



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ ГЕОРЕЗОНАНСА В КАЧЕСТВЕ СПУСКОВОГО МЕХАНИЗМА ДЛЯ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

ЕГОРОВ А.К., БАЙМУХАМЕТОВ М.А.

*Институт механики и машиноведения им. академика У.А.Джолдасбекова МОН РК, г. Алматы*  
[izvestiya@ktu.aknet.kg](mailto:izvestiya@ktu.aknet.kg)

*Ранее исследователи изучали свободные упругие колебания Земли без учёта влияния внешнего потенциального силового поля. Последнее обусловлено силами инерции вращения Земли вокруг собственной полярной оси в поле сил притяжения со стороны космических тел, движущихся со временем по своим орбитам. Такими телами являются Луна, Солнце и планеты Солнечной системы. В результате этого не учета не был выявлен спектр бифуркационных частот, обусловленных потерей устойчивости колебаний Земли. С этими частотами связано выявление георезонансных эффектов в Земле, служащих спусковым механизмом для землетрясений. Сильные землетрясения следует ожидать при совпадении места георезонанса наибольшей мощности с очагом землетрясения, готовым должным образом среагировать на него. Нами составлены программы численной реализации на компьютере построенной теории георезонансных явлений. Созданы анимационные фильмы, демонстрирующие георезонансные всплески, как в ретроспективе, так и в перспективе. Подтверждена правильность направления исследований.*

Нами ранее были исследованы бифуркационные колебания двух различных классов, а именно: класс  $C_1$  (крутильные колебания) и класс  $C_2$  (сфероидальные колебания) для случая несжимаемого упругого материала однородной модели Земли, когда дилатансия (объемное расширение) равна нулю [1-4]. В случае колебаний класса  $C_1$  дилатансия и радиальная компонента перемещения равны нулю для области всего шара, а при колебаниях класса  $C_2$  во всей области равна нулю радиальная компонента ротора вектора перемещения [5,6].

Для решения проблемы бифуркационных колебаний модели Земли в случае не равной нулю дилатансии, как и прежде, нами применён метод Лейбензона-Ишлинского.

Вначале изучено основное предкритическое состояние вынужденных колебаний упругой модели Земли под влиянием вышеуказанных внешних сил. Дано решение соответствующей системы дифференциальных уравнений колебаний в частных производных, записанной в сферических (географических) координатах [7]:

$$\frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{13}^0}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} (2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0 - \sigma_{33}^0 + \sigma_{12}^0 \operatorname{ctg} \theta) + \rho K_r = \rho \ddot{u}_1^0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{22}^0}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{23}^0}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} [(\sigma_{22}^0 - \sigma_{33}^0) \operatorname{ctg} \theta + 3\sigma_{12}^0] + \rho K_\theta = \rho \ddot{u}_2^0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{23}^0}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{33}^0}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} (3\sigma_{13}^0 + 2\sigma_{23}^0 \operatorname{ctg} \theta) + \rho K_\lambda = \rho \ddot{u}_3^0, \quad (3)$$

где  $\sigma_{ij}^0$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – компоненты тензора напряжений;  $u_i^0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – компоненты вектора перемещений;  $\rho$  – плотность материала Земли;  $r, \theta, \lambda$  – сферические (географические) координаты, причем  $r$  – радиус,  $\theta$  – коширота,  $\lambda$  – долгота произвольной точки модели Земли;  $K_r, K_\theta, K_\lambda$  – компоненты вектора потенциальных внешних сил; двумя точками сверху обозначена вторая производная по времени  $t$ .

Компоненты внешних потенциальных массовых сил записываются в виде:

$$K_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad K_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad K_\lambda = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \lambda}. \quad (4)$$

Воспользуемся выведенным нами ранее динамическим потенциалом этих сил  $U$  [2]:

$$U = -f_1 r^2 \sum_{k=0}^2 P_2^k(\cos \theta) [A_{2k} \cos(k\lambda - \sigma_k t + \psi_j) + B_{2k} \sin(k\lambda - \sigma_k t + \psi_j)] - \frac{D_0}{3} \omega^2 r^2 [1 - P_2(\cos \theta)] \cos(\sigma_0 t - \psi_B), \quad (5)$$

$$A_{2k} = \frac{2}{\delta_k} \frac{(2-k)!}{(2+k)!} \sum_{j=1}^{m_0} \frac{m_j D_{kj}}{r_j^3} P_2^k(\cos \theta'_j) \cos k\lambda'_j, \quad (6)$$

$$B_{2k} = \frac{2}{\delta_k} \frac{(2-k)!}{(2+k)!} \sum_{j=1}^{m_0} \frac{m_j D_{kj}}{r_j^3} P_2^k(\cos \theta'_j) \sin k\lambda'_j, \quad (7)$$

где  $f_1$  – гравитационная постоянная;  $P_2^k(\cos \theta)$ ,  $P_2^k(\cos \theta'_j)$  – присоединенные функции полиномов Лежандра первого рода, действительного аргумента, 2-ой степени (моды),  $k$  – порядка;  $\delta_k = 2$  при  $k = 0$  и  $\delta_k = 1$  при  $k > 0$ ;  $r, \theta, \lambda$  – сферические (географические) координаты точек Земли, причем  $r$  – радиус,  $\theta$  – коширота,  $\lambda$  – долгота точек Земли;  $r'_j, \theta'_j, \lambda'_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) – то же самое для  $j$ -го притягивающего центра;  $m_0$  – число притягивающих центров;  $k = 0, 1, 2$ , причем  $k = 0$  отвечает двухнедельный период  $T_0 = \frac{2\pi}{\sigma_0}$ ,

$k = 1$  – суточный  $T_1 = \frac{2\pi}{\sigma_1}$  и  $k = 2$  – полусуточный  $T_2 = \frac{2\pi}{\sigma_2}$ ;  $t$  – время;  $\psi_j$  – фаза при действии

$j$ -го притягивающего центра;  $D_{kj}$  – постоянные, определяемые из начальных условий;  $\omega$  – угловая скорость вращения Земли,  $\psi_B$  – фаза;  $D_0$  – постоянная, определяемая из начального условия.

Используя соотношения обобщенного закона Гука и соотношения Коши, систему дифференциальных уравнений (1)–(3) приведем к следующему виду:

$$\left( \nabla_0^2 + 2 \right) u_1^0 + r^2 \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial r^2} + 4r \frac{\partial u_1^0}{\partial r} + \frac{\rho r^2 \sigma_k^2}{G} u_1^0 - \left( 2r - \frac{r^2}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Theta^0 + \rho K_r \frac{r^2}{G} = 0, \quad (8)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial u_2^0}{\partial r} + \frac{\rho r^2 \sigma_k^2}{G} u_2^0 + 2r \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta^0}{\partial \theta} - r \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial r \partial \theta} + \rho K_\theta \frac{r^2}{G} = 0, \quad (9)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial u_3^0}{\partial r} + \frac{\rho r^2 \sigma_k^2}{G} u_3^0 + 2r \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Theta^0}{\partial \lambda} + \rho K_\lambda \frac{r^2}{G} = 0, \quad (10)$$

где  $G$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\Theta^0$  – дилатансия,  $\sigma_k$  – частота колебаний, ( $k = 0, 1, 2$ ). Для каждого значения  $k$  находим независимое решение, а затем суммируем полученные решения. В уравнении (8) оператор

$$\nabla_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} - \quad (11)$$

оператор Бельтрами, для которого справедливо тождество

$$\nabla_0^2 P_n^k(\cos \theta) \cos k\lambda = -n(n+1) P_n^k(\cos \theta) \cos k\lambda. \quad (12)$$

Здесь  $P_n^k(\cos \theta) \cos k\lambda$  – сферическая функция. При получении уравнений (8)–(10) имелись в виду сфероидальные колебания, относящиеся к классу  $S_2$ , когда равна нулю величина

$$\chi^0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3^0}{\partial \theta} + u_3^0 \text{ctg} \theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2^0}{\partial \lambda} \right), \quad (13)$$

отвечающая радиальной компоненте ротора вектора перемещения и характеризующая собой вращение элемента, нормального к радиусу Земли, относительно этого радиуса.

Дилатансия  $\Theta^0(t, r, \theta, \lambda)$  подчиняется уравнению, следующему из (8)–(10):

$$\nabla^2 \Theta^0 + \frac{\rho}{2G} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left( \Theta^0 \cdot \sigma_k^2 + \text{div} \vec{K} \right) = 0, \quad (14)$$

где оператор  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Для решения системы дифференциальных уравнений (8)–(10), (14) воспользуемся соотношениями (4)–(7). Последовательность этого решения такова. Вначале находим решение

уравнения (14), то есть находим дилатансию  $\Theta^0$  путем разделения переменных с последующим решением полученного обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения с регулярной особой точкой  $r = 0$  с заданной правой частью [8]. Это уравнение решается с применением обобщенного степенного ряда и методом неопределенных коэффициентов. Затем из уравнения (8), поступая аналогично, находим компоненту  $u_1^0$ . После чего из уравнений (9) и (10) находим компоненты перемещений  $u_2^0$  и  $u_3^0$ . Используя соотношения Коши и физические соотношения обобщенного закона Гука, определяем компоненты тензора напряжений.

Воспользовавшись граничными условиями

$$\sigma_{11}^0 = -\rho g u_1^0, \quad \sigma_{12}^0 = \sigma_{13}^0 = 0 \quad \text{при } r = r_0, \quad (15)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести,  $r_0$  – радиус дневной поверхности Земли, определим произвольные постоянные интегрирования по координатам. Для каждого из рассматриваемых периодов определены значения произвольных постоянных интегрирования по времени, исходя из условия наибольшей вытянутости приливного «горба» в сторону притяжения рассматриваемыми внешними космическими телами.

В соответствии с методом Лейбензона-Ишлинского бифуркационные возмущения определяются из уравнений (8)–(10), (14), если положить в них  $K_r = K_\theta = K_\lambda = 0$ , убрать верхний индекс «0» и заменить частоту  $\sigma_k$  на частоту  $f_{1m}$ , где  $m$  – порядок присоединенной функции полиномов Лежандра. Решаем полученные уравнения по аналогии с предыдущим.

Зная вынужденное основное предкритическое состояние и бифуркационные возмущения, воспользуемся выведенными нами граничными условиями динамической устойчивости бифуркационных сфероидальных вынужденных колебаний рассматриваемой модели Земли [3]:

$$\sigma_{11} + \left( \frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial r} + \rho g \right) u_1 = 0, \quad \sigma_{12} + \frac{\sigma_{22}^0}{r_0} \left( u_2 - \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) = 0, \quad \sigma_{13} + \frac{\sigma_{33}^0}{r_0} \left( u_3 - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} \right) = 0,$$

при  $r = r_0$ . (16)

Из этих граничных условий находим характеристическое уравнение для определения бифуркационных частот вынужденных сфероидальных колебаний модели Земли. Так как свободные колебания характеризуются отсутствием внешних сил, то полагая в вышеуказанном характеристическом уравнении основное состояние нулевым, получим характеристическое уравнение для определения частот свободных колебаний  $f_m$ .

Заметим, что поскольку Земля представляет собой нерегулярную слоистую среду, то в ней имеют место доминантные частоты, отвечающие моде  $n = 2$ . Бифуркационные доминантные частоты, зависящие от внешних факторов и от координат точек Земли, оказываются одного порядка с доминантной частотой свободных колебаний модели Земли. Меняясь с течением времени в зависимости от положений космических тел на их орбитах, они то приближаются к доминантной частоте свободных колебаний в определенных точках Земли, то удаляются от неё. При приближении значения бифуркационной доминантной частоты к доминантной частоте свободных колебаний возникает явление георезонанса как спускового механизма для землетрясений. О георезонансе можно судить по выведенной нами мере динамической восприимчивости упругой модели Земли к вынуждающим бифуркационным силам, зависящей от частот вынужденных бифуркационных и свободных колебаний модели Земли [4]:

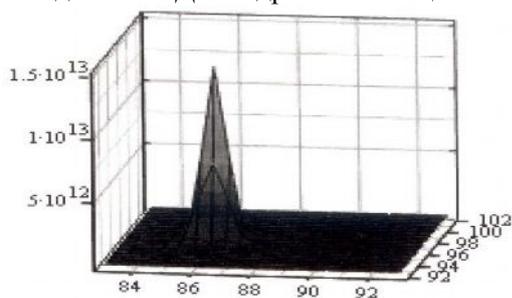
$$\lambda_0 = \frac{a^2 + k_1^2}{\sqrt{(a^2 - \omega_0^2 + k_1^2)^2 + 4a^2\omega_0^2}}, \quad (17)$$

где  $k_1$  – действительная часть комплексной частоты  $f_m$  свободных колебаний модели Земли,  $\omega_0$  – действительная,  $a$  – мнимая части комплексной частоты  $f_{1m} = (\omega_0 - ai)$  бифуркационных вынужденных колебаний, где  $a > 0$ ,  $i$  – мнимая единица. Как следует из формулы (17) при  $\omega_0 \rightarrow k_1$  эта мера резко возрастает. При этом имеет место явление резонанса как спускового механизма для землетрясений. Движение космических тел хорошо известно в будущем из данных астрономии. Поскольку время, место и мощность георезонансов зависят от положений этих точек на их орбитах, постольку открывается возможность прогноза времени, места и силы будущего

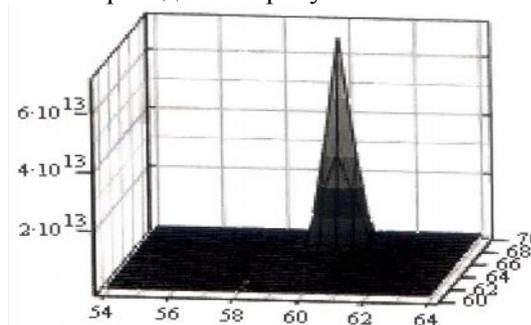
землетрясения. Сильные землетрясения следует ожидать при совпадении места георезонанса наибольшей мощности с очагом землетрясений, достаточно готовым должным образом среагировать на него.

Заметим, что длиннопериодные колебания с периодом порядка часа наблюдаются в моменты землетрясений и отвечают моде  $n = 2$  [6]. Колебания с таким доминантным периодом имеют место и в сейсмически спокойные дни, то есть они происходят постоянно. В сейсмически спокойные дни амплитуда этих колебаний чрезвычайно мала и её трудно уловить геофизическими приборами. Когда же происходит явление георезонанса, то амплитуда этих колебаний резко нарастает и может быть уловлена с помощью геофизических приборов. Одновременно георезонанс вызывает отклик со стороны Земли в виде высвобождения накопившейся упругой потенциальной энергии, переходящей в кинетическую. При этом происходит землетрясение. При георезонансе доминантный период свободных колебаний и доминантные периоды бифуркационных вынужденных колебаний практически совпадают. По-видимому, это обстоятельство привело к пренебрежению влиянием внешних факторов при рассмотрении колебаний модели Земли, тем более, что периоды вынужденных колебаний в классическом основном предкритическом состоянии имеют порядок суток, то есть во много раз больше, чем часовой период. Иначе говоря, можно утверждать, что с помощью геофизических приборов наблюдаются бифуркационные вынужденные колебания, так как действие внешних факторов неотделимо от процесса.

Нами составлены программы численной реализации на компьютере построенной георезонансной теории. Созданы анимационные фильмы, демонстрирующие георезонансные всплески как в ретроспективе, так и в перспективе. Подтверждена правильность направления исследований. Два кадра из анимационных фильмов приведено на рисунках 1 и 2.



**Рис. 1. Георезонанс, отвечающий землетрясению в Индонезии 5 июля 2005 года в 1 час 52 минуты по Гринвичу**



**Рис. 2. Георезонанс, отвечающий землетрясению в Пакистане 8 октября 2005 года в 2 часа 36 минут по Гринвичу**

## Литература

1. Егоров А.К., Ершибаев У.Д. Неустойчивость крутильных колебаний упругой модели Земли, вращающейся в ньютоновом поле сил // Доклады НАН РК, №5, 2003. С.38-42.
2. Егоров А.К., Ершибаев У.Д. Динамические потенциалы сил, действующих на Землю, вращающуюся в ньютоновом поле // Вестник КазНТУ, №1,2, 2004. С.21
3. Егоров А.К., Ершибаев У.Д. Граничные условия устойчивости вынужденных сферидальных и крутильных колебаний модели Земли // Вестник НАН РК, №5, 2003. С.20-24.
4. Егоров А.К., Ершибаев У.Д. Мера динамической восприимчивости упругой модели Земли к вынуждающим бифуркационным силам // Вестник КазНУ, сер. математика, механика, информатика, №4(39), 2003. С.74-77.
5. Ляв А. Математическая теория упругости. М., 1935. 674 с.
6. Буллен К. Введение в теоретическую сейсмологию. М.: Мир. 1966. 460 с.
7. Лурье А.И. Теория упругости. - М., 1970. 939 с.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.; Л., 1952. Т. 2. 627с.

