

ЭФФЕКТ ТАЛЬБОТА ДЛЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Макалада жалпак жарыш айнек пластинка тибиндеги фазалык чөйрөдө Тальбот эффектиси каралган. Жалпак жарыш айнек пластинкадан, кийин жарык талаасынын жана өздүк репродукция тегиздигинин бөлүштүрүлүшү эсептелген. Өздүк репродукциянын тегиздиги узунунан жана туурасынан болгон багыттарында жылышаары к өрсөтүлгөн.

В статье рассмотрен эффект Тальбота для фазовой среды типа плоскопараллельная пластина. Сделан расчет распределения светового поля и плоскостей саморепродукции за плоскопараллельной пластиной. Показано, что плоскости саморепродукции смещаются как в продольном, так и в поперечном направлениях.

Talbot effect for phase medium as the parallel plate is considered in the paper. Distribution of light field and self-reproductions after plate were calculated. It was shown that self-reproductions are displaced both in transversal and longitudinal directions.

Возможность использования явления возникновения саморепродукций решетки на расстояниях, кратных постоянной Тальбота, $z_T = 2d^2 / \lambda$ для интерферометрического исследования фазовых объектов впервые была рассмотрена А.Ломаном и Д.Сильвой [1]. Рассмотрим простейший случай использования одномерной линейной решетки, коэффициент пропускания которой равен:

$$t(x_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi x_0 n/d), \quad (1)$$

где d – период решетки. Решетка расположена в плоскости, перпендикулярной оси OZ . Координаты точек решетки в общем случае определяются переменными X_0 и Y_0 . Если же расположить решетку таким образом, чтобы ее линии были параллельны оси OY , то ее коэффициент пропускания является функцией одной переменной X_0 . Фазовый объект расположен в плоскости (X_1, Y_1) на некотором расстоянии Z_1 от плоскости решетки (рис. 1). Освещаем решетку плоской волной, распространяющейся вдоль оси Z и имеющей единичную амплитуду $U(x_0, y_0, z_0^-) = \exp(jkz_0^-)$. Считая $z_0 = 0$, т.е. решетка помещена в начале координат, получаем $U(x_0, y_0, z_0^-) = 1$.

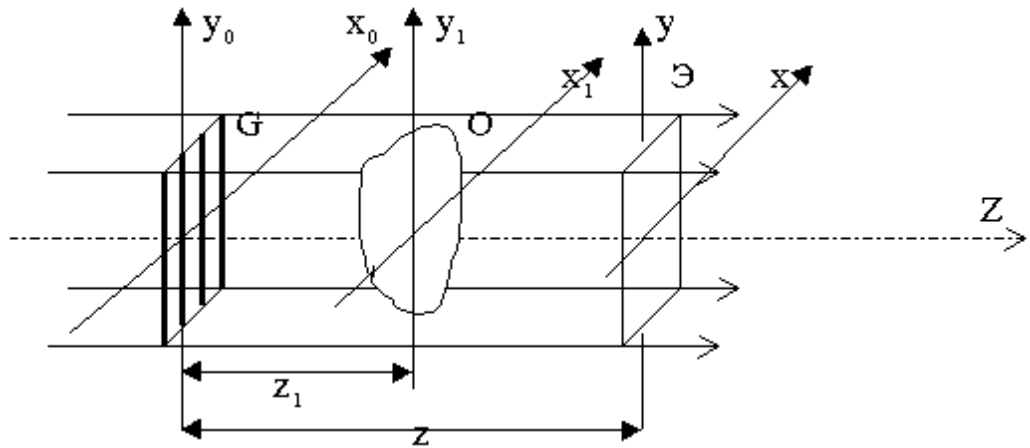


Рис. 1. Схема получения интерферограммы Тальбота

Поле сразу за решеткой

$$U(x_0, y_0, z_0^+) = U(x_0, y_0, z_0^-) t(x_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi x_0 n/d).$$

(2)

Затем излучение распространяется в свободном пространстве и проходит через оптически неоднородную среду, расположенную на расстоянии Z_1 от плоскости решетки.

Поле непосредственно перед объектом:

$$U(x_1, y_1, z_1^-) = \frac{1}{2} \exp(jkz_1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp[j2\pi (x_1 n/d - \frac{n^2 \lambda z_1}{2d^2})]$$

(3)

Поле, прошедшее сквозь фазовый объект, непосредственно за этим объектом имеет вид /2/:

$$U(x_1, y_1, z_1^+) = \frac{1}{2} \exp(jkz_1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n U_0(x_1, y_1) \exp[j2\pi (x_1 n/d - \frac{n^2 \lambda z_1}{2d^2})],$$

(4)

где $U_0(x_1, y_1)$ – двумерный фазовый объект. Для чисто фазового объекта

$$U_0(x_1, y_1) = \exp[j\phi(x, y)],$$

(5)

т.е. распределение поля сразу за объектом будет иметь вид:

$$U(x_1, y_1, z_1^+) = \frac{1}{2} \exp(jkz_1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp[j\phi(x_1, y_1)] \exp[j2\pi (x_1 n/d - \frac{n^2 \lambda z_1}{2d^2})].$$

(6)

Измененное объектом распределение интенсивности, полученное согласно схеме на рис. 1, содержит информацию об искажениях волнового фронта в среде и, по существу, является многолучевой интерферограммой, в которой интерферируют пространственные гармоники, просвечивающие объект под разными углами. Измеряемой величиной в каждом случае является распределение поля освещающего излучения сразу после объекта. При этом, если объект «тонкий» (оптическая толщина мала по сравнению с базой измерения – расстоянием между объектом и плоскостью регистрации), то от измеренных искажений волнового фронта на выходе из объекта можно перейти к искажениям среды, например к неровности поверхности пластин (зная показатель преломления).

В общем случае функция фазовых искажений $\varphi(x_1, y_1)$ может быть найдена путем решения обратной задачи о восстановлении распределения фазы по известному распределению интенсивности /3/.

Пусть $U(x_1, y_1, z_1^-)$ – распределение поля в плоскости объекта $Z = z_1$. Тогда сразу за объектом распределение будет равно, согласно (6),

$$U(x_1, y_1, z_1^-) \exp[j\varphi(x_1, y_1)]. \quad (7)$$

Из измерения интенсивности в плоскости наблюдения находится модуль распределения поля $|U(x_2, y_2, z_2)|$, где z_2 – плоскость наблюдения. Функцию $\varphi(x_1, y_1)$ получают методом последовательных приближений. Поле $U(x_1, y_1, z)$ можно представить как преобразование Френеля функции $U(x_1, y_1, z_1^+)$, или преобразование Фурье функции:

$$U(x_1, y_1, z_1^+) \exp\left[\frac{jk}{2(z_2 - z_1)}(x_1^2 + y_1^2)\right],$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число.

Пусть $\varphi_0(x_1, y_1)$ – нулевое приближение искомой функции фазовых искажений объекта. В простейшем случае в качестве нулевого приближения можно взять $\varphi_0(x_1, y_1) = \text{const}$. Теперь для распределения поля в плоскости наблюдения мы можем написать соотношение:

$$U_0(x_2, y_2, z_2) = \frac{1}{j\lambda(z_2 - z_1)} \exp\left[j\frac{k}{2(z_2 - z_1)}(x_2^2 + y_2^2)\right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1, z_1^+) \times \\ \times \exp[j\varphi_0(x_1, y_1)] \exp\left[j\frac{k}{2(z_2 - z_1)}(x_1^2 + y_1^2)\right] \exp\left[j\frac{k}{2(z_2 - z_1)}(x_1 x_2 + y_1 y_2)\right] dx_1 dy_1. \quad (8)$$

Оставив фазовый множитель в $U_0(x_2, y_2, z_2)$, заменим амплитудную часть на $|U(x_2, y_2, z_2)|$ и обратным преобразованием Френеля найдем

$U_1(x_1, y_1, z_1) \exp[j\varphi_1(x_1, y_1)]$. Полученный фазовый множитель $\varphi_1(x_1, y_1)$ подставляем в (8). Этот цикл повторяем до получения стационарного решения $\varphi_n(x_1, y_1) \approx \varphi_{n+1}(x_1, y_1)$, где n – номер итерации. Количество шагов n зависит от того, насколько близко выбрано $\varphi_0(x_1, y_1)$ к реальному значению $\varphi(x_1, y_1)$. В методе тальбот-интерферометрии в интерференции участвуют $2M+1$ гармоник, где M определяется соотношением $|M| \leq |L| \approx (d/\lambda)(\lambda/25z)^{0.25}$. Количество точек измерения определяется параметром $(4aM/d)^2 \approx 10^4 \div 10^6$ ($\frac{d}{2M}$ – размер мельчайшей структуры в плоскости регистрации, a – апертура решетки, d – период решетки), и задача нахождения $\varphi(x_1, y_1)$ описанным алгоритмом является очень длительной и трудоемкой. С другой стороны, сложные оптические неоднородности в среде могут быть представлены совокупностью пространственно-распределенных элементарных фазовых искажений типа плоскопараллельной пластины, оптического клина, линзы. Рассмотрим влияние таких неоднородностей в отдельности на распределение поля за решеткой. Рассчитаем фазовые искажения m -й гармоники при прохождении ее через плоскопараллельную пластину толщиной ℓ с показателем преломления n , расположенную под углом α к оси OZ .

m -я гармоника, возникающая после разложения световой волны на спектр плоских волн и падающая на решетку G , распространяется в направлении, определяемом углом φ . Угол φ – это угол между направлением m -й гармоники и осью OZ и равен он, согласно условию максимума при дифракции на решетке с периодом d волны длиной λ , $\varphi = \arcsin \frac{m\lambda}{d}$. Согласно рис. 2 волна, соответствующая m -й гармонике, в отсутствии плоскопараллельной пластины распространяется вдоль прямой AM' , а в присутствии пластины – вдоль ломаной $ACKM$. Согласно рис. 2, угол падения луча на плоскость пластины равен $\varphi + \alpha$, угол преломления равен β . В соответствии с законом преломления света на границе двух сред:

$$\sin\beta = \frac{\sin(\varphi + \alpha)}{n}.$$

(9)

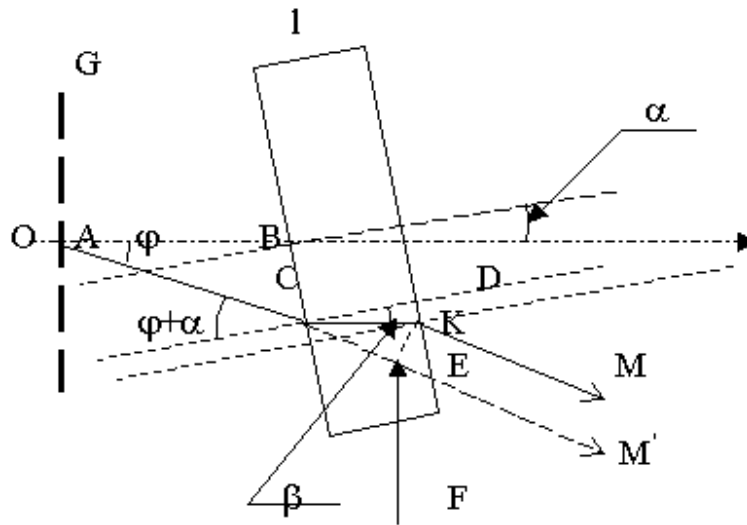


Рис. 2. Схема возникновения оптических искажений при прохождении световой волны сквозь плоскопараллельную пластину

Оптическая разность хода, возникающая после помещения на пути луча плоскопараллельной пластины равна, согласно рис 2:

$$\Delta S = nCK - CF;$$

(10)

$$CK = \frac{\ell}{\cos\beta}; \quad CF = \frac{\ell}{\cos\beta} \cos(\varphi + \alpha - \beta).$$

(11)

Отсюда, подставляя в (10) значения CK и CF, получаем:

$$\Delta S = \frac{n\ell}{\cos\beta} - \frac{\ell}{\cos\beta} \cos(\varphi + \alpha - \beta).$$

(12)

Фазовые искажения для m-ой гармоники равны:

$$\varphi_p = k\Delta S = \frac{k\ell}{\cos\beta} [n - \cos(\varphi + \alpha - \beta)].$$

(13) Рассмотрим φ_p в приближении малых углов, т.е. углы φ, α, β малы. Для малых β

$\cos\beta \approx 1$. Преобразуем $\cos(\varphi + \alpha - \beta)$.

$$\cos(\varphi + \alpha - \beta) = \cos(\varphi + \alpha)\cos\beta + \sin(\varphi + \alpha)\sin\beta.$$

$$\text{Разложим в ряд } \cos(\varphi + \alpha) = 1 - \frac{(\varphi + \alpha)^2}{2!} + \frac{(\varphi + \alpha)^4}{4!} - \frac{(\varphi + \alpha)^6}{6!} + \dots$$

При малых φ и α в разложении можно оставить два первых члена

$$\cos(\varphi + \alpha) \approx 1 - \frac{(\varphi + \alpha)^2}{2}, \quad \sin(\varphi + \alpha) = (\varphi + \alpha) - \frac{(\varphi + \alpha)^3}{3!} + \frac{(\varphi + \alpha)^5}{5!} - \dots$$

Оставим в разложении $\sin$ только первый член $\sin(\varphi + \alpha) \approx \varphi + \alpha$.

$$\text{Учтя (9) и то, что при малых } \beta \quad \cos\beta \approx 1, \text{ получим } \cos(\varphi + \alpha - \beta) \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{(\varphi + \alpha)^2}{n}.$$

Окончательно выражение (13) преобразуется к виду

$$\varphi_p = k\ell \left[n - 1 + \frac{1}{2}(\varphi + \alpha)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right]$$

(14)

Поле на расстоянии z от плоскости решетки будем искать согласно интегралу (8):

$$U(x, y, z) = \frac{1}{j\lambda(z - z_1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int U(x_1, y_1, z_1^+) C(x_0, y_0) \exp(j\varphi_p) \times \\ \times \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda(z - z_1)} [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]\right\} dx_1 dy_1,$$

(15) где $C(x_0, y_0)$ – апертура решетки, задаваемая условиями

$$1 \quad \text{при } |x_0| \leq a, |y_0| \leq a, \quad C(x_0, y_0) = 0 \quad \text{при } |x_0| > a, |y_0| > a,$$

где $2a$ – апертура решетки, (x_0, y_0) – координаты плоскости решетки, $U(x_1, y_1, z_1^+)$ берем из (6).

$$U(x, y, z) = \frac{1}{j\lambda(z - z_1)} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{1}{2} \exp[jk(z - z_1)] \times \\ \times \sum_{m=-M}^M c_m \exp\left\{jk\ell \left[n - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m\lambda}{d} + \alpha\right)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]\right\} \exp\left[j2\pi \left(\frac{x_1 m}{d} - \frac{m^2 \lambda z_1}{2d^2}\right)\right] \times \\ \times \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda(z - z_1)} [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]\right\} dx_1 dy_1,$$

(16)

где M берем в соответствии с указанным выше неравенством.

Выразим (16) через преобразование Фурье, причем координату положения объекта Z_1 примем равной 0, что не меняет общности рассуждений

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2j\lambda z} \exp\left\{jk\left[z + \ell \left[(n - 1) + \frac{\alpha^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]\right]\right\} \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right] \times \\ \times \sum_{m=-M}^M c_m \exp\left[jk\ell \left(\frac{1}{2} \frac{m^2 \lambda^2}{d^2} + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] \times$$

$$\times \int_{-a}^a \int_{-a}^a \exp(j2\pi x_1 m/d) \exp[j \frac{\pi}{\lambda z} (x_1^2 + y_1^2)] \times \\ \times \exp[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_1 x + y_1 y)] dx_1 dy_1.$$

(17)

Проинтегрировав выражение (17), получим:

$$U_p(x, y, z) = \frac{1}{2\lambda z} \exp\{jk[z + \ell(n-1) + \frac{\alpha^2}{2}(1 - \frac{1}{n})]\} \sum_{m=-M}^M c_m \exp\{2\pi j[\frac{m}{d}[x + \alpha\ell \times \\ \times (1 - \frac{1}{n})] - \frac{m^2\lambda}{2d^2}[z - \ell(1 - \frac{1}{n})]]\} \{F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(a - y)] - F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(-a - y)]\} \{F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}} \times \\ \times [a - x + \frac{m\lambda z}{d} + \frac{m}{d}\alpha\ell(1 - \frac{1}{n})] - F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(-a - x + \frac{m\lambda z}{d} + \frac{m}{d}\alpha\ell(1 - \frac{1}{n})]]\},$$

(18)

где $F(x) = \int_0^x \exp(j\frac{\pi}{2}t^2)dt$ – интеграл Френеля. Из (18) видно, что плоскопараллельная

пластина сдвигает плоскость воспроизведения на расстояние $\ell(1 - \frac{1}{n})$ по оси Z и на $\alpha\ell(1 - \frac{1}{n})$ по оси X. В данном случае картина распределения плоскостей саморепродукции не искажается, но происходит смещение всей картины как целого вдоль осей X и Z.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lohmann A. W., Silva D. E. An interferometer based on the Talbot effect. // Opt. Commun.- 1971.- v.2.- No. 9.- p.p. 413 – 415.

2. Исманов Ю.Х. Распределение плоскостей Тальбота при наличии фазовой среды типа тонкой линзы. //Международная научная конференция «Современные технологии и управление качеством в образовании, науке и производстве: опыт адаптации и внедрения», ч. 1. – Бишкек, 2001. – С.24-28.

3. Аристов В.В., Ерко А.И., Мартынов В.В. Оптика и спектрометрия на основе эффекта Тальбота // Оптика и спектроскопия. – 1988. – Т. 64. – Вып. 3. – С. 630 – 637.