

ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Асанов Авыт, д.ф.-м.н., профессор
Кыргызско-Турецкий университет «Манас», Кыргызстан, Бишкек
Каденова Зууракан Ажимаматовна
Заведующей лабораторией теории обратных задач ИМ
НАН КР, д.ф.-м.н., доцент

Аннотация: В данной работе, с помощью методом неотрицательных квадратичных форм, методам функционального анализа доказывается единственность и устойчивость решений линейных интегральных уравнений третьего рода с двумя независимыми переменными.

Ключевые слова: Линейные интегральные уравнения, третьего рода, с двумя независимыми переменными, единственность, устойчивость.

ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ ЭКИ ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИНИН ЖАЛГЫЗДЫГЫ ЖАНА ТУРУКТУУЛУГУ

Аннотация: Бул макалада терс эмес квадраттык формалар усулунун, функционалдык анализдин усулдарынын жардамы менен үчүнчү түрдөгү эки өзгөрүлмөлүү сызыктуу интегралдык тендемелердин чечимдеринин жалгыздыгы жана туруктуулугу далилденди.

Ачкыч сөздөр: үчүнчү түрдөгү эки өзгөрүлмөлүү сызыктуу интегралдык тендемелер, жалгыздык, туруктуулук.

UNITY AND STABILITY OF SOLUTIONS OF LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE THIRD KIND WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES

Abstract: In the present article the theorem about uniqueness and stability of the linear integral equations of the third kind two independent variables, with method of nonnegative quadratic forms and functional analysis methods.

Key words: linear integral equations, third kind, two variables, uniqueness, stability.

Рассмотрим уравнения вида

$$Ku \equiv m(t, x)u(t, x) + \int_a^b K(t, x, y)u(t, y)dy + \int_{t_0}^t H(t, x, s)u(s, x)dx + \\ + \int_{t_0}^T \int_a^b C(t, x, s, y)u(s, y)dy = f(t, x), (t, x) \in G, \\ G = \{(t, x) \in R^2, t_0 \leq t \leq T, a \leq x \leq b\} \quad (1)$$

где

$$K(t, x, y) = \begin{cases} A(t, x, y), & t_0 \leq t \leq T; \quad a \leq y \leq x \leq b; \\ B(t, x, y), & t_0 \leq t \leq T; \quad a \leq x \leq y \leq b, \end{cases} \quad (2)$$

$A(t, x, y), B(t, x, y), H(t, x, s), C(t, x, s, y)$ - известные функции, определенные соответственно в области

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(t, x, y): t_0 \leq t \leq T, a \leq y \leq x \leq b\} \\ G_2 &= \{(t, x, y): t_0 \leq t \leq T, a \leq x \leq y \leq b\} \\ G_3 &= \{(t, x, s): t_0 \leq s \leq t \leq T, a \leq x \leq b\} \quad G^2 = G \times G. \end{aligned}$$

$m(t, x)$ и $f(t, x)$ - известные, а $u(t, x)$ - неизвестная функция, $(t, x) \in G$.

Различные вопросы интегральных уравнений первого и третьего рода исследовались в [1-7]. Основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [6], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. В [3,4] для линейных интегральных уравнений Вольтерры первого и третьего рода с гладкими ядрами доказано существование, многопараметрического семейства решений.

Предполагается, что ядро $C(t, x, s, y)$ - интегрируемо с квадратом в области G^2 т.е. $C(t, x, s, y) \in L_2(G^2)$ и разлагается в ряд

$$C(t, x, s, y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(t, x) \varphi_i(s, y), \quad m \leq \infty, \quad 0 \leq \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ - собственные значения ядра $C(t, x, s, y)$ расположенные в порядке убывания их модулей $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ и $\varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x), \dots$ соответствующие ортонормированные собственные функции.

Обозначим

$$P(s, y, z) = A(s, y, z) + B(s, z, y), \quad (s, y, z) \in G_1. \quad (4)$$

Пусть выполняются следующие условия:

$$1) \quad m(t, x) \in C(G), \quad m(t, x) \geq 0, \quad v(t, x) \in G, \quad P(s, b, a) \in C[t_0, T], \quad P(s, b, a) \geq 0 \quad \forall s \in [t_0, T] \\ P'_y(s, y, a) \in C(G), \quad P'_y(s, y, a) \leq 0 \quad \forall (s, y) \in G,$$

$$P'_z(s, b, z) \in C(G), \quad P'_z(s, b, z) \geq 0 \quad \forall (s, z) \in G,$$

$$P''_{zy}(s, y, z) \in C(G_1), \quad P''_{zy}(s, y, z) \leq 0, \quad (s, y, z) \in G_1;$$

$$2) \quad H(T, y, t_0) \in C[a, b], \quad H(T, y, t_0) \geq 0 \quad \forall y \in [a, b]$$

$$H'_s(s, y, t_0) \in C(G), \quad H'_s(s, y, t_0) \leq 0 \quad \forall (s, y) \in G,$$

$$H'_\tau(T, y, \tau) \in C(G), \quad H'_\tau(T, y, \tau) \geq 0 \quad \forall (y, \tau) \in G,$$

$$H''_{\tau s}(s, y, \tau) \in C(G_3), \quad H''_{\tau s}(s, y, \tau) \leq 0, \quad (s, y, \tau) \in G_3 \text{ и для любого}$$

$$v(t, x) \in L_2(G), \quad \int_a^x A(t, x, y)v(t, y)dy, \quad \int_x^b B(t, x, y)v(t, y)dy, \quad \int_{t_0}^t H(t, x, s)v(s, x)ds \in L_2(G),$$

где $C[t_0, T]$, $C(G)$, $C(G_1)$ и $C(G_3)$ -пространство всех непрерывных и ограниченных функций соответственно в области $[t_0, T]$, G , G_1 и G_3 .

3) Выполняются хотя бы один из следующих четырех условий

- а) при почти всех $(t, x) \in G \quad m(t, x) > 0;$
- б) при почти всех $(s, y) \in G \quad P'_y(s, y, a) < 0;$
- в) при почти всех $(s, z) \in G \quad P'_z(s, b, z) > 0;$
- г) при почти всех $(s, y) \in G \quad H'_s(s, y, t_0) < 0;$
- д) при почти всех $(\tau, y) \in G \quad H'_\tau(T, y, \tau) > 0;$

4) Ядро $C(t, x, s, y)$ представимо в виде (3) и в разложении (3) все элементы последовательности $\{\lambda_i\}$ неотрицательны.

5) Ядро $C(t, x, s, y)$ представимо в виде (3) и в разложении (3) все элементы последовательности $\{\lambda_i\}$ положительны.

Теорема 1. Пусть выполняются 1), 2), 3), и 4). Тогда решение уравнения (1) единственно в пространстве $L_2(G)$.

Доказательство. В силу (2) уравнение (1) запишем в виде

$$m(t, x)u(t, x) + \int_a^x A(t, x, y)u(t, y)dy + \int_x^b B(t, x, y)u(t, y)dy + \int_{t_0}^t H(t, x, s)u(s, x)ds +$$

$$+ \int_{t_0}^T \int_a^b C(t, x, s, y)u(s, y)dyds = f(t, x) \quad (5)$$

Обе части уравнения (5) умножим на функции $u(t, x)$ и интегрируем по области G :

$$\begin{aligned}
& \int_{a}^{b} \int_{t_0}^T m(t, x) u^2(t, x) dt dx + \int_{a}^{b} \int_{t_0}^T \int_a^y A(s, y, z) \mu(s, z) \mu(s, y) dz ds dy + \int_{a}^{b} \int_{t_0}^T \int_y^b B(s, y, z) \mu(s, z) \mu(s, y) dz ds dy + \\
& + \int_{a}^{b} \int_{t_0}^T \int_s^b H(s, y, \tau) \mu(\tau, y) \mu(s, y) d\tau ds dy + \int_{a}^{b} \int_{t_0}^T \int_a^y \int_a^s C(s, y, \tau, z) \mu(\tau, z) \mu(s, y) dz d\tau ds dy = \\
& = \int_{a}^{b} \int_{t_0}^T f(s, y) \mu(s, y) ds dy.
\end{aligned} \tag{6}$$

Применяя формулу Дирихле из (6), имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{a}^{b} \int_{t_0}^T m(t, x) u^2(t, x) dt dx + \int_{a}^{b} \int_{t_0}^T \int_a^y [A(s, y, z) + B(s, z, y)] \mu(s, z) \mu(s, y) dz ds dy + \\
& + \int_{a}^{b} \int_{t_0}^T \int_s^b H(s, y, \tau) \mu(\tau, y) \mu(s, y) d\tau dy ds + \int_{a}^{b} \int_{t_0}^T \int_a^y \int_a^s C(s, y, \tau, z) \mu(\tau, z) \mu(s, y) dz d\tau ds dy = \\
& = \int_{a}^{b} \int_{t_0}^T f(s, y) \mu(s, y) ds dy.
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (4), имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{a}^{b} \int_{t_0}^T m(t, x) u^2(t, x) dt dx + \int_{t_0}^T \int_a^b \int_a^y P(s, y, z) \mu(s, z) \mu(s, y) dz dy ds + \int_{a}^{b} \int_{t_0}^T \int_s^b H(s, y, \tau) \mu(\tau, y) \mu(s, y) d\tau ds dy + \\
& + \int_{a}^{b} \int_{t_0}^T \int_a^y \int_a^s C(s, y, \tau, z) \mu(\tau, z) \mu(s, y) dz d\tau ds dy = \int_{a}^{b} \int_{t_0}^T f(s, y) \mu(s, y) ds dy.
\end{aligned} \tag{7}$$

Преобразуем второй и третий интеграл левой части уравнения (7). Дважды интегрируя по частям и применяя формулу Дирихле, имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^T \int_a^b \int_a^y P(s, y, z) \mu(s, z) \mu(s, y) dz dy ds = - \int_{t_0}^T \int_a^b \int_a^y P(s, y, z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_z^y u(s, v) dv \right) dz \mu(s, y) dy ds = \\
& = - \int_{t_0}^T \int_a^b \left\{ P(s, y, z) \left(\int_z^y u(s, v) dv \right) \right\} \Big|_a^y - \int_a^y P'_z(s, y, z) \left(\int_z^y u(s, v) dv \right) dz \Big\} \mu(s, y) dy ds = \\
& = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_a^b P(s, y, a) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\int_a^y u(s, v) dv \right)^2 \right] dy ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_a^b \int_a^y P'_z(s, y, z) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\int_z^y u(s, v) dv \right)^2 \right] dy dz ds =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \left[P(s, y, a) \left(\int_a^y u(s, v) dv \right)^2 \right] \Big|_a^b ds - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_a^b P'_y(s, y, a) \left(\int_a^y u(s, v) dv \right)^2 dy ds + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_a^b \left[P'_z(s, y, z) \left(\int_z^y u(s, v) dv \right)^2 \right] \Big|_z^b dz ds - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_a^b \int_z^b P''_{zy}(s, y, z) \left(\int_z^y u(s, v) dv \right)^2 dy dz ds = \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_0}^T P(s, b, a) \left(\int_a^b u(s, v) dv \right)^2 ds - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_a^b P'_y(s, y, a) \left(\int_a^y u(s, v) dv \right)^2 dy ds + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_a^b P'_z(s, b, z) \left(\int_z^b u(s, v) dv \right)^2 dz ds - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_a^b \int_z^b P''_{zy}(s, y, z) \left(\int_z^y u(s, v) dv \right)^2 dz dy ds;
\end{aligned} \tag{8}$$

где $P'_t(t, x, s)$, $P'_y(t, x, s)$ частные производные по t и s соответственно.

Дважды интегрируя по частям и применяя формулы Дирихле для второго интеграла, имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^T \int_a^b \int_{t_0}^s H(s, y, \tau) u(\tau, y) u(s, y) d\tau ds dy = \\
&= - \int_{t_0}^T \int_a^b \int_{t_0}^s H(s, y, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int_{\tau}^s u(\xi, y) d\xi \right) d\tau u(s, y) ds dy = \\
&= - \int_{t_0}^T \int_a^b \left[H(s, y, \tau) \left(\int_{\tau}^s u(\xi, y) d\xi \right) \right]_{t_0}^s - \int_{t_0}^s H'_\tau(s, y, \tau) \left(\int_{\tau}^s u(\xi, y) d\xi \right) d\tau \Big|_{t_0}^s u(s, y) dy ds = \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b H(s, y, t_0) \left(\int_{t_0}^s u(\xi, y) d\xi \right)^2 \Big|_{t_0}^T dy - \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^T H'_s(s, y, t_0) \left(\int_{t_0}^s u(\xi, y) d\xi \right)^2 ds dy + \\
&+ \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^T H'_\tau(s, y, \tau) \left(\int_{\tau}^s u(\xi, y) d\xi \right)^2 \Big|_{\tau}^T d\tau dy - \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^T \int_{\tau}^T H''_{\tau s}(s, y, \tau) \left(\int_{\tau}^s u(\xi, y) d\xi \right)^2 ds d\tau dy = \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b H(T, y, t_0) \left(\int_{t_0}^T u(\xi, y) d\xi \right)^2 dy - \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^T H'_s(s, y, t_0) \left(\int_{t_0}^s u(\xi, y) d\xi \right)^2 ds dy +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^T H'_\tau(T, y, \tau) \left(\int_\tau^T u(\xi, y) d\xi \right)^2 d\tau dy - \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^T \int_{t_0}^s H''_{\tau s}(s, y, \tau) \left(\int_\tau^s u(\xi, y) d\xi \right)^2 d\tau ds dy. \quad (9)$$

Выражения (8), (9) подставляя в (7) и учитывая (3), получим

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_{t_0}^T m(t, x) u^2(t, x) dt dx + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T P(s, b, a) \left(\int_a^b u(s, v) dv \right)^2 ds - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_a^b P'_y(s, y, a) \left(\int_a^y u(s, v) dv \right)^2 dy ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_a^b P'_z(s, b, z) \left(\int_z^b u(s, v) dv \right)^2 dz ds - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_a^b \int_a^y P''_{zy}(s, y, z) \left(\int_z^y u(s, v) dv \right)^2 dz dy ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_a^b H(T, y, t_0) \left(\int_{t_0}^T u(\xi, y) d\xi \right)^2 dy - \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^T H'_s(s, y, t_0) \left(\int_{t_0}^s u(\xi, y) d\xi \right)^2 ds dy + \\ & + \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^T H'_\tau(T, y, \tau) \left(\int_\tau^T u(\xi, y) d\xi \right)^2 d\tau dy - \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^T \int_{t_0}^s H''_{\tau s}(s, y, \tau) \left(\int_\tau^s u(\xi, y) d\xi \right)^2 d\tau ds dy + \\ & + \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\int_a^b \int_{t_0}^T \varphi(s, y) u(s, y) ds dy \right)^2 = \int_a^b \int_{t_0}^T f(s, y) u(s, y) ds dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть $f(t, x) \equiv 0$, $(t, x) \in G$.

Тогда, учитывая условия 1), 2), 3) и 4) из (1.3.10), имеем

$$\int_{t_0}^s u(\xi, y) d\xi = 0, \quad (s, y) \in G \quad \text{или} \quad \int_a^y u(s, v) dv = 0, \quad (s, y) \in G.$$

Отсюда $u(t, x) = 0$, при всех $(t, x) \in [t_0, T] \times [a, b]$ Теорема 1 доказана.

Семейство множеств корректностей M_α выделим следующим образом:

$$M_\alpha = \left\{ u(t, x) \in L_2(G) : \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_i^{-\alpha} |u^{(v)}|^2 \leq c \right\},$$

где $c > 0$, $0 < \alpha < \infty$,

$$u^{(v)} = \int_{t_0}^T \int_a^b u(t, x) \varphi_v(t, x) dx dt, \quad v = 1, 2, \dots, \infty.$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1)-2) и 5), $K(M_\alpha) \subset L_2(G)$ -образ M_α при отображении K . Тогда решение уравнение (1) единственно в $L_2(G)$ и на множестве $K(M_\alpha)$ существует равномерно непрерывный оператор K^{-1} , обратный к K , с гёльдеровым показателем $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е.

$$\|u(t, x)\|_{L_2} \leq c^{\frac{1}{2+\alpha}} \|f(t, x)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < \infty. \quad (11)$$

Доказательство. Из (10) имеем

$$\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v |u^{(v)}|^2 \leq \|f(t, x)\|_{L_2} \|u(t, x)\|_{L_2}. \quad (12)$$

Отсюда, в силу теоремы 2. Вытекает единственность решения уравнения в пространстве $L_2(G)$. С другой стороны, если $f(t, x) \in K(M_\alpha)$, то $u(t, x) \in M_\alpha$ и

$$\sum_{v=1}^{\infty} |u^{(v)}|^2 \leq \left[\sum_{v=1}^{\infty} \frac{|u^{(v)}|^2}{\lambda_v^{-1}} \right]^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} \cdot \left[\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{-\alpha} |u^{(v)}|^2 \right]^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

Отсюда, учитывая (11) и $u(t, x) \in M_\alpha$ имеем

$$\sum_{v=1}^{\infty} |u^{(v)}|^2 \leq [\|f(t, x)\| \|u(t, x)\|]_{+\alpha}^{\alpha} c^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (13)$$

Умножим обе части неравенства (13) на $\|u(t, x)\|_{+\alpha}^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, получим оценку (11).

Теорема 2 доказана.

Литература:

1. Apartsyn A.S. Nonclassical Linear Volterra Equations of the first kind. Utrecht, The Netherlands: VSP, 2002, 294 p. (in English).
2. Asanov A. Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the First Kind. Utrecht, The Netherlands: VSP, -1998, 272p.(in English).
3. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. // ДАН СССР.-1989.-Т.309., №5.,-С. 1052-1055.
4. Иманалиев М.И., Асанов А. // О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтера первого рода. // ДАН 2007. Т. 415. № 1. с. 14-17.
5. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. 1959. Т.127, № 1. с. 31-33.
6. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
7. Imanaliev M.I., Asanov A., Kadenova Z.A. A Class of Linier Intergral Eguations of the First Kind with Two Independent Variables. ISSN 1064-5624, Doklady Mathematics, 2014, Vol.89, № 1, pp.98-102.

