c} \int_0^{\infty} K_{My}(x, \eta, t) \cos \eta y \cos \eta \lambda d\eta d\lambda dt - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_3(\xi) \beta_{53}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_4(\xi) \beta_{54}(\xi, y, b) \cos \xi x d\xi \quad (13)$$

$$N_x(x, y) = N_{\infty x}(x, y) - \frac{2c+2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{W(t, \lambda)}{c} \int_0^{\infty} K_{Nx}(x, \eta, t) \cos \eta y \cos \eta \lambda d\eta d\lambda dt + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_3(\xi) \beta_{63}(\xi, y, b) \sin \xi x d\xi + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_4(\xi) \beta_{64}(\xi, y, b) \sin \xi x d\xi \quad (14)$$

$$N_y(x, y) = N_{\infty y}(x, y) - \frac{2c+2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{W(t, \lambda)}{c} \int_0^{\infty} K_{Ny}(x, \eta, t) \sin \eta y \cos \eta \lambda d\eta d\lambda dt + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_3(\xi) \beta_{73}(\xi, y, b) \sin \xi x d\xi + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_4(\xi) \beta_{74}(\xi, y, b) \sin \xi x d\xi \quad (15)$$

Таким образом, получено точное аналитическое решение задачи об изгибе бесконечной полосы на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде двух траншей, расположенных симметрично оси перпендикулярной продольной оси полосы.

Литература

1. Маруфий А.Т. Изгиб бесконечной полосы, лежащей на упругом основании с проемом в основании под полосой // Научн. вестн. ФерГУ. – 1996. – №2. – С.44–48.
2. Травуш В.И. Метод обобщенных решений в задачах изгиба плит на линейно-деформируемом основании // Строительная механика и расчет сооружений. – 1982. – №1.
3. Корнев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Физматгиз, 1971.