ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

**УДК 517.956.226**

# О ГРАНИЧНЫХ И НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЗВЕЗДНЫХ ОБЛАСТЯХ

**ПЕТРУШКО И.М*., КАПИЦЫНА Т.В.*, ОМУРАЛИЕВ С.Б.****
**МЭИ, Москва, **КГТУ им. И. Раззакова*
izvestiya@ktu.aknet.kg

Пусть область Q, граница которой принадлежит классу $C^{1+\lambda}$, $0<\lambda<1$, является строго звездной относительно некоторой точки. Не умаляя общности, можно считать, что начало координат содержится в Q, и область Q строго звездна относительно начала координат. Для краткости такую область будем называть просто звездной.

В этом случае границу $\partial Q$ области $Q$ можно задать уравнением |x|=F(x), где F(x)- положительная однородная функция нулевой степени: $\partial Q=\{|x|=F(x)\}$.

Область Q при этом задается неравенством $Q=\{|x|<F(x)\}$.

Решение задачи $\Delta u=-1,\ x\in Q,\ u|_{\partial Q}=0$ будем обозначать через $\rho(x)$.

Обозначим через $Q^{\delta}$, $0<\delta\le\delta_0$, подобласть области Q: $Q^{\delta}=\{|x|<(1-\delta)F(x)\}$ с границами $\partial Q^{\delta}=\{|x|=(1-\delta)F(x)\}$ и наряду с расстоянием $r(x)=\min\limits_{y\in\partial Q}|x-y|,\ x\in Q$, будем рассматривать расстояние $\tilde r(x)=1-\dfrac{|x|}{F(x)}$, удовлетворяющее для всех $x\in Q$ неравенствам $\lambda_2^{-1}r(x)\le\tilde r(x)\le\gamma_2 r(x)$, с постоянной $\gamma_2>0$.

Обозначим через $Q^T$ цилиндр $Q\times(0,T)$.

Рассмотрим в $Q^T$ уравнение:

$$Lu\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x,t)u_{x_i}\right)_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)u_{x_i}+a(x,t)u=f(x,t)\quad(1)$$

с вещественными коэффициентами $a_{ij},a_i,a$, принадлежащими $C^1\left(\overline{Q}^T\right)$.

Уравнение (1) будем предполагать параболическим в $Q^T$, т.е. для любой точки $x\in Q^{\delta}$, $\delta\in(0,\delta_0]$, и для любых $t\in[0,T]$ существует такая $\gamma_\delta>0,\ \gamma_\delta\to0$ при $\delta\to0$, что для всех $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in R$:

$$\Phi(x,\xi,t)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\ge\gamma_\delta|\xi|^2.$$

Для $(x_0,t)\in\partial Q\times(0,T)$ квадратичная форма вырождается, т.е.

$$\Phi(x_0,\xi,t)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x_0,t)\xi_i\xi_j\ge0.$$

Однако, будем предполагать, что существует такая постоянная $\gamma^0>0$, что для всех $(x_0,t)\in\partial Q\times(0,T)$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\gamma^0 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0,t)\nu_i\nu_j \le \left(\gamma^0\right)^{-1},$$

где $\nu(x_0)$ - вектор внешней по отношению к Q единичной нормали к поверхности $\partial Q$ в точке $x_0$.

Будем предполагать, что правая часть уравнения (1) $f(x,t)\in L_2\left(Q^T\right)$.

Справедлива следующая лемма.

**Лемма.** Пусть $u(x,t)$ - обобщенное из $W^{1,0}_{2,loc}\left(Q^T\right)$ решение уравнения (1), правая часть которого $f(x,t)\in L_{2,loc}\left(Q^T\right)$. Тогда для любого $\delta\in(0,\delta_0]$ и для любого $T'\in(T/2,T)$ справедливо равенство:

$$\frac{1}{2}\int_{Q^\delta} u^2(x,T')\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)dx-\frac{1}{2}\int_{Q^\delta} u^2(x,\beta)\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)dx+$$

$$+\int_\beta^{T'}\int_{Q^\delta}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)dxdt-\frac{1}{2}\int_\beta^{T'}\int_{\partial Q^\delta}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{|\nabla\rho|}u^2dsdt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_\beta^{T'}\int_{Q^\delta}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)\right)_{x_i}u^2dxdt-\frac{1}{2}\int_\beta^{T'}\int_{Q^\delta}\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\rho_{x_i}\right)_{x_j}u^2dxdt+$$

$$+\int_\beta^{T'}\int_{Q^\delta} au^2\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)dxdt=\int_\beta^{T'}\int_{Q^\delta} fu\rho\left(\frac{x}{1-\delta}\right)dxdt. \quad (2)$$

Будем говорить, что принадлежащая $W^{1,0}_{2,loc}\left(Q^T\right)$ функция u(x,t) удовлетворяет граничному условию $u|_{\partial Q\times(0,T)}=\varphi(x,T)$, (3)

где $\varphi(x,t)\in L_2(\partial Q\times(0,T))$ в смысле $L_2, T'\in(T/2,T)$

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\int_\beta^{T'}\int_{\partial Q}\left(u((1-\delta)x,t)-\varphi(x,t)\right)^2dsdt=0. \quad (3')$$

Будем также говорить, что принадлежащая $W^{1,0}_{2,loc}\left(Q^T\right)$ функция u (x,t) удовлетворяет начальному условию

$$u|_{t=0}=u_0(x), \quad (4)$$

где $u_0(x)\in L_2(Q,r)$ в смысле $L_2$ с весом $r(x)$, если

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\int_{Q^\delta}\left(u(x,\beta)-u_0(x)\right)^2 r(x)dx=0. \quad (4')$$

**Теорема 1.** При любых $\varphi(x,t)\in L_2(\partial Q\times(0,T))$, $u_0(x)\in L_2(Q,r)$ и любой $f\in L_2\left(Q^T\right)$ первая смешанная задача (1), (3), (4) имеет обобщенное из $W^{1,0}_{2,loc}\left(Q^T\right)$ решение. Это решение единственно и для него справедлива оценка

$$\int_0^T\int_Q\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}r(x)dxdt+\int_Q\sum_{i,j=1}^{n}u^2(x,T)r(x)dx+$$

$$+\int_0^T\int_Q u^2(x,t)r(x)dxdt\le C\left(\|f\|^2_{L_2(Q^T)}+\|\varphi\|^2_{L_2(\partial Q\times(0,T))}+\|u_0\|^2_{L_2(Q,r)}\right).$$

Обозначим через $M(u)=\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{\partial Q^{\delta}} u^2 dsdt+\int\limits_{Q^{\delta}} u^2(x,\beta)r(x)dx$. Будем говорить, что функция u(x,t) принадлежит классу Харди $H_2$, если для любого T '∈(T/2,T) $\sup\limits_{\substack{\delta\in(0,\delta_0]\\ \beta\in(0,\delta_0]}} M(u)<\infty$. ($H_2$)

**Теорема 2.** Для того, чтобы обобщенное из $W^{2,1}_{2,loc}(Q^T)$ решение уравнения (1) с $f\in L_2(Q^T)$ принадлежало классу $H_2$ необходимо и достаточно, чтобы для любого T '∈(T/2,T) выполнялось неравенство $\int\limits_0^{T'}\int\limits_Q\left(\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}+u^2\right)\rho(x)dxdt<\infty.$ (5)

**Определение.** Будем говорить, что принадлежащая $W^{2,1}_{2,loc}(Q^T)$ функция u(x,t) имеет предел в среднем на границе ∂Q × (0,T), если существует заданная на ∂Q × (0,T) функция $\varphi(x,t)\in L_2(\partial Q\times(0,T))$ такая, что $\lim\limits_{\substack{\delta\to0\\ \beta\to0}}\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{\partial Q}(u((1-\delta)x,t)-\varphi(x,t))^2 dsdt=0.$ (6)

Будем также говорить, что принадлежащая $W^{2,1}_{2,loc}(Q^T)$ функция r(x,t) имеет предел в среднем с весом r(x) при t→+0, если существует заданная в Q функция $u_0(x)\in L_2(Q,r)$ такая, что $\lim\limits_{\substack{\delta\to0\\ \beta\to0}}\int\limits_{Q^{\delta}}(u(x,\beta)-u_0(x))^2 r(x)dx=0$ (7)

**Теорема 3.** Пусть Q – звездная область, а функция u(x,t) является обобщенным из $W^{2,1}_{2,loc}(Q^T)$ решением уравнения (1). Для того, чтобы функция u(x,t) имела предел в среднем на границе ∂Q × (0,T) и имела предел в среднем с весом r(x) при t→+0 необходимо и достаточно, чтобы функция u(x,t) принадлежала классу $H_2$.

Из теоремы 2 и 3 следует, что следующие условия эквиваленты:

1. Обобщенное из $W^{2,1}_{2,loc}(Q^T)$ u(x,t) решение уравнения (1) принадлежит классу Харди $H_2$ $\left(f(x,t)\in L_2(Q^T)\right)$.

2. Справедливо условие типа Литтлвуда-Пели:

$$\int\limits_0^{T'}\int\limits_Q\left(\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}+u^2\right)\rho(x)dxdt<\infty$$

3. Существуют такие функции $\varphi(x,t)\in L_2(\partial Q\times(0,T))$ и $u_0(x)\in L_2(Q,\rho)$, что

$$\lim\limits_{\substack{\delta\to+0\\ \beta\to+0}}\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{\partial Q}(u((1-\delta)x,t)-r(x,t))^2 dsdt=0;$$

$$\lim\limits_{\substack{\delta\to+0\\ \beta\to+0}}\int\limits_{Q^{\delta}}(u(x,\beta)-u_0(x))^2(\rho-\delta)dx=0.$$

## Литература


1. Петрушко И.М. О граничных и начальных значениях параболических уравнений // Математический сборник, 1984, т. 125(167), с. 487-521.
2. Петрушко И.М., Черных Е.В. О начально-краевой задаче для уравнений с меняющимся направлением времени // Вестник МЭИ, 2000, N 6, с. 60-70.
3. Пятков С.Г. Разрешимость начально-краевых задач для одного нелинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск, НГУ, 1987.
4. Кислов Н.В. Неоднородные краевые задачи для дифференциально-операторного уравнения смешанного типа и их приложение // Математический сборник, 1984, т. 125, вып. 1, с. 19-37.