УДК 517.2 (517.5)

Шарипов К.С., Шарипов К.С.

ЫГУ им. К.Тыныстанова

Академия ТК и ПС, Республика Казахстан

К ТЕОРИИ НАГРУЖЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И НАГРУЖЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИИ

Впервые установлено существование так называемых *нагруженных собственных значений и нагруженных собственных функций*. Многие задачи математики, физики и т.д. решаются им (*нами предложенной теорией*)

Ранее сказано, что задачи о собственных значениях функции возникают при исследовании существования решения усовершенствования задачи Коши.

Здесь мы будем вести речь о нагруженных собственных значениях и нагруженных собственных функциях, которые имеются в усовершенствованной задачи Коши.

Начнем с простейшей задачи управления вида

$$y' + p(t)y = g(t),\ t \in [t_0, T], \tag{1}$$

граничные условия

$$y(t_0) = y_0, \quad y(T) = y_1 \ \left(p(t), g(t) \in C_{[t_0,T]}. \right. \tag{2}$$

Наряду с ней рассмотрим задачу Коши

$$y' + p(t)y = g(t),\ t = [t_0, T], \tag{3}$$

начальное условие

$$y(t_0) = y_0. \tag{4}$$

Теперь напишем усовершенствованную задачу Коши из задачи управления (1)-(2) в виде

$$y' + p(t)y = g(t),\ t \in [t_0, T],\ где \tag{5}$$

1) начальное условие

$$y(t_0) = y_0; \tag{6}$$

2) плюс, заданное условие (7)

$$y(T) = y_1.$$

Итак, видно, что задачи управления (1)-(2) рассматриваются как задачи Коши (3)-(4) и плюс с заданным дополнительным условием (7).

Теперь поставим задачу : пусть величина $y(T)$ оказывает влияние на задачу Коши (3)-(4) с определенным правилом найти структуру этого влияния

$$y(T) = \ ? \tag{8}$$

Чтобы решить поставленную задачу, обращаемся к теории разработанной нами (см. $[1-3]$ усовершенствованной задачи Коши с параметрами.

Начнем решать усовершенствованную задачу Коши (5)-(7). Следуя работе $[1-3]$, правую часть y(t) уравнения (5) ищем, в частности, в виде

$$g(t) = \beta f(t),\ t \in [t_0, T] \ \ (f(t) \in C_{[t_0,T]}). \tag{9}$$

Здесь β - параметр. Найти такое его значения, чтобы решение задачи Коши (5)-(6) удовлетворяло условию (7). Это поставленная задача была решена нами.

Теперь здесь, имея в виду произвольности параметра β, его будем брать так $[1-3]$

$$\beta = y(T). \tag{10}$$

Тогда

$$g(t) = y(T) f(t),\ t \in [t_0, T]. \tag{11}$$

В этом случае вспомогательная нагруженная усовершенствованная задача Коши имеет вид

$$y' + p(t)y = y(T) f(t), \quad t \in [t_0, T] \tag{12}$$

1) начальное условие

$$y(t_0) = y_0; \tag{13}$$

2) плюс искомая нагрузка

$$y(T) = ? \tag{14}$$

Нагруженная задача Коши (12)- (13) имеет решение вида

$$y = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + y(T)\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} f(s)ds, \; t\in [t_0, T], \tag{15}$$

отсюда при t = T имеем

$$y(T) = y_0 e^{-\int_{t_0}^{T} p(s)ds} + y(T)\int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f(s)ds. \tag{16}$$

Тогда величина влияния параметра *y(T)* равна

$$y(T) = \frac{y_0 e^{-\int_{t_0}^{T} p(s)ds}}{1-\int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f(s)ds}\; . \tag{17}$$

Особенности этого параметра заключаются в том , что при заданных функциях *p(t)* и *f(t)* усовершенствованная задача Коши (12)-(14) имеет решения

$$y = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + \frac{y_0 e^{-\int_{t_0}^{T} p(s)ds}}{1-\int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f(s)ds}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} f(s)ds, \qquad t\in [t_0, T], \tag{18}$$

причем она в точке $t = T$ принимает значение, равное (17).

В дальнейшем значения параметра (10), дающие решения усовершенствованной задачи Коши (12)-(14), будем называть нагруженными собственными значениями, т.е. спектром нагруженного собственного значения, который определяется формулой (17) как функция от переменного y_0. Они являются действительными числами. Им соответствуют действительные нагруженные собственные функции вида (18).

Параметр β в случае, когда он проявляет себя по формуле (10), можем рассматривать как функция от переменного *C*, тогда он обладает замечательным свойством

$$y(C) = \frac{y_0 e^{-\int_{T}^{C} p(s)ds}}{1-\int_{T_0}^{C} e^{-\int_{S}^{C} p(\tau)d\tau} f(s)ds}\; , \tag{19}$$

За материальной точкой

$$(C,\; y(T)) = \left(C,\; \frac{y_0 e^{-\int_{t_0}^{c} p(s)ds}}{1-\int_{t_0}^{C} e^{-\int_{S}^{C} p(\tau)d\tau} f(s)ds} \right) \qquad (C\in [t_0, T]). \tag{20}$$

мы можем вести непрерывное наблюдение из двух точек $(t_0, 0)$ и (t_0, y_0), соответственно формулам, определяющим расстояние между ними, вида

$$r_1 = \sqrt{(C-t_0)^2 + y_0^2 \frac{e^{-2\int_{t_0}^{C} p(\tau)d\tau}}{(1-\int_{t_0}^{C} e^{-\int_s^C p(\tau)d\tau} f(s)ds)^2}}^{\,2}, \qquad C\in[t_0,T] \tag{21}$$

$$r_2 = \sqrt{(C-t_0)^2 + y_0^2 \frac{e^{-2\int_{t_0}^{C} p(\tau)d\tau}}{(1-\int_{t_0}^{C} e^{-\int_s^C p(\tau)d\tau} f(s)ds)^2} - 1)^2} \tag{22}$$

Как видно, расстояния r_1 и r_2 являются функциями от y_0 !

Отметим, что график нагрузки (19) дает нам график решения усовершенствованной задачи Коши (12)-(14).

Приведем график

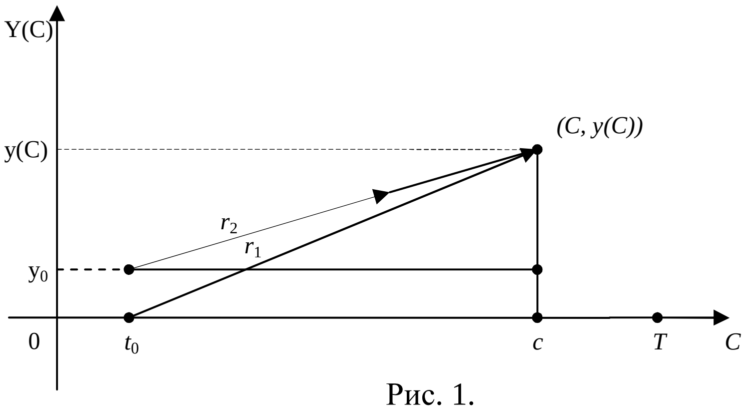


Рис. 1.

Такое свойство нагрузки (17) выявлено впервые.

Теперь рассмотрим задачу управления вида

$$y' + p(t)y = g(t),\ t\in[t_0,T], \tag{23}$$

условия управления

$$y(t_0) = y_0,\ \ y(a) = y_1,\ \ y(T) = y_2 \qquad a\in[t_0,T] \tag{24}$$

Усовершенствованная задача Коши имеет вид

$$y' + p(t)y = g(t),\ \ t\in[t_0,T] \quad , \tag{25}$$

1) начальное условия

$$y(t_0) = y_0; \tag{26}$$

2) плюс заданные условия

$$y(a) = y_1,\ \ y(T) = y_1 \tag{27}$$

Ранее для исследования полученной задачи правую часть g(t) уравнения (23), в частности, представили в виде [2]

$$g(t) = \beta_1 f_1(t) + \beta_2 f_2(t), \qquad t\in[t_{0,}T], \tag{28}$$

где β_1, β_2 - параметры , $f_1(t),\ f_2(t)\in C_{[t_0,T]}$.

Чтобы получить нагруженные собственные значения усовершенствованной задачи Коши (25) – (27) один из параметров β_1 и β_2 обозначим так $\beta_1 =\ y(a)$ (или β_2 = $y(a)$), тогда $g(t) = y(a) f_1(t) +\ \beta_2 f_2(t)$.

В этом случае имеем вспомогательную усовершенствованную задачу Коши вида

$$y' + p(t)y = y(a)f_1(t) + \beta_2 f_2(t)\ \ \beta_1(t)\in[t_0,T], \tag{29}$$

1) начальное условие

$y(t_0) = y_0;$ (30)

2) плюс заданные условие

$y(T) = y_2$; (31)

3) плюс найти искомое

$y(a) =$? (32)

Задача Коши (29)-(30) имеет решение вида

$$y = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + y(a) \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} f_1(s)ds + \beta_2 \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} f_2(s)ds,\ t\in [t_0, T] \tag{33}$$

согласно (31)- (32), имеем

$$\begin{cases} ye^{-\int_{t_0}^{T} p(s)ds} + y(a)\int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} + \beta_2 \int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f(s)ds = y_2 \\ y(a) = y_0 e^{-\int_{t_0}^{a} p(s)ds} + y(a)\int_{t_0}^{a} e^{-\int_{s}^{a} p(\tau)d\tau} f_1(s)ds + \beta_2 \int_{s}^{a} e^{-\int_{s}^{a} p(\tau)d\tau} f_2(s)ds \end{cases}.$$

Отсюда

$$y(a) = \frac{n}{m},\quad a\in (t_0, T), \tag{34}$$

где

$$n = y_0 e^{-\int_{t_0}^{a} p(s)ds} + \frac{\int_{t_0}^{a} e^{-\int_{s}^{a} p(\tau)d\tau} f_2(s)ds}{\int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f_2(s)ds} \left(y_2 - y_0 e^{-\int_{t_0}^{T} p(s)ds} \right), \tag{35}$$

$$m = 1 - \int_{t_0}^{a} e^{-\int_{s}^{a} p(\tau)d\tau} f_1(s)ds + \frac{\int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f_1(s)ds}{\int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f_2(s)ds} \int_{t_0}^{a} e^{-\int_{s}^{a} p(\tau)d\tau} f_2(s)ds. \tag{36}$$

Теперь отметим, что за *материальной точкой*, находящейся в точке $M(t_0, y(C))$, $C\in [t_0, T]$ будем вести непрерывные наблюдения за нагрузкой (34) так, что она вышла при $t = t_0$ из точки (t_0, y_0), при $t = T$ пришла в точку (T, y_0).

Значит, на нагрузках (34) усовершенствованная задача Коши (29)- (32) имеет решение. Потому нагрузка (34) называется управляющими нагруженными собственными значениями относительно y_0 и y_2.

И параметр β_2 определяется формулой $\beta_2 = d$, где

$$d = \frac{1}{\int\limits_{t_0}^{T} e^{-\int\limits_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f_2(s)ds} \left[y_2 - y_0 e^{-\int\limits_{t_0}^{T} p(s)ds} - \frac{n}{m}\int\limits_{t_0}^{T} e^{-\int\limits_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f_1 ds \right]. \qquad (37)$$

На нем усовершенствованная задача Коши (29)-(32) имеет решение. Поэтому параметр (37) называется *управляющими нагружено-собстенными значениями* относительно y_0, y_2 и нагрузки *y(a).* В этом случае нагружено-собственные функции определяются формулой вида

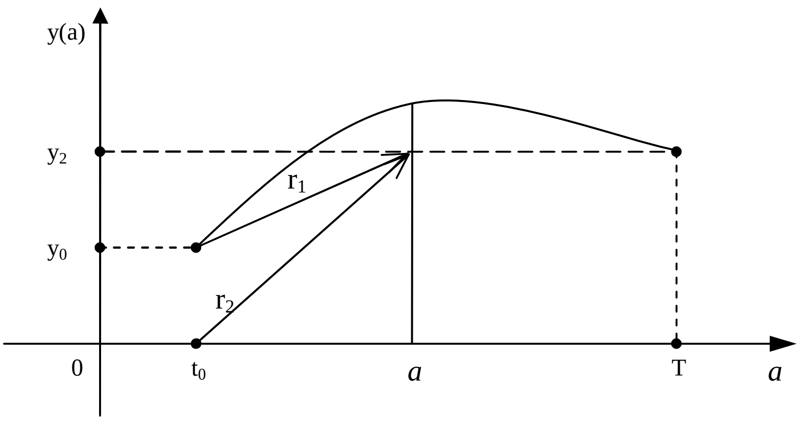
$$y = y_0 e^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(s)ds} + \frac{n}{m}\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\int\limits_{s}^{t} p(\tau)d\tau} f_1(s)ds + d\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\int\limits_{s}^{t} p(\tau)d\tau} f_2(s)ds, \qquad (38)$$

где $\frac{n}{m}$ и d определяются соответственно формулам (34) и (37).

Следует отметить, что нагрузки (34) можем рассматривать как функции переменного *a*. В этом случае y_0 и y_2 являются параметрами.

Видно, что функция нагрузки (34) на отрезке $a\in[t_0,T]$ дает нам график решения (38).

Приведем этот график



$$r_1 = \sqrt{(a-t_0)^2 + (y(a)-y_0)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(a-t_0)^2 + y^2(a)}$$

О комплексных собственных значениях будет отдельный разговор.

Здесь нагрузка y(*a*) определяется формулой (34).

Задачи *оптимизации с нагрузкой и нагрузочно-собственными функциями* будет предметом исследования в следующих статьях.

Литература:

1. Шарипов С., Шарипов К.С. Управление решения дифференциального уравнения. // Вестник ИГУ, № 12, 2004.
2. Шарипов С. О построении программных управлений объектами с заданной скоростью движения. //КТУ. Доклады 1 международной конференции (19-22 июня), - Бишкек, 1992.
3. Шарипов К.С. Регулярные возмущения и методы решения краевых задач. //Вестник ИГУ, № 22, 2009.