

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ КОНСТРУКЦИЙ

БЕГАЛИЕВ С.А., ЗЕМЛЯНСКИЙ А.А.

КГТУ им. И. Раззакова,

izvestiva@ktu.aknet.kg

В работе предлагается оценка поведения деформируемой конструкции качественным методом. Используя критерии соответствия типов «особых» точек зависящих традиционно не только от корней характеристического уравнения, но и от коэффициентов первоначально определяющих уравнения стационарной динамической системы, можно осуществить переход от одного типа устойчивого равновесия к другому. Направление перехода к такой «особой» точке будет зависеть от скоростных режимов деформируемого объекта. Рассматривая новую динамическую систему с управляющими коэффициентами – неизвестными параметрами, путем решения соответствующих неравенств и находим область изменения управляющих параметров.

При различных скоростных режимах, которые оказывают непосредственное влияние на конструкцию, происходит изменение ее состояния. Каждый фрагмент объекта под воздействием нагрузки совершает упругие колебания которые можно представлять в виде контролируемых приращений перемещений. Каждому состоянию сооружения в данный момент соответствует свой уровень устойчивости, математически отражающийся видом «особой» точки фазового портрета.

Все «особые» точки бинарно определяют устойчивость дифференциального уравнения, описывающего поведение реальной конструкции. Очень важным и интересным является сам переход одного устойчивого состояния исследуемой части плотины к другому устойчивому состоянию. Эти переходные процессы определяют явления, называемые бифуркацией.

Стационарная двумерная динамическая система, описывающая поведение устойчивого равновесия исследуемого фрагмента плотины представляется экспериментальными данными аппроксимированными в виде коэффициентов при переменных горизонтальных и вертикальных приращений перемещений. Будем считать эту стационарную систему первоначальной. Возможное следующее устойчивое равновесие имеет другие значения коэффициентов динамической системы с соответствующей «особой» точкой. Переход одной «особой» точки фазового портрета в другую представляется границей которая позволяет определить области значений управляющих коэффициентов, назовем их так. Управляющие коэффициенты определяют зоны действия видов «особых» точек. В зависимости от направления бифуркации, решается вопрос, какие именно коэффициенты T_1, T_2, T_3, T_4 участвуют в процессе управления диапазоном каждого из возможных уровней устойчивости, некоторые коэффициенты остаются равными единице. Приведем пример определения управляющих коэффициентов - параметров при переходе из стационарной системы определяемой «особой» точкой устойчивый центр в систему определяемую «особой» точкой устойчивый фокус.

$$\frac{d}{dt} \Delta u = -3.54 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta u \cdot T_1 - 0.033 \cdot \Delta v \cdot T_2$$

$$\frac{d}{dt} \Delta v = -0.083 \cdot \Delta u \cdot T_3 - 0.197 \cdot \Delta v \cdot T_4$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{pmatrix} T_1 - \omega & T_2 \\ T_3 & T_4 - \omega \end{pmatrix} \\ \omega^2 - T_1 \cdot T_4 - T_2 \cdot T_3 - T_1 \cdot \omega - T_4 \cdot \omega = 0 \\ \omega^2 - (T_1 - T_3) \cdot \omega + \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} = 0$$

Произведем некоторые преобразования:

$$\begin{aligned} \Omega &= (T_1 - T_3)^2 + 4(T_1 \cdot T_4 - T_2 \cdot T_3) \\ \Omega &\rightarrow (T_1 - T_3)^2 + 4 \cdot T_1 \cdot T_4 - 4 \cdot T_2 \cdot T_3 \\ &(T_1 - T_3)^2 + 4 \cdot T_1 \cdot T_4 - 4 \cdot T_2 \cdot T_3 \end{aligned}$$

Получаем дискриминант:



$$\begin{aligned}T_1^2 - 2 \cdot T_1 \cdot T_3 + 4 \cdot T_4 \cdot T_1 + T_3^2 - 4 \cdot T_2 \cdot T_3 \\(T_1 - T_4)^2 + 4 \cdot T_2 \cdot T_3 < 0 \\D = (T_1 + T_4)^2 + 4 \cdot T_2 \cdot T_3\end{aligned}$$

Произведение корней характеристического уравнения:

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = T_1 \cdot T_4 - T_2 \cdot T_3$$

Сумма корней:

$$\omega_1 + \omega_2 = T_1 + T_2$$

Рассмотрим случаи дискриминанта:

$$\text{II. } \Delta > 0; (T_1 - T_4)^2 + 4T_2 \cdot T_3 > 0$$

Корни действительные, если:

- 2.1. $\omega_1 \cdot \omega_2 < 0$, т.е. $T_1 \cdot T_4 - T_2 \cdot T_3 < 0$, то *особая* точка представляет собой *узел*;
2.2. $\omega_1 \cdot \omega_2 > 0$, т.е. $T_1 \cdot T_4 - T_2 \cdot T_3 > 0$, то *особая* точка представляет собой *неустойчивый* *узел*.
2.3. $\omega_1 \cdot \omega_2 < 0$, т.е. $T_1 \cdot T_4 - T_2 \cdot T_3 < 0$, то *особая* точка представляет собой *седло*.

III. $\Delta < 0; (T_1 - T_4)^2 + 4T_2 \cdot T_3 < 0$. Корни характеристического уравнения комплексные, сопряженные.

$$\omega_1 = a_1 - ib_1; \omega_2 = a_1 + ib_1; \omega_1 + \omega_2 = 2a_1 = T_1 + T_4.$$

3.1. Если $\begin{cases} \Delta < 0; \\ \operatorname{Re} \omega > 0; \\ T_1 + T_4 > 0 \end{cases}$ – неустойчивый фокус;

3.2. Если $\begin{cases} \Delta < 0; \\ T_1 + T_4 < 0 \end{cases}$ – устойчивый фокус.

IV. Корни характеристического уравнения комплексные, чисто мнимые:

$$\Delta < 0; (T_1 - T_4)^2 + 4T_2 \cdot T_3 < 0;$$

$$\begin{aligned}\omega_1 = ib_1; \omega_2 = -ib_1; \\ \omega_1 + \omega_2 = 0; T_1 + T_4 = 0 \\ \omega_1 \cdot \omega_2 = b_2 > 0 \\ T_1 \cdot T_4 - T_2 \cdot T_3 = b_2 > 0\end{aligned}$$

Введем коэффициенты уравнения:
$$\begin{cases} \frac{d\Delta u}{dt} = \alpha T_1 \Delta u + \gamma T_2 \Delta v \\ \frac{d\Delta v}{dt} = \delta T_3 \Delta u + \beta T_4 \Delta v \end{cases} (*)$$

Используя предыдущие критерии типов «особой» точки, изменяя подбором параметры, можно попытаться перейти от одного типа особой точки к другому. Метод заключается в следующем:

1. Выписываем исходную систему (*), имеющую данный тип «особой» точки, выраженный в виде связи между ее коэффициентами, например, центр.

2. Рассматриваем систему (*) с параметрами $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ и требуем, чтобы новые ее

коэффициенты определяли другой тип «особой» точки. Используем такие траектории типа «особой» точки от новых коэффициентов. Тем самым находим область изменения управляющих коэффициентов, которая будет определяться неравенствами. Пример перехода от «особой» точки *центр* к «особой» точке *устойчивый фокус*. Предлагаем к рассмотрению алгоритм решения обозначенной выше задачи: выписываем динамическую систему, соответствующую «особой» точке *центр*. Получаем связь между ее коэффициентами: $T_4 = -T_1$. Подставляем

$4T_1^2 - 4T_2T_3 < 0$; $T_1^2 - T_2T_3 < 0$. Записываем полученную динамическую систему с управляющими коэффициентами: T_1, T_2, T_3, T_4 .

$$\begin{cases} \frac{d\Delta u}{dt} = T_1\Delta u + T_2\Delta v \\ \frac{d\Delta v}{dt} = T_3\Delta u + T_4\Delta v \end{cases} \quad (*)$$

Рассмотрим имеющие место случаи:

$$\Delta < 0, (T_1 - T_4)^2 - 4T_2 \cdot T_3 < 0; T_1 + T_4 = 0.$$

Для новой системы, для ее коэффициентов выписываем условие «особой» точки *устойчивый фокус*.

$$\begin{cases} \frac{d\Delta u}{dt} = \Pi_1 T_1 \Delta u + \Pi_2 T_2 \Delta v \\ \frac{d\Delta v}{dt} = \Pi_3 T_3 \Delta u + \Pi_4 T_4 \Delta v \end{cases} \quad (**)$$

Дискриминант характеристического уравнения устойчивого фокуса $\Delta < 0$, $(\Pi_1 T_1 - \Pi_4 T_4)^2 + 4\Pi_2 T_2 \cdot \Pi_3 T_3 < 0$, $\Pi_1 T_1 + \Pi_4 T_4 < 0$. Два неравенства определяют область изменения управляющих параметров $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$. В этой области изменения управляющих параметров определяют тип «особой» точки – *устойчивый фокус*. Граница этой области изменения управляющих параметров, при переходе через которую «особая» точка *центр* меняется на «особую» точку – *устойчивый фокус*. Далее остается решить систему неравенств относительно параметров $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$.

$$\begin{cases} (\Pi_1 T_1 - \Pi_4 T_4) + 4\Pi_2 T_2 \cdot \Pi_3 T_3 < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \Pi_1 T_1 + \Pi_4 T_4 < 0 \end{cases} \quad (2)$$

При этом исходные управляющие коэффициенты T_1, T_2, T_3, T_4 удовлетворяют условиям центра.

$$(T_1 - T_4)^2 - 4T_2 \cdot T_3 < 0; T_1 + T_4 = 0; T_1 = -T_4$$

$$4T_1^2 - 4T_2T_3 < 0; T_1^2 - T_2T_3 < 0.$$

Новая система неравенств преобразуется следующим образом:

$$(\Pi_1 T_1 - \Pi_4 (-T_1))^2 + 4\Pi_2 T_2 \cdot \Pi_3 T_3 < 0;$$

$$T_1^2 (\Pi_1 + \Pi_4)^2 + 4\Pi_2 T_2 \cdot \Pi_3 T_3 < 0;$$

$$\begin{cases} T_1^2 (\Pi_1 + \Pi_4)^2 + 4\Pi_2 T_2 \cdot \Pi_3 T_3 < 0; \\ T_1 (\Pi_1 - \Pi_4) < 0 \end{cases}$$

$$\Pi_1 \cdot T_1 + \Pi_4 (-T_1) < 0$$

$$T_1 (\Pi_1 - \Pi_4) < 0$$

$$\begin{cases} T_1^2 (x + y)^2 + 4z \cdot T_2 \cdot T_3 < 0; \\ T_1 (x - y)^2 < 0 \end{cases}$$

Даны управляющие параметры динамической системы, характеризующейся «особой» точкой *устойчивый фокус*: $\Delta < 0$, $T_1 + T_4 = 0$.

$$\text{Исходная система: } \Delta = \begin{cases} (T_1 - T_4)^2 + 4T_2T_3 < 0 \\ T_1 + T_4 < 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \frac{d\Delta u}{dt} = \Pi_1 T_1 \Delta u + \Pi_2 T_2 \Delta v \\ \frac{d\Delta v}{dt} = \Pi_3 T_3 \Delta u + \Pi_4 T_4 \Delta v \end{cases}$$



Должно выполняться условие:

$$\Delta < 0; \begin{cases} (\Pi_1 T_1 - \Pi_4 T_4)^2 + 4 \Pi_2 T_2 \cdot \Pi_3 T_3 < 0; \\ \Pi_1 T_1 - \Pi_4 T_4 < 0 \end{cases}$$

Используя, предложенный алгоритм определения управляющих параметров и направление перехода рассмотрим, конкретный пример по предложенному выше алгоритму.

Динамическая система описывающая деформационное поведение конструкции в исследуемый момент времени

$$T1 := -3.54 \cdot 10^{-3}$$

$$T2 := -0.03;$$

$$T3 := 0.08;$$

$$T4 := -0.19;$$

$$\sqrt{-(-0.033) \cdot 0.083} = 52.34 \times 10^{-3}$$

$$\sqrt{-(T2) \cdot T3} = 52.34 \times 10^{-3}$$

Решим полученную систему уравнений

Given

$$0.018x - 0.649 - y = 0$$

$$-\frac{T1 \cdot x}{T4} - y = 0$$

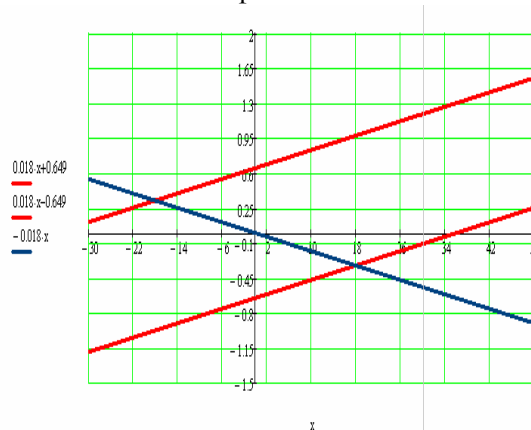
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 18.043042619249223822 \\ -0.32422523285351397121 \end{pmatrix}$$

Проведем некоторые преобразования

$$\frac{T1}{T4} = 17.97 \times 10^{-3} \quad T1 = -3.54 \times 10^{-3} \quad T4 = -197.00 \times 10^{-3}$$

$$\frac{\sqrt{-(T3) \cdot T4}}{T4} = -649.09 \times 10^{-3}$$

Решение системы неравенств дает следующую картину разграничения областей соответствующим разным особым точкам на фазовой плоскости



Исследуя следующие случаи дискриминанта получаем

$$\Delta < 0 \quad x1 := 0 \quad y1 := -1.5$$

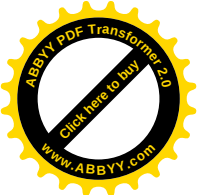
$$(T1 \cdot x1 - T4 \cdot y1)^2 + 4 \cdot T2 \cdot T3 = 76.36 \times 10^{-3}$$

$$T1 \cdot x1 + T4 \cdot y1 = 295.50 \times 10^{-3}$$

$$\Delta < 0 \quad x2 := 6 \quad y2 := 0 \quad (T1 \cdot x2 - T4 \cdot y2)^2 + 4 \cdot T2 \cdot T3 = -10.50 \times 10^{-3}$$

$$T1 \cdot x2 + T4 \cdot y2 = -21.24 \times 10^{-3}$$

Полученные численные, символьные и графические результаты подтверждают высказанные ранее предположения о том, что деформируемая конструкция переходя из одного устойчивого состояния в другое устойчивое состояние меняет деформационную картину, описываемую меняющимися особыми точками только с некоторыми начальными условиями.



Литература

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
2. Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. – М.: Мир, 1986. – 301 с.
3. Немыцкий В.В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.:Л.: Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1949. – 550 с.
4. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М: Высшая школа, 1963. – 546 с.
5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
6. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. – М.: Мир, 1983. – 300 с.
7. Себехей В. Дж. Неустойчивости в динамических системах. – М.: Мир, 1982. – 167 с.
8. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 271 с.

