УДК: 517.977

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Жайнаков А.Ж., Аширбаев Б.Ы.
Кыргызский государственный технический университет им.И.Раззакова, г.Бишкек, Кыргызстан

В статье с помощью перехода от непрерывной модели к дискретной, предложен способ решений одной задачи оптимального управления.

In article by means of transition from continuous model to discrete, the way of solutions of one problem of optimum control is offered.

Пусть управляемый процесс описывается системой

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \mathrm{Bu(t)}, \qquad (1)$$

$$y = Cx(t) + \mathrm{Du(t)}, \qquad (2)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) - (n \times 1) -$ мерный вектор переменных состояния,

$u = (u_1, \ldots, u_n) - (u \times 1) -$ мерный вектор входных воздействий,

$y = (y_1, \ldots, y_r) - (r \times 1) -$ мерный вектор выходных переменных.

Матрицы *A,B,C,D*-постоянные и имеют размерности:

$(n \times n)$, $(n \times m)$, $(r \times n)$, $(r \times m)$

соответственно.

Предположим, что все характеристические значения матрицы A удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i = \overline{1, n}$ (3)

Как известно, решение уравнения (1) при заданных начальных условиях $x(t_0) = x_0$ можно записать в виде

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \qquad (4)$$

где $\Phi = e^{A(t-t_0)} -$ переходная матрица однородного уравнения $\dot{x}(t) = Ax(t)$ при произвольных начальных условиях $x(t_0) = x_0$.

Теперь переходим от непрерывных моделей к дискретной.

Предположим, что в течение каждого из интервалов квантования

$$k\mu \le t < (k+1)\mu, \quad k = 0, 1, \ldots$$

на вход непрерывной части поступает постоянный сигнал $u(t) = u(k\mu)$.

Полагая также, известными значения переменных состояния при $t_0 = k\mu$ найдем их значения при $t = (k+1)\mu$. Подставляя соответствующие значения в уравнение (4), получим

$$x[(k+1)\mu] = e^{A\mu}X(k\mu) + A^{-1}(e^{A\mu} - E)Bu(k\mu). \quad (6)$$

Векторное уравнение (6) можно представить в виде

$$x[(k+1)\mu] = \varPhi x(k\mu) + \Psi u(k\mu).$$

Дополняя его дискретным аналогом уравнения (2) получим

$$x[(k+1)\mu] = \varPhi x(k\mu) + \Psi u(k\mu), \quad (7)$$

$$y[k\mu] = Cx(k\mu) + Du(k\mu), \quad (8)$$

где $\varPhi = e^{A\mu}$ – собственная матрица разностной системы, $\Psi = A^{-1}(e^{A\mu} - E)B$ – матрица входа, *E*-единичная матрица соответствующей размерности.

Из выражений для матриц $\varPhi$ Ψ, входящих в уравнение (7) легко видеть, что основные сложности при переходе от системы (1) к системе разностных уравнений (7) заключается в вычислении собственной матрицы $\varPhi = e^{A\mu}$, которая является переходной матрицей непрерывной части. Способы для ее нахождения можно найти в [1,2].

Пример. Уравнения движения электродвигателя постоянного тока имеет вид [4]

$$\dot\beta(t) = \varpi(t),$$

$$\dot\varpi(t) = -\frac{1}{T_1}\varpi(t) + \frac{k}{T_1}u(t), \quad (9)$$

где β – угол поворота выходного вала двигателя, ϖ – частота вращения выходного вала двигателя, *u* – управляющее напряжение, *k* – коэффициент передачи двигателя по напряжению, *T* – электромеханическая постоянная времени двигателя. Будем считать, что управление u(t) остается постоянным на интервале квантования $kT \le t < (k+1)T$.

Выберем вектор состояния $x = (\delta \quad \omega)'$, где штрих обозначает транспонирование, и запишем уравнения объекта (9) в матричной форме:

$$\dot x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/T_1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ k/T_1 \end{pmatrix} u$$

Для вычисления собственной матрицы системы разностных уравнений $\varPhi$ используя формулу [1]

$$\varPhi = L^{-1}[(pE - A)^{-1}]\Big|_{t=T}$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/T_1 \end{pmatrix}$, L – преобразование Лапласа,

находим $L^{-1}[(pE - A)^{-1}] = \begin{pmatrix} 1 & (1 - e^{-t/T_1})T_1 \\ 0 & e^{-t/T_1} \end{pmatrix}$

Подставив в последнее равенство t=T, получим собственную матрицу системы разностных уравнений:

$$\varPhi = \begin{pmatrix} 1 & T_1(1 - e^{-T/T_1}) \\ 0 & e^{-T/T_1} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Для определения элементов матрицы Ψ найдем решение дифференциальных уравнений объекта при нулевых начальных условиях и u=1,

$$\beta(t) = kt - kT_1(e^{-t/T_1} - 1); \qquad \omega(t) = k(1 - e^{-t/T_1}).$$

Подставив в полученные зависимости t=T, найдем матрицу Ψ:

$$\Psi = \begin{pmatrix} kT - kT_1(e^{-T/T_1} - 1) \\ k(1 - e^{-T/T_1}) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Система разностных уравнений, описывающая поведение объекта при выбранных переменных состояния, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \beta[(k+1)T] &= \beta[kT] + (T_1(1 - e^{-T/T_1})\varpi[kT] + (kT - kT_1(e^{-T/T_1} - 1))u[kT], \\ \omega[(k+1)T] &= e^{-T/T_1}\omega[kT] + k(1 - e^{-T/T_1})u[kT]. \end{aligned} \quad (12)$$

Систему (12) перепишем в виде

$$z(t+T) = \varPhi z(t) + \Psi u(t), \quad (13)$$

где $z = (\beta \quad \varpi)'$ $t = kT, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1; \quad T = 1/N; \quad T$ – малый период квантования.

Предположим, что все собственные значения $\lambda_i \quad (i = \overline{1, n})$ матрицы $\varPhi$ удовлетворяют условию $|\lambda_i| < q_0 < 1$.

(14)

Теперь рассмотрим следующую задачу оптимального управления.

Требуется перевести систему (13) из состояния

$$z(0) = z_0 \quad (15)$$

в состояние

$$z(1) = z(NT) = z_N, \quad (16)$$

чтобы при этом функционал

$$J(u) = \sum_{i=0}^{N-1} u'(iT)u(iT) \quad (17)$$

достигал своего наименьшего возможного значения.

Функционал (17) оценивает затрачиваемую энергию в процессе управления [3].

Для решений задачи (13) – (17) воспользуемся алгоритмом решений задач в [5].

Решение задачи (13), (15) можно представить в виде

$$z(k(T) = \Phi^k z_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-i-1}\Psi u(iT), \quad k = t/T. \tag{18}$$

При $k=N$ с учетом (16) из (18) будем иметь

$$\alpha_N = \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-i-1}\Psi u(iT), \quad \alpha_N = z_N - \Phi^k z_0. \tag{19}$$

Равенство (19) выражает необходимое и достаточное условия, которым должна удовлетворять функция *u(t)=u(kT)*, чтобы система (13) перешла из заданного начального в заданное конечное состояние. Кроме того, она должна доставлять минимум функционалу (17) [5].

Такое решение может быть представлено в виде

$$u(kT) = \Psi'(\Phi')^{N-k-1}c. \tag{20}$$

Тогда вектор c является решением уравнения

$$W \cdot c = \alpha_N,$$

$$W = \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-i-1}\Psi\Psi'(\Phi')^{N-i-1}. \tag{21}$$

Из уравнения (21) будем иметь $c = W^{-1}\alpha_N$.

Тогда искомое управление записывается в виде

$$u(kT) = \Psi'(\Phi')^{N-k-1}W^{-1}\alpha_N, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \tag{22}$$

С учетом (22) формула (18) примет вид

$$z(kT) = \Phi^k z_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-i-1}\Psi\Psi'(\Phi')^{N-i-1}W^{-1}\alpha_N. \tag{23}$$

Выходная переменная $y(k)$ определяется как

$$y(kT) = Cx(kT) + \mathrm{Du(kT)} = C\Phi^k z_0 + C\sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-i-1}\Psi\Psi'(\Phi')^{N-i-1}W^{-1}\alpha_N +$$

$$+ D\Psi'(\Phi')^{N-k-1}W^{-1}\alpha_N, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Литература

1. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. - Москва: Наука, 1976.- 424 с.
2. Портер У. Современные основание общей теории систем. Москва: Наука, 1971.- 556 с.
3. Красовский Н.Н.Теория управления движением. – Москва: Наука, 1968. – 476 с.
4. Основы автоматического управления /И.Е.Казаков, Д.И.Гладков, Л.Г.Евланов и др.; под. ред. В.С. Пугачева. – Москва: Наука, 1974. - 720 с.
5. Иманалиев.З.К., Аширбаев Б.Ы., Алымбаева Ж.А. Решение дискретной задачи оптимального управления с малым щагом //Междунар. научно-информац. журн. «Наука и инновации». Вып. №1, Бишкек, 2013. С. 35 – 41.