



ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ ЧИСЛОВОГО РЯДА

APPROXIMATE CALCULATION OF THE NUMERICAL LINE'S SUM

ПАХЫРОВ З.П., УСЕНОВ А.У.

КГТУ им. И. Раззакова

izvestiya@ktu.aknet.kg

Рассматривается способ нахождения суммы ряда, пользуясь двусторонней оценкой остатка ряда. При этом показывается, что удобно найти приближенное значение суммы ряда, применяя двустороннюю оценки остатка ряда, когда сходимость ряда установлено при помощи признака Даламбера.

При изложении раздела «Числовые ряды» в качестве главной задачи выдвигается традиционная задача исследования сходимости ряда, т.е. получение ответа на вопрос: сходится ряд или расходится и, далее, если сходится, абсолютно или условно? Известно, что акцент делается также на второй задаче: остатка ряда. При этом имеется в виду, что приближенное вычисление суммы ряда осуществляется путем нахождения его частичной суммы с одновременной оценкой остатка. В частности, в случае применения признака Лейбница действует общеизвестное правило, дающее грубую, но двустороннюю оценку остатка. При применении признака Даламбера, радикального признака Коши, интегрального признака Коши в учебной литературе и в практике преподавания указываются только приемы оценки остатка сверху. Получаемые при этом оценки часто бывают весьма завышенными и возможности вычисления суммы ряда с использованием данного числа первых его членов недооцениваются. Между тем, при двусторонней оценке остатка ряда автоматически появляется возможность лучшего использования частичной суммы для получения приближенного значения суммы ряда.

Пусть

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_N + R_N,$$

где

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n; \quad R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n.$$

Если при этом имеем оценки остатка R_N сверху и снизу $A_N \leq R_N \leq B_N$, то за приближенное значение суммы ряда естественно принять

$$S \approx S_N + \frac{A_N + B_N}{2},$$

а погрешность этого значения оценивается величиной $\frac{B_N - A_N}{2}$, которая будет тем меньше, чем больше сближены верхняя и нижняя оценки остатка.

Нам представляется, что духу современной прикладной направленности курса математики в техническом вузе больше отвечало бы перенесение центра тяжести в изложении теории рядов на задачу вычисления суммы ряда; установление сходимости ряда есть лишь первый необходимый шаг в решении этой задачи. Признаки сходимости в случае положительного решения вопроса о сходимости должны сразу даваться и как способ приближенного вычисления суммы ряда. Мы покажем, как это удобно делать при применении признака Даламбера.

1. Применение признака Даламбера. Пусть знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сходимость может быть установлена применением признака Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1.$$

Если при $n \geq N+1$ мы имеем $q_1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q_2 < 1$, то остаток ряда

$$R_N = a_{N+1} + a_{N+2} + \dots$$

Очевидно, заключается между остатками геометрических прогрессий с тем же начальным членом и знаменателями q_1, q_2 :



$$A_N = \frac{a_{N+1}}{1-q_1} \leq R_N \leq \frac{a_{N+1}}{1-q_2} = B_N,$$

и для приближенного значения суммы ряда получаем формулу

$$S \approx S_N + \frac{1}{2} \left(\frac{a_{N+1}}{1-q_1} + \frac{a_{N+1}}{1-q_2} \right), \quad (1)$$

выражающую сумму ряда с погрешностью, не превосходящей

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(\frac{a_{N+1}}{1-q_2} - \frac{a_{N+1}}{1-q_1} \right) = \frac{a_{N+1}(q_2 - q_1)}{2(1-q_1)(1-q_2)}.$$

Ясно, что при малой величине разности $q_2 - q_1$ погрешность получается значительно меньшей, чем при использовании формулы $S \approx S_N$.

Особенно просто получаются нулевые значения q_1, q_2 в том случае, когда отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ изменяется с номером монотонно; тогда в зависимости от того, убывает или возрастает это отношение, имеем

$$q_1 = q, \quad q_2 = \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \text{ или } q_1 = \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}, \quad q_2 = q.$$

Пример. Вычислить приближенную сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n},$$

пользуясь формулой (1) при $N = 4$.

Решение. В этом случае $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2(n+2)}$ стремится к пределу $q = \frac{1}{2}$, монотонно возрастаю.

Остаток R_N имеет вид

$$R_4 = \frac{1}{6 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \dots$$

и для q_1, q_2 можем получить $q_1 = \frac{a_6}{a_5} = \frac{3}{7}$, $q_2 = q = \frac{1}{2}$.

Отсюда $S \approx S_4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6 \cdot 2^5} \left[\frac{1}{1-\frac{3}{7}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \right] = 1,38668 \dots$ с погрешностью, не превышающей

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6 \cdot 2^5} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{3}{7}} \right) = 0,00065 \dots$$

(легко установить, что по сравнению с использованием формулы $S \approx S_4$ погрешность уменьшается в 16 раз).

Литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М.: Наука, 1987.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М.: Наука, 1980.