





$$\begin{aligned}
 w_1(x, t)|_{t=0} &= Q_{01}(x), & 0 \leq x \leq H \\
 w_1(x, t)|_{x=0} &= Q_{01}(t), & 0 \leq t \leq T \\
 w_1(x, t)|_{x=H} &= Q_{11}(t), & 0 \leq t \leq T \\
 \dots \dots \dots \\
 w_n(x, t)|_{t=0} &= Q_{0n}(x), & 0 \leq x \leq H \\
 w_n(x, t)|_{x=0} &= Q_{0n}(t), & 0 \leq t \leq T \\
 w_n(x, t)|_{x=H} &= Q_{1n}(t), & 0 \leq t \leq T
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Рассмотрим первое уравнение системы (5)

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + K_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned}
 w_0(x, t)|_{t=0} &= Q_{00}(x), & 0 \leq x \leq H \\
 w_0(x, t)|_{x=0} &= Q_{00}(t), & 0 \leq t \leq T \\
 w_0(x, t)|_{x=H} &= Q_{10}(t), & 0 \leq t \leq T
 \end{aligned}
 \tag{6a}$$

Уравнение (7) с помощью подстановки

$$w_0(x, t) = \tilde{w}_0(x, t)e^{\alpha_0 t + \beta_0 t} \tag{8}$$

где  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  неизвестные коэффициенты, преобразуется в уравнение

$$\frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial x^2} + (K_0 - 2\beta_0 D_0) \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial x} + (K_0 \beta_0 + \alpha_0 - D_0 \beta_0^2) \tilde{w}_0 = 0 \tag{9}$$

Если полагаем

$$\alpha_0 = -\frac{K_0^2}{4D_0}, \quad \beta_0 = \frac{K_0}{2D_0} \tag{10}$$

то уравнение (9) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial x^2} = 0 \tag{11}$$

Решение уравнения (11) ищем в виде функции

$$\tilde{w}_0(x, t) = x^n f_0(z), \text{ где } z = \frac{x^2}{t} \tag{12}$$

Находим 
$$\frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial t} = x^n \cdot f_0'(z) \cdot \left(-\frac{x^2}{t^2}\right)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_0(x, t)}{\partial t} = nx^{n-1} \cdot f_0(z) + 2 \cdot \frac{x^{n+1}}{t} \cdot f_0'(z)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_0(x, t)}{\partial x} = nx^{n-1} \cdot f_0(z) + 2 \cdot \frac{x^{n+1}}{t} \cdot f_0'(z) \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}_0(x, t)}{\partial x^2} = n(n-1)x^{n-2} \cdot f_0(z) + 2(2n+1) \cdot \frac{x^n}{t} \cdot f_0'(z) + \frac{4x^{n+2}}{t^2} \cdot f_0''(z)$$

Подставляя частные производные  $\frac{\partial \tilde{w}_0(x, t)}{\partial t}$  и  $\frac{\partial^2 \tilde{w}_0(x, t)}{\partial x^2}$  в уравнение (11) после некоторых преобразований получим

$$z^2 \cdot f_0''(z) + \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{z}{4D_0} \right] z \cdot f_0'(z) + \frac{1}{4} n(n-1) f_0(z) = 0 \tag{14}$$

Рассмотрим частные случаи. При  $n = 0$  получим уравнение

$$z^2 \cdot f_0''(z) + \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{4D_0} \right) z \cdot f_0'(z) = 0. \tag{15}$$

Далее

$$z^2 \cdot f_0''(z) = -\left( \frac{1}{2} + \frac{z}{4D_0} \right) z \cdot f_0'(z)$$

$$\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{4D_0}$$

Интегрируя, получим



$$\ln f_0'(z) = -\frac{1}{2} \ln z - \frac{z}{4D_0} + \ln c_1$$

$$\ln \frac{\sqrt{z} \cdot f_0'(z)}{c_1} = -\frac{z}{4D_0}$$

$$f_0'(z) = c_1 \cdot \frac{e^{-\frac{z}{4D_0}}}{\sqrt{z}}$$

Отсюда  $f_0(z) = c_1 \int \frac{e^{-\frac{z}{4D_0}}}{\sqrt{z}} dz + c_2$  (16)

где  $c_1$  и  $c_2$  произвольные постоянные.  
Подставляя функцию (16) в формулу (12) получим

$$\tilde{w}_0(x, t) = c_1 \int \frac{\sqrt{t} e^{-\frac{x^2}{4D_0 t}}}{x} d\left(\frac{x^2}{t}\right) + c_2$$
 (17)

где  $c_1$  и  $c_2$  произвольные постоянные.  
Далее подставляя функцию (17) в формулу (8) получим

$$w_0(x, t) = c_1 e^{\alpha_0 x + \beta_0 t} \int \frac{\sqrt{t} e^{-\frac{x^2}{4D_0 t}}}{x} d\left(\frac{x^2}{t}\right) + c_2 e^{\alpha_0 x + \beta_0 t}$$
 (18)

где  $c_1$  и  $c_2$  произвольные постоянные.

При  $n = 1$  получим уравнение

$$z^2 \cdot f_0''(z) + \left(\frac{3}{2} + \frac{z}{4D_0}\right) z \cdot f_0'(z) = 0$$
 (19)

$$\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} = -\frac{3}{2} \frac{1}{z} - \frac{1}{4D_0} \quad \ln f_0'(z) = -\frac{3}{2} \ln z - \frac{z}{4D_0} + \ln c_1$$

Интегрируя, получим

$$\ln \frac{\sqrt{z^3} \cdot f_0'(z)}{c_1} = -\frac{z}{4D_0} \quad f_0'(z) = c_1 \cdot \frac{e^{-\frac{z}{4D_0}}}{\sqrt{z^3}} \quad f(z) = c_1 \int \frac{e^{-\frac{z}{4D_0}}}{z\sqrt{z}} dz + c_2$$
 (20)

где  $c_1$  и  $c_2$  произвольные постоянные.

Подставляя функцию (20) в формулу (12) получим

$$\tilde{w}_0(x, t) = c_1 \int \frac{t^2 e^{-\frac{x^2}{4D_0 t}}}{x^2} \cdot d\left(\frac{x^2}{t}\right) + c_2 x$$
 (21)

где  $c_1$  и  $c_2$  произвольные постоянные.

Далее подставляя функцию (16) в формулу (8) получим

$$w_0(x, t) = c_1 e^{\alpha_0 x + \beta_0 t} \int \frac{t^2 e^{-\frac{x^2}{4D_0 t}}}{x^2} \cdot d\left(\frac{x^2}{t}\right) + c_2 x e^{\alpha_0 x + \beta_0 t}$$
 (22)

где  $c_1$  и  $c_2$  произвольные постоянные.  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  параметры которые определяются согласно формулам (10). Функции (18) и (22) есть частные решения уравнения первого приближения системы (5) при  $n = 0$  и  $n = 1$ .



## Литература

1. Бийбосунов Б.И. Уметалиев М.У. Аналитические и приближенно аналитические методы фильтрации и инфильтрации жидкости в различных средах. – Б.: Илим, 1998. 163с.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. - 495с.