УДК 517.956, 517.968.2

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО “ПО ВРЕМЕНИ” ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Курманбаева А.К.
Институт горного дела и горных технологий им.акад. У.Асаналиева КГТУ им.И.Раззакова, г.Бишкек, Кыргызстан

В данной работе исследуется краевая задача для нагруженного псевдопараболического уравнения в ограниченной области, когда порядок производной в нагруженном слагаемом совпадает с порядком дифференциальной части уравнения.

In this paper we study the boundary value problem for a loaded pseudoparabolic equation in a bounded domain, where the order of the derivative in a loaded term coincides with the order of the differential equation.

Введение. Основные вопросы, возникающие в теории краевых задач для уравнений вчастных производных, остаются таковыми же и в краевых задачах для нагруженных уравнений, которые в связи с расширяющимся объемом их приложений являются объектом исследования многих авторов [1–5]. Однако, наличие нагруженного оператора не всегда позволяет применить известную теорию краевых задач к нагруженным дифференциальным уравнениям.

В области $Ц_T$ рассмотрим нагруженное псевдопараболическое уравнение вида

$$u_t(x,t) = (u_{xxt} + u_{xx})(x,t) + h(x,t)L_1(u_t(x,T)) + g(x,t), \quad (1)$$

где

$$L_1 = d^2 / dx^2 - I.$$

Задача. Найти регулярное в области $Ц_T$ решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию и условию Гурса

$$u(x,0) = u_0(x), \ 0 \le x \le l, \quad (2)$$

$$u(0,t)=\nu_1(t), u_x(0,t)=\gamma_1(t), \quad 0\le t\le T, \tag{3}$$

или одному из граничных условий:

$$u(0,t)=\nu_1(t), u(l,t)=\nu_2(t), \quad 0\le t\le T, \tag{4}$$

$$u_x(0,t)=\gamma_1(t), u(l,t)=\nu_2(t), \quad 0\le t\le T, \tag{5}$$

$$u_x(0,t)=\gamma_1(t), u_x(l,t)=\gamma_2(t), \quad 0\le t\le T, \tag{6}$$

где $u_0, \nu_k, \gamma_k, k=1,2$ – заданные функции, для которых соблюдены обычные условия согласования:

$$\nu_k(0)=u_0^{(k-1)}(0), \qquad k=1,2, \tag{7}$$

$$\nu_k(0)=u_0(x_k), \quad \gamma_k(0)=u_0(x_k), \quad k=1,2, \quad x_1=0, \quad x_2=l. \tag{8}$$

Задачи (1), (2), (j), j=3,4,5,6 будут рассматриваться при следующих предположениях:

1) $u_0(x)\in C^2([0,l])$,

2) $\nu_k(t)\in C^1([0,T]), \quad k=1,2,$ $\gamma_k(t)\in C^1([0,T]), \quad k=1,2,$

3) $h\in C^{2,1}\ (\overline{\Omega}), \quad g\in C^{0,1}\ (\overline{\Omega}),$ $h(x,T)\ne -1.$

Заметим, что при наложенных условиях на заданные функции $h, g, u_0, \nu_k, \gamma_k, \quad k=1,2,$, в силу линейности уравнения (1) без ограничения общности можно предположить, что $u_0(x)=0, \nu_k(t)=0, \gamma_k(t)=0, \quad k=1,2.$

Далее для простоты будем считать, что в (1),(2), (j), j=3,4,5,6 указанные функции равны нулю и рассмотрим задачу (1)-(3).

<u>ТЕОРЕМА 1.</u> Если выполнены условия 1)-3), то задача (1)-(5.3.3) однозначно разрешима.

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.</u> Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$v(x,t)=u_t. \tag{9}$$

Тогда функция $v(x,t)$ будет удовлетворять условиям

$$v_t-v_{xxt}-v_{xx}=h_tL_1(v(x,T))+g_t, \tag{10}$$

$$L_1(v(x,0))-h(x,0)L_1(v(x,T))=-g(x,0), \tag{11}$$

$$v(0,t)=v_x(0,t)=0. \tag{12}$$

Из (5.3.10)-(5.3.12), сделав замену $V=e^{-t}w$, и, обращая оператор L_1, получим

$$-w_t=L_1^{-1}w+e^{t-T}L_1^{-1}(h_tL_1v(x,T))+e^tL_1^{-1}g_t(x,t), \tag{13}$$

$$w(x,0)=e^{-T}L_1^{-1}(h(x,0)L_1v(x,T))-L_1^{-1}g(x,t). \tag{14}$$

Учитывая, что

$$L_1^{-1}w=\int_0^x sh(x-s)w(s,t)ds,$$

и, интегрируя по частям из (13), (14) , получим

$$w_t=-\int_0^x sh(x-s)w(s,t)ds - e^{t-T}h_t(x,t)w(x,T)+$$

$$+e^{t-T}\int_0^x [sh(x-s)h_{tss}-2ch(x-s)h_{ts}]w(s,T)ds+g_1(x,t), \tag{15}$$

$$w(x,0)-e^{-T}h(x,0)w(x,T)=$$

$$=e^{-T}\int_0^x [sh(x-s)h_{ss}(s,0)-2ch(x-s)h_s(s,0)]w(s,T)ds, \tag{16}$$

где

$$g_1(x,t)=e^tL_1^{-1}(g_t).$$

Из (15),(16) получим

$$w(x,t) = -e^{t-T} h(x,t)w(x,T) + \int_0^x K(x,s,t)w(s,t)ds - \\ - \int_0^t \int_0^x sh(x-s)w(s,\tau)dsd\tau + g_2(x,t), \qquad (17)$$

где

$$K(x,s,t) = \int_0^t e^{\tau - T}[sh(x-s)h_{\tau ss} - 2ch(x-s)h_{\tau s}(s,\tau)]d\tau - \\ - e^{-T}[sh(x-s)h_{ss}(s,0) - 2ch(x-s)h_s(s,0)],$$

$$g_2(x,t) = \int_0^t g_1(x,\tau)d\tau.$$

Положив в (16) $t=T$, получим

$$w(x,T) = \left[\int_0^x K(x,s,t)w(s,T)ds - \int_0^T\int_0^x sh(x-s)w(s,\tau)dsd\tau + g_2(x,T)\right] \Big/ (1+h(x,T)). \quad (18)$$

Система (17), (18) представляют собой замкнутую линейную систему интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода относительно функций $w(x,t), w(x,T)$. Отсюда следует безусловная разрешимость данной задачи.

2. Обратная задача определения источника, зависящего от пространственных переменных. В этом пункте рассматривается обратная задача определения источника в псевдопараболическом уравнении, которая заключается в нахождении решения и правой части из условий, составляющих задачу Гурса и некоторого дополнительного условия, называемого переопределением. В качестве переопределения рассматривается след решения на "верхней крышке". В этом случае источник ищется в $f(x)h(x,t)$, где $f(x), h(x,t)$– искомые и заданные функции.

Рассмотрим в области *Ц*$_T$ задачу определения пары функций $u(x,t)$ *и* $f(x)$ из условий

$$u_t(x,t) = (u_{xxt} + u_{xx})(x,t) \\ + f(x)h(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in Ц_T, \quad (19)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \quad (20)$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(0,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T, \quad (21)$$

$$u(x,T) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l. \quad (22)$$

Пусть все заданные функции достаточно гладкие, $|h(x,T)| \ge h_0 > 0$ и выполнены условия согласования:

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \ \varphi'(0) = \mu_2(0), \quad (23)$$

$$\psi(0) = \mu_1(T), \quad \psi'(0) = \mu_2(T). \quad (24)$$

<u>ТЕОРЕМА 2.</u> Пусть функции $\varphi, \psi, \mu_1, \mu_2, h, g$ удовлетворяют условиям (23) и (24). Тогда существует единственное решение обратной задачи (19)-(22).

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО</u>. Так как задача линейна, то ее решение можно представить в виде

$$(u,f) = (u^1, 0) + (u^2, f), \quad (25)$$

где $u^1(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$u_t^1 = u_{xxt}^1 + u_{xx}^1 + g(x,t), \quad (26)$$

$$u^1(x,0) = \varphi(x), \quad u^1(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x^1(0,t) = \mu_2(t). \quad (27)$$

Пара функций (u^2, f) удовлетворяет задаче

$$u_t^2 = u_{xxt}^2 + u_{xx}^2 + f(x)h(x,t), \quad (28)$$

$$u^2(x,0) = u^2(0,t) = u_x^2(0,t) = 0, \quad (29)$$

$$u^2(x,T) = \psi(x) - u^1(x,T). \quad (30)$$

Из этих рассуждений следует, что для доказательства теоремы 2 достаточно доказать существование и единственность определения пары функций (u, f) из условий

$$u_t(x,t) = u_{xxt}(x,t) + u_{xx}(x,t) + f(x)h(x,t), \quad (31)$$

$$u(x,0) = u(0,t) = u_x(0,t) = 0, \quad (32)$$

$$u(x,T) = \psi(x). \quad (33)$$

Для доказательства разрешимости задачи (30)- (32) положим в (31) $t = T$ ивоспользуемся дополнительной информацией (33):

$$f(x) = [(u_{xx} - u)_t(x,T) + \psi''(x)] / h(x,T). \quad (34)$$

подставляя (34) в(31), и, введя новую неизвестную функцию $u_t = V$,

получим следующую нелокальную задачу для нагруженного псевдопараболического уравнения

$$v_t = v_{xxt} + v_{xx} + h_1(x,t)((v_{xx} - v)(x,T)) + h_2(x,t), \quad (35)$$

$$v_{xx}(x,0) - v(x,0) = k(x)[v_{xx}(x,T) - v(x,T)] + k_1(x), \quad (36)$$

$$v(0,t) = v_x(0,t) = 0, \quad (37)$$

где

$$h_1(x,t) = h(x,t) / h(x,T),$$

$$h_2(x,t) = h(x,t)\psi'(t) / h(x,t),$$

$$k(x) = h(x,0) / h(x,T), \quad k_1(x) = h(x,0)\psi''(x) / h(x,T).$$

Применяя к задаче (35)- (37) методику, изложенную в п.1, приходим к заключению теоремы 2.

Литература

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка. – LAPLAMBERTAcademicPublishing, 2013. – 291с.
2. Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. - Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995. – 270с.
3. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. –1983. – Т.19, №1. –С.86 –94.
4. Нахушев А.М. Уравнение математической биологии. – Москва: Высшая школа, 1995. –301с.