УДК 517.929

ЧЕКТЕЛГЕН КЕЧИГҮҮ МЕНЕН СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН АСИМПТОТИКАЛЫК ЭКВИВАЛЕНТТИГИН ИЗИЛДӨӨ

Панков Павел Сергееевич, КР УИА корреспонент-мүчөсү
E-mail: pps5050@mail.ru КР УИА Математика институту,
Жээнтаева Жумагул Кеңешовна, ф.-м.и.к., доцент, E-mail: jjk_kuu@mail.ru
Кыргыз-Өзбек университети, Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Экинчи авторлош сунуштаган жана өркүндөтүлгөн чыгарылыштардын мейкиндигин камтыган мейкиндиктерине ажыратуу усулу менен чектүүкечигүү менен аргументтүү сызыктуу дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы маселенин чыгарылышын «экспоненционалдык өзгөрүүчү» жана «тез басаңдоочу» чыгарылыштарга асимптотикалык ажыратуунун жаңы жетиштүү сандык шарттары табылган.*

Ачкыч сөздөр: *дифференциалдык теңдеме, сызыктуу теңдеме, кечигүүчү аргумент, баштапкы маселе, чыгарылыштардын мейкиндиги,асимптотика.*

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Аннотация: *По предложенному вторым соавтором и усовершенствованному методу расщепления пространства решений на подпространства найдены новые достаточные численные условия асимптотического разложения решений начальных задач для линейных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием аргумента на «экспоненциально меняющееся» и «быстро затухающее» решения.*

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, линейное уравнение, запаздывающий аргумент, начальная задача, пространство решений, асимптотика.*

INVESTIGATION OF ASYMPTOTICICAL EQUIVALENCE OF SOLUTIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH BOUNDED DELAY

Abstract: *By means of the second coauthor's improved method of splitting the space of solutions into subspaces, new numerical conditions are found providing an asymptotical expansion of solutions of initial value problems for linear differential equations with bounded delay into "exponentially varying" and "fast fading" ones.*

Key words: *differential equation, linear equation, retarded argument, initial value problem, space of solutions, asymptotic.*

1.Киришүү

Динамикалык системалардын чыгарылыштары үчүн баштапкы маселенин чыгарыштарынын ар түрдүү асимптотикалык касиеттерин бир түрдүү көрсөтүү үчүн асимптотикалык эквиваленттигинин түшүнүгүн киргиздик [1]. Андан кийин, Фактор-мейкиндик ченеми баштапкы мейкиндик ченеминен кичүү болгон кубулуш, «чыгарылыштар мейкиндигинин ченемин асимптотикалык төмөндөтүү» деп айтылган.

Чектүү кечигүү менен аргументтүү сызыктуу дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы маселенин чыгарыштары каралат.

Белгисиз функциянын алдындагы коэффициент "чектелген" жана кечигүүсү "кичине" болсо, [3] макалада айтылган чыгарылыштарды характеристикалык көрсөткүчтөрү боюнча эки бөлүккө бөлүштүрүү экендиги далилденген. Окшош шарттар аткарылса, чыгарылыштардын мейкиндигинин (атайын деп аталган) чыгарылыштардын бир өлчөмдүү камтылган мейкиндиги бар экен, ал төмөнкү касиетке ээ: каалаган чыгарылыш аргументтин өсүшүнө карай кандайдыр бир атайын чыгарылыштардын бирине умтулат [6]. Экинчи кубулуш биринчи кубулушту түшүндүрдү.

Мурда алынган натыйжалар [4] монографияда жана [6] макалада баяндап жазылды.

[7] макалада бул берилген кубулуш дайыма эле орун албасын көрсөтүүчү мисал түзүлгөн. [1] макалада бул кубулуш орун алган учурда кененирээк шартттарды издөө үчүн компьютердеги сандык эксперименттерди колдонууга мүмкүн экендиги көрсөтүлгөн.

Ушул натыйжаларга байланыштуу биз буга окшош кубулуштар фундаменталдык-айырмалык теңдемелер үчүн орун алышы керектиги тууралуу гипотезаны алып чыгып, аны далилдедик [2]. Мында бул жыйынтыктардын жардамы менен белгилүүлөрдү кеңейтүүчү чектелген кечигүү менен аргументи болгон сызыктуу дифференциалдык теңдемелер үчүн дал келүүчү натыйжалар алынган.

ЭСКЕРТҮҮ. Сызыктуу автономиялык динамикалык теңдемелер үчүн мейкиндиктин түзүлүшү жөнүндөгү суроо характеристикалык алгебралык теңдемелерди изилдөөгө келтирери белгилүү. Ошондуктан биз автономиялык эмес теңдемелерди гана изилдеп көрөбүз. (Автономиялык жана мезгилдүү теңдемелер салыштыруу үчүн колдонулуп жүрөт).

Бул макалада алынган натыйжалар өркүндөтүлгөн ыкмалар менен далилделет.

2. Асимптотикалык эквиваленттикти жана асимптотикалык төмөндөтүү кубулушун аныктоо

Белгилейли:

Λ - эң аз элементи болгон, эң көп элементи болбогон иреттелген көптүк ($\Lambda=\mathbf{R}_+\equiv[0,\infty)$ же $\Lambda=\mathbf{N}_0\equiv\{0,1,2,3,\ldots\}$)

Φ - баштапкы шарттардын топологиялык мейкиндиги;

Z –чыгарылыштардын маанилеринин топологиялык мейкиндиги.

Эгерде каалаган баштапкы маселенин чыгарылышы бар болсо, жалгыз болсо жана толук Λ көптүгүнө улантылган болсо, анда каалаган динамикалык системасы үчүн баштапкы маселелердин чыгарылыштарынын мейкиндиги $W(t,\varphi):\Lambda\times\Phi\to Z$ оператору түрүндө көрсөтүлө алат.

1-АНЫКТАМА. Баштапкы шарттардын мейкиндигинде «асимптотикалык эквиваленттиги» төмөнкүдөй аныкталат.

Эгерде Z- сызыктуу нормаланган мейкиндик болсо, анда

$$\varphi_1\sim\varphi_2\Leftrightarrow(\lim\{\ ||W(t,\varphi_1)-W(t,\varphi_2)||_Z:\ t\to\infty\}=0). \qquad (1)$$

Эгерде Z- метрикалык мейкиндик болсо, анда

$$\varphi_1\sim\varphi_2\Leftrightarrow(\lim\{\ \rho_Z(W(t,\varphi_1)-W(t,\varphi_2)):\ t\to\infty\}=0). \qquad (2)$$

Эгерде Z-бир калыптуу мейкиндик болсо, анда (анын диагоналынын айланаларынын Γ көптүгү болсун)

$$\varphi_1\sim\varphi_2\Leftrightarrow(\forall V\in\Gamma)\ (\exists t_1\in\Lambda)\ (\forall t>t_1)((W(t,\varphi_1),\ W(t,\varphi_2))\ \in V. \qquad (3)$$

2-АНЫКТАМА. Асимптотикалык эквиваленттик боюнча Φ мейкиндиги-нин Φ^* фактор-мейкиндиги асимптотикалык фактор-мейкиндик деп аталат.

3-АНЫКТАМА. Фактор-мейкиндик ченеми баштапкы мейкиндик ченеминен кичүү «чыгарылыштар мейкиндигинин ченемин асимптотикалык төмөндөтүү» кубулушу (ЧМЧАТК) деп аталат. (Биз бул белгилөөгө Φ мейкин-дигинин ченеми менен Φ^* мейкиндигинин ченемин кошобуз).

3. Ажыратылган мейкиндиктеги оператордук-айырмалык теңдемелер

Ω - кайсы бир нормаланган мейкиндик болсун. Операторлордун төрт удаалаштыгын (биринчиси – жөн эле сандар, экинчиси – функционалдар):

$$a_n:\ R\to R;\ b_n:\Omega\to R;\ c_n:\ R\to\Omega;\ d_n:\Omega\to\Omega,\ n\in N_0 \qquad (4)$$

$a_n\in[a_-,a_+];\ ||b_n||\le b>0,\ ||c_n||\le c>0,\ ||d_n||\le d>0$ чектөөлөрү менен жана оператор-дук-айырмалык теңдемелер системасын

$$x_{n+1}=a_nx_n+b_ny_n,\ y_{n+1}=c_nx_n+d_ny_n, n\in\mathbf{N}_0 \qquad (5)$$

карап чыгабыз.

ЭСКЕРТҮҮ. Эгерде (5) системада белгисиздерди «$x=\mu x_{жаңы}$, $y=\nu y_{жаңы}$» түрүндө алмаштырууну аткарсак, анда a_n жана d_n калат, b_n жана c_n өзгөрөт, бирок b_nc_n көбөйтүндү калат. Ошодуктан, $b=1$ ала алабыз, $\beta=bc$ белгилейли.

(5) түрүндөгү системанын жыйынтыктарын жалпылап [3], алабыз:

1-ТЕОРЕМА. Эгерде $a_- - d > 2\sqrt{\beta}$, анда

$$(\forall n \in \mathbf{N}_0)(X_n \geq q_-^{\,n};\ |Y_n| \leq wX_n) \qquad (6)$$

барабарсыздыктарын канааттандыруучу $\{X, Y\}$ чыгарылышы бар болот,мында

$$w := \left((a_- - d) - \sqrt{(a_- - d)^2 - 4\beta}\right)/2, q_- := \left(a_- + d + \sqrt{(a_- - d)^2 - 4\beta}\right)/2.$$

ЭСКЕРТҮҮ. Жогоруда келтирилгенаныктамаларды жалпылап, мындай чыгарылыштарды “атайын” же “экспоненттик өзгөрүүчү” депатайлы.

ЭСКЕРТҮҮ. Теореманын шарты өркүндөтүлбөс $a_- > d$ жана $a_- - d < 2\sqrt{\beta}$ учурда $x_{n+1}= a_-x_n- y_n$, $y_{n+1}= \beta x_n + dy_n$, $n\in N_0$ системасын карайлы. Характеристикалык теңдемеси: $\lambda^2 - (a_- + d)\lambda + a_-d + \beta = 0.$ Дискриминанты $D = (a_- - d)^2 - 4\beta < 0$, ошондуктан чыгарылыштары чайкалат.

2-ТЕОРЕМА. Эгерде$a_+d + \beta < q_-^{\,2}$, анда аркандай $\{x, y\}$ чыгарылышы үчүн жана атайын $\{X, Y\}$ чыгарылышы үчүн

$$\gamma\{x, y\} := lim\{x_n/X_n : n\to\infty\}, |\gamma\{x, y\} - x_n/X_n| \leq const\cdot\omega^n, n\in N,$$
$$\omega := (a_+d + \beta)q_-^{\,-2}$$

пределе жашайт.

3-ТЕОРЕМА. Эгерде 1-Теореманын жана 2-Теореманын шарттары атка-рылса, анда ар кандай $\{x,y\}$ чыгарылышы жана атайын $\{X, Y\}$ чыгарылышы үчүн

$$|x_n - \gamma\{x, y\}X_n| \leq const\cdot\omega^n(a_+ + \beta w)^n, n = 1,2, \ldots$$

барабарсыздыктары аткарылат.

4-ТЕОРЕМА. Эгерде 1-Теореманын жана 2-Теореманын шарттары атка-рылса жана $\omega_1 := \omega(a_+ + w) < 1$, анда аркандай $\{x, y\}$ чыгарылышы үчүн жана атайын $\{X, Y\}$ чыгарылышы үчүн $lim\{x_n - \gamma\{x, y\}X_n : n\to\infty\} = 0$ болот, ЧМЧАТК *((Y ченеми+1)→ 1)* бар экен.

4. Кечигүү менен дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштары үчүн баалоолор

$$z'(t)=P(t)z(t-h),\ t\in\mathbf{R}_+,\ h=const>0, \qquad (7)$$

түрүндөгү теңдеме

$$z(t)= \varphi(t),\ t\in [-h,0], \qquad (8)$$

баштапкы шарты менен каралууда.

Мында $\varphi(t)\in C[-h,0]$ и $P(t) \in C(\mathbf{R}_+)$ –берилген функциялар. “$|P(t)|\leq p_0$“ жана *“$p_-\leq P(t)\leq p_+$ ($p_-\leq 0 \leq p_+$, $|p_-|\leq p_+$)”* чектөөлөрүн карайбыз.

Мурунтадан [4], [5], [7] белгилүү болгондуктан, ЧМЧАТК *(∞→1)*

$$p_0h < e^{-1} = 0.367 \ldots \qquad (9)$$

жана

$$p_-=0, p_+h< 3.44\ldots \qquad (10)$$

учурлары үчүн орун алат. (Эки шарт жакшыланбаса).

$C^{(1)}[-h,0]$ мейкиндигин функция-туракту уулардын камтылган мейкиндик-теринин жана $y(0)=0$ шартын канаатандыруучу Ω функциялардын камтылган мейкиндигинин $C^{(1)}[-$

$h,0]=\mathbf{R}\times\Omega$ декарттык көбөйтүндүсүнүн түрүндө көрсөтө-бүз жана Ω мейкиндигине $||y||_\Omega := sup\{\ |y(t)/t|: -h\le t<0\}$ нормасын киргизебиз, анда $|y(t)| \le ||y||_\Omega |\ t\ |$.

Траектория боюнча h кадамына жылуу оператору үчүн төмөндөгүнү ала-быз:

$$S(x+y(\cdot))(t) = x + \int_{-h}^{t} P(s)(x+y(s))\,ds =$$

$$= x + \int_{-h}^{0} P(s)\big(x+y(s)\big)ds + \int_{0}^{t} P(s)\big(x+y(s)\big)\,ds\,.$$

(5) теңдемелерде h узундуктун каалаган кесиндидеги операторлорду A, B,C, D аркылуу белгилеп, $A = 1 + \int_{-h}^{0} P(s)\,ds;\ By(\cdot) = \int_{-h}^{0} P(s)\,y(s)ds;$
$C = \int_{0}^{t} P(s)\,ds;\ Dy(\cdot) = \int_{0}^{t} P(s)\,y(s)ds$ алабыз.

$\Delta_- := p_-h, \Delta_+ := p_+h$ (өлчөмсүз чоңдуктар) белгилөөлөрүн киргизебиз.

Мындан константалар үчүн бааларды табабыз:

$[a_-, a_+] = [1+p_-h, 1+p_+h] = [1+\Delta_-, 1+\Delta_+]$;

$$b = sup\int_{-h}^{0} |P(s)|\cdot|s|ds = \Delta_+h/2; c = \sup\left\{\left|\int_{0}^{t} P(s)\,ds\right| t^{-1}\right\} = p_+;$$

$$\beta = {\Delta_+}^2/2;\ d = sup\left\{\left|\int_{0}^{t} P(s)|s|\,ds\right| t^{-1}\right\} = \Delta_+/2.$$

1-Теореманын шарты: $1 + \Delta_- - \Delta_+/2 > 2\sqrt{\Delta_+^2/2}$, же

$$1 + \Delta_- > \Delta_+\big(1/2 + \sqrt{2}\big). \tag{11}$$

Эгерде бул шарт аткарылса, анда $Q := \sqrt{(a_- - d)^2 - 4\beta} =$

$$= \sqrt{(1+\Delta_- - \Delta_+/2)^2 - 4\cdot{\Delta_+}^2/2} = \sqrt{(1+\Delta_- - \Delta_+/2)^2 - 2{\Delta_+}^2};$$

$$w := (1+\Delta_- - \Delta_+/2 - Q)/2, q_- := (1+\Delta_- + \Delta_+/2 + Q)/2.$$

2-Теореманын шарты: $(1+\Delta_+)\Delta_+/2 + {\Delta_+}^2/2 < {q_-}^2$,
$\Delta_+/2 + {\Delta_+}^2 < {q_-}^2$, анда $\omega = \big(\Delta_+/2 + {\Delta_+}^2\big){q_-}^{-2}$.

4-Теореманын шарты:

$$\omega_1 := \omega(1 + \Delta_+ + (1 + \Delta_- - \Delta_+/2 - Q)/2) = \frac{1}{2}\omega(3 + \Delta_- + \Delta_+ - Q) < 1. \tag{12}$$

Келтирилген формулалардан жана катышуулардан конкреттүү бааларды алуу абдан эле татаал болгондуктан, Δ_-, Δ_+ баштапкы берилгендер менен эсептөө каталарды эске алуучу (далил боло алуучу [6]) төмөнкү программа pascal тилинде жазылган.

```
PROGRAM zhe07_04;
USES CRT, Dos;
var del, dem, ql, left, sq, om, om1: double;
begin {main}clrscr; writeln; writeln(' Zheentaeva-07.04.2020 ');
writeln('q_ omega     omega1 '); repeat
write('  Input del<=0, dem>0 (0 0 -> exit):  ');
readln (del,dem);
if 1.+del>dem*(0.5+sqrt(2.0)) then
begin
sq:=sqrt(sqr(1.0+del-0.5*dem)-2.0*sqr(dem));
ql:=(1.+del+0.5*dem+sq)/2.0;
```

```
om:=(0.5*dem+sqr(dem))/sqr(ql);
om1:=om*(1.5+0.5*del+0.75*dem-0.5*sq)+0.0001;
writeln(ql:10:4, om:10:4,om1:10:4);
end else writeln ('   not (11)')until ((del=0.0) and (dem=0.0));readlnend.
```

Ал боюнча эсептөөлөр Δ_-, Δ_+ үчүн асимптотикалык ажыроону камсыз кылуучу (ЧМЧАТК$(\infty \to 1)$) төмөнкү шарттарды берди:

Zheentaeva-07.04.2020		del dem	… omega1						
-0.02 0.44	…	0.9898	-0.04 0.43	…	0.9853	-0.06 0.42	…	0.9808
-0.08 0.41	…	0.9765	-0.10 0.40	…	0.9721	-0.12 0.39	…	0.9679

Алынган аймак (9) и (10) аймактарды бириктирип турат.

Корутунду

Мурда [4], [5], [7] кечигүү менен теңдемелердин бир параметрлүү мей-киндиктери каралган. Бул макалада сунуш кылынган усулдар менен үч жана эки параметрлүү жаңы мейкиндиктер каралды, жаңы натыйжалар табылды.

Адабияттар:

1. Панков П.С., Жээнтаева Ж. К. Асимптотическая эквивалентность решений эволюционных уравнений на полуоси // Тезисы докладов Международной нау-чно-практической конференции «Актуальные проблемы теоретической и прик-ладной математики», посвященной 100-летию со дня рождения профессора Кривошеина Л.Е. - Бишкек: КНУ им. Ж.Баласагына, 2019. - С. 20-21.
2. Жээнтаева Ж. К. Асимптотическое уменьшение размерности пространства решений нелинейных уравнений с запаздыванием // Вестник Института мате-матики НАН КР, 2019, № 2. - С. 52-58.
3. Жээнтаева Ж.К. Численные условия наличия асимптотики решений систем линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами // Естест-венные и математические науки в современном мире / Сборник статей по материалам XL междунар. научно-практ. конф. № 3 (38). - Новосибирск: Изд. АНС "СибАК", 2016. – С.76-80.
4. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – Москва: Наука, 1972. – 351 с.
5. Панков П.С. Асимптотическая конечномерность пространства решений одного класса систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения, 1977, том 13, № 4. – С. 455-462.
6. Панков П.С.Доказательные вычисления на электронных вычислительных машинах. - Фрунзе: Илим, 1978. - 179 с.
7. Рябов Ю.А. Применение метода малого параметра Ляпунова-Пуанкаре в тео-рии систем с запаздыванием // Инженерный журнал, 1961, том 1, № 2. - С.3-15.