ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Б. ОСМОНОВА

Диссертационный совет Д 05.22.651

На правах рукописи
УДК: 517.97

Эрмекбаева Айжана Турдубековна

Оптимальное точечное управление тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ош – 2022

Работа выполнена на кафедре математического анализа Ошского государственого университета.

Научный руководитель: **Керимбеков Акылбек,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и информатики Кыргызско- Российского Славянского университета им. Б. Ельцина

Официальные оппоненты: **Джураев Абубакир Мухтарович**, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математические основы дизайна и архитектуры Кыргызско-Российского Славянского университета им. Б. Ельцина

Алишеров Абдулла, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Кыргызского государственного университета строительства, транспорта и архитектуры им. Н. Исанова

Ведущая организация: Ошский технологический университет им. М. Адышева, кафедра прикладная математика, (714018, Кыргызстан, г. Ош, ул. Исанова 81).

Защита диссертации состоится «30» сентября 2022 г. в 11.00 часов на заседании диссертационного совета Д 01.19.599 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Ошском государственном университет и Жалал-Абадском государственном университете имени Б. Осмонова (723500, г. Ош, ул. Ленина, 331, 203 ауд.).

Код онлайн трансляции защиты диссертации: https://vc.vak.kg/b/052-pvt-luj-9ih.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Ошского государственного университета, Жалал-Абадского государственного университета имени Б. Осмонова и на сайте www.oshsu.kg.

Автореферат разослан « 30» июня 2022 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент Бекешов Т.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Формирование основ теории оптимального управления для распределенных систем осуществлялось в 60-е годы прошлого столетия в работах А.Г. Бутковского (1963), А.И. Егорова (1962), Т.К. Сиразетдинова (1966) и др. В настоящее время теория получила широкое развитие и проникает в различные отрасли науки. Разрабатываются новые методы исследования и алгоритмы построения решения задачи оптимального управления для распределенных систем.

Одной из актуальных проблем теории оптимального управления распределенными системами является исследование разрешимости задачи нелинейного управления процессами, описываемых фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями и разработка конструктивных методов их решения. Задачи нелинейной оптимизации, где функции внешних тепловых потоков, представленных виде подвижных точечных источников, недостаточно изучены, в частности, не разработаны качественные методы исследования и конструктивные методы построения их решения. Поэтому разработка методов, позволяющих проводить качественные исследования задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, при наличии подвижных точечных источников, и довести их решение до численных расчетов является одной из актуальных проблем теории оптимального управления системами с распределенными параметрами.

Связь темы диссертации с крупными научными программами (проектами) и основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями. Диссертация выполнена в рамках научно-исследовательской работы «Решение задач синтеза при оптимальном управлении процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями» (Рег.номер №0007551) под руководством профессора А. Керимбекова Кыргызско-Российского Славянского университета МОиН.

Цели исследования:

1) исследовать разрешимости задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов в случае, когда функция внешнего подвижного точечного воздействия нелинейно зависит от скалярной и векторной функции управления;

2) установить необходимое и достаточное условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации теплового процесса в случае, когда внешние источники, действия которых описываются нелинейными функциями, являются подвижными.

Задачи исследования:

1) построить слабо-обобщенное решение краевой задачи в случае, когда управляемый процесс описывается фредгольмовыми интегро-дифференциальным уравнением при наличии точечных подвижных источников;
2) на основе принципа максимума получить условие оптимальности;
3) построить слабо обобщенное решение сопряженной краевой задачи;
4) получить нелинейное интегральное уравнение оптимального управления и исследовать его разрешимость;
5) построить полное решение задачи нелинейной оптимизации при подвижных точечных управлениях и исследовать сходимость его приближений по оптимальному управлению, по оптимальному процессу и по функционалу.

Научная новизна работы. Относительно новизны результатов отметим, что:

1) введено понятие слабо обобщенного решения интегро-дифференциального уравнения теплопроводности с интегральным оператором Фредгольма для краевой задачи управляемого процесса и указан алгоритм его построения при наличии внешних подвижных точечных управлений;
2) установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации с подвижными точечными управлениями при минимизации обобщенного квадратичного функционала. При этом показано, что скалярное оптимальное подвижное точечное управление определяется как решение интегрального уравнения нелинейно содержащего неизвестную функцию как под интегралом, так и вне интеграла, т.е. нелинейного интегрального уравнения специфического вида, а точечные подвижные компоненты оптимального векторного управления определяются как решение системы интегральных уравнений специфического вида;
3) разработан алгоритм построения полного решения задачи нелинейной оптимизации теплового процесса при наличии подвижных точечных источников и доказаны сходимости его приближений;
4) указаны специфические особенности рассматриваемой задачи нелинейной оптимизации, вызванные наличием интегрального оператора Фредгольма и сингулярно-обобщенной функции Дирака в уравнении.

Полученные результаты являются новыми и характеризуются как дальнейшее развитие решения задач нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами.

Практическая значимость полученных результатов:

Полученные результаты носят теоретический характер. Их можно использовать для развития качественных методов исследования и при разработке новых математических моделей задач нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами.

С другой стороны, разработанный метод решения задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов при наличии подвижного точечного источника является конструктивным и может быть использован при решении прикладных задач, связанных с процессом теплопередачи.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

1) построено слабо-обобщенное решение краевой задачи управляемого теплового процесса, описываемого интегро-дифференциальным уравнением с интегральным оператором Фредгольма в случае, когда действия внешних подвижных точечных источников описываются нелинейными функциями;
2) решение краевой задачи приведено к нелинейному интегральному уравнению для скалярного оптимального подвижного управления и к системе нелинейных интегральных уравнений специфических видов для компонент векторного оптимального подвижного управления и установлено достаточные условия их однозначной разрешимости в классе функций, для которых выполняется условие оптимальности второго порядка;
3) разработан алгоритм построения решения нелинейного уравнения скалярного точечного подвижного оптимального управления (или их систем в случае векторного управления) и полного решения задачи нелинейной оптимизации теплового процесса при наличии подвижных точечных источников;
4) доказаны сходимости приближений оптимального управления (скалярного и векторного), трех видов приближений оптимального процесса и функционала по норме соответствующих функциональных пространств;
5) выделены специфические особенности рассматриваемой задачи нелинейной оптимизации, вызванные наличием интегрального оператора Фредгольма и сингулярно-обобщенной функции Дирака в уравнении;
6) рассмотрены численные примеры, подтверждающие теоретические выводы.

Личный вклад соискателя. По результатам исследований опубликованы 6 статей, 2 тезиса. Постановка задачи принадлежит научному руководителю, а основные результаты, как построение слабо обобщенного решения, вывод условия оптимальности, определения достаточных условий существования решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения, алгоритм построения точного и приближенного решений нелинейной задачи оптимизации и сходимость приближенных решений получены соискателем. В совместных работах [5,6] соавторы Г.Б. Момбекова и Сейдакмат кызы Э. участвовали в обсуждении и оформлении результатов.

Апробации результатов исследований. Результаты исследований докладывались:

1) третья Международная научная конференция «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», приуроченная 45-летию учебно-научной деятельности в ВУЗах КР и 70-летию профессора Керимбекова А. Кыргызстан, Бишкек-Чолпон-Ата, 19–22 июня 2017 г.;
2) восьмая Международная конференция «Математический анализ, дифференциальное уравнение и приложения MADEA», посвященная 80-летию академика А. М. Самойленко, 17–23 июня 2018 г., Кыргызско-Турецкий университет "Манас", Чолпон-Ата, (Иссык-Куль), Кыргызстан;
3) третья Международная конференция математических наук (ICMS 2019) 04-08 сентября 2019 г., Мальтепский университет, Стамбул, Турция;
4) седьмая Международная конференция по управлению и оптимизации промышленных приложений (COIA-2020), 26–28 август 2020 г., г. Баку, Азербайджанская Республика (онлайн).

А также регулярно были обсуждены на научных семинарах кафедры прикладной математики и информатики КРСУ (научный руководитель проф. Керимбеков А.) и на региональном научном семинаре «Актуальные проблемы математики и их применения» под руководством члена-корреспондента НАН КР, профессора К. Алымкулова с 2017-2021 годах.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 6 научных статьях и в 2 тезисах, в том числе в рецензируемых журналах Кыргызской Республики – 4 статьи, в рецензируемых зарубежных журналах – 2 статьи. Общее количество набранных баллов составляет 181 балл.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, 17 разделов, заключения, списка использованной литературы, содержащего 67 наименования, 26 таблиц, 3 рисунка и приложения. Нумерация математических соотношений и формул производится по главам и параграфам в виде (a.b.c), где a–номер главы, b–номер параграфа в данной главе, c – номер формул, лемм и теорем в данном разделе. Объем диссертации 121 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Материалы диссертации изложены в следующей последовательности.

Во введении дано обоснование актуальности темы, общая характеристика работы, цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость, а также основные положения, выносимые на защиту.

В главе I «Обзор литератур и результатов исследования» сделан краткий обзор исследований, примыкающих к теме диссертации и изложено краткое содержание исследований. Также приведены примеры задач, приводящие к задачам оптимального управления системами с распределенными параметрами.

В главе II « Материал и методы исследования» указаны объекты и предмет исследования. Во втором параграфе упомянуты основные понятия и определения, а также описаны некоторые методы исследования диссертационной работы с целью ознакомления сущности исследования.

Объект исследования: управляемые тепловые процессы, описываемые фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями.

Предмет исследования: разрешимость задачи нелинейной оптимизации теплового процесса и доказательства сходимости приближений по управлению, оптимальному процессу и функционалу.

В главе III «Решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов при скалярном подвижном точечном управлении» исследована задача оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда распространение тепла происходят под действием точечного подвижного источника. При этом функция внешнего воздействия нелинейно зависит от управления.

Качество управления оценивается обобщенным квадратичным функционалом. Подробно изложена процедура построения слабо обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса на основе интегрального уравнения, эквивалентного краевой задаче.

Сформулирован принцип максимума для рассматриваемой задачи и получены условия оптимальности управления в виде равенства и дифференциального неравенства относительно функции внешнего теплового потока. Отмечено, что условие оптимальности в виде дифференциального неравенства сужает класс функций, для которых задача нелинейной оптимизации имеет решение.

Получены достаточные условия существования и единственности решения рассматриваемой задачи нелинейной оптимизации.

Разработан алгоритм построения точного решения задачи нелинейной оптимизации в виде тройки и доказана сходимость их приближений по управлению, оптимальному процессу и функционалу по норме соответствующих функциональных пространств.

Постановка задачи оптимизации: найти управление, который минимизирует интегральный обобщенный квадратичный функционал

$$J\left[u(t)\right]=\int_0^1\left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T p^2\left[t,u(t)\right]dt,\ \beta>0 \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи

$$v_t=v_{xx}+\lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau+\delta\left(x-x_0(t)\right)f\left[t,u(t)\right],\quad x\in(0,1),\ 0<t\le T, \tag{2}$$

$$v(0,x)=\psi(x),\quad x\in(0,1), \tag{3}$$

$$v_x(t,0)=0,\ v_x(t,1)+\alpha v(t,1)=0,\ 0<t\le T, \tag{4}$$

где $K(t,\tau)$ – заданная функция, она определена в области $D=\{0\le t\le T, 0\le\tau\le T\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)d\tau dt=K_0<\infty, \tag{5}$$

т.е. $K(t,\tau)\in H(D)$, $\xi(x)\in H(0,1)$, $\psi(x)\in H(0,1)$– заданные функции; $f[t,u(t)]\in H(0,T)$– заданная функция внешнего источника, которая нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(0,T)$ и удовлетворяет условию

$$f_u[t,u(t)]\ne 0,\ \forall t\in(0,T), \tag{6}$$

$\delta(x)$– дельта-функция Дирака, $x_0(t)$ – заданная функция, которая описывает закон движения точки приложения внешней силы и принимает значения от 0 до 1, λ – параметр, T – фиксированный момент времени, постоянная $\alpha>0$, $H(Y)$ – гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y .

Предполагая, что краевая задача (2) – (6) при каждом фиксированном управлении $u(t)\in H(0,T)$ имеет единственное слабо обобщенное решение, вычислим приращение функционала (1). Непосредственным вычислением, имеем соотношение

$$\Delta J(u) = -\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \delta\left(x - x_0(t)\right)\omega(t,x)dx\left[f(t,u+\Delta u) - f(t,u)\right]dt + \right.$$

$$+\int_0^T \beta\left[p^2(t,u+\Delta u) - p^2(t,u)\right]dt + \int_0^1 \Delta v^2(T,x)dx = -\int_0^T \Delta\Pi(\cdot,u)dt + \int_0^1 \Delta v^2(T,x)dx,$$

где $\Pi(\cdot,u)$ – функция типа Понтрягина.

Строим функцию типа Понтрягина:

$$\Delta\Pi\left[t,x,v(t,x),\omega(t,x),u(t)\right] = \Pi(\cdot,u+\Delta u) - \Pi(\cdot,u) = \int_0^1 \delta\left(x-x_0(t)\right)\omega(t,x)dx\left[f(t,u(t)+\Delta u) - \right.$$

$$\left. - f(t,u(t))\right] + \beta\left[p^2(t,u+\Delta u) - p^2(t,u)\right].$$

Для рассматриваемой задачи функция типа Понтрягина, которая считается зависящей от $u(t)$ имеет вид:

$$\Pi(\cdot,u) = \int_0^1 \delta\left(x-x_0(t)\right)\omega(t,x)dx\, f\left(t,u(t)\right) - \beta p^2\left[t,u(t)\right] = \omega\left(t,x_0(t)\right) f\left[t,u(t)\right] - \beta p^2\left[t,u(t)\right], \quad (7)$$

а $\omega(t,x) \in H(Q)$ является единственным слабо обобщенным решением сопряженной краевой задачи, соответствующим управлению $u(t) \in H(0,T)$

$$\omega_t + \omega_{xx} + \lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \le t < T, \quad (8)$$

$$\omega(T,x) = -2\left[v(T,x) - \xi(x)\right], \quad 0 < x < 1, \quad (9)$$

$$\omega_x(t,0) = 0, \; \omega_x(t,1) + \alpha\omega(t,1) = 0, \; 0 \le t < T. \quad (10)$$

Сформулируем принцип максимума: для того, чтобы в задаче оптимизации (1) –(6), управление $u^0(t) \in H(0,T)$ было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\Pi\left(t,\omega^0(t,x),v^0(t,x),u^0(t)\right) \quad (=) \quad \sup_{u\in Z}\Pi\left(t,\omega^0(t,x),v^0(t,x),u\right),$$

выполнялось почти всюду на отрезке $[0,T]$, где Z – открытое множество допустимых значений функции $u(t)$ в каждой точке $t \in [0,T]$.

Согласно (7), как следствие принципа максимума получим следующие соотношения

$$\Pi_u(\cdot,u) = \omega\left(t,x_0(t)\right) f_u\left[t,u(t)\right] - 2\beta p\left[t,u(t)\right] p_u\left[t,u(t)\right] = 0,$$

$$\Pi_{uu}(\cdot,u) = \omega\left(t,x_0(t)\right) f_{uu}\left[t,u(t)\right] - 2\beta\left(p^2\left[t,u(t)\right] + p\left[t,u(t)\right] p_{uu}\left[t,u(t)\right]\right) < 0,$$

которые в совокупности называются *условиями оптимальности.*

Слабо обобщенное решение краевой задачи (2) – (6) ищем в виде

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) z_n(x), \quad (11)$$

где $z_n(x)$ является решением краевой задачи

$$z_n'' + \lambda_n^2 z_n(x) = 0, \quad z_n'(0) = 0, \; z_n'(1) + \alpha z_n(1) = 0$$

и имеет вид

$$z_n(x)=\sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2+\alpha^2\right)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}}\cos\lambda_n x, \qquad n\in 1,2,3,\ldots,$$

причем система собственных функций $\{z_n(x)\}$ образует полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(0,1)$, числа λ_n, называемые собственными значениями, являются положительными корнями трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda=\alpha$ и удовлетворяют условиям

$$(n-1)\pi<\lambda_n<\frac{\pi}{2}(2n-1),\quad n=1,2,3,\ldots,\quad \lambda_n\le\lambda_{n+1},\ \lambda_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty.$$

Будем пользоваться разложениями

$$\delta\left(x-x_0(t)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}z_n\left(x_0(t)\right)z_n(x),\quad z_n\left(x_0(t)\right)=\int_0^1\delta\left(x-x_0(t)\right)z_n(x)\,dx,$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n z_n(x),\quad \psi_n=\int_0^1\psi(x)z_n(x)\,dx.$$

Разложение (11) подставляя в уравнение (2) получим равенство

$$v_n'(t)+\lambda_n^2 v_n(t)=\lambda\int_0^T K(t,\tau)v_n(\tau)\,d\tau+z_n\left(x_0(t)\right)f\left(t,u(t)\right). \tag{12}$$

Это уравнение рассматривая совместно с начальным условием

$$v_n(0)=\psi_n \qquad n=1,2,3,\ldots, \tag{13}$$

находим $v_n(t)$, как решение задачи Коши (12) – (13) по формуле

$$v_n(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(\lambda\int_0^T K(t,s)v_n(s)\,ds+z_n(x_0(\tau))f\left[\tau,u(\tau)\right]\right)d\tau. \tag{14}$$

Интегральное уравнение (14) перепишем в виде

$$v_n(t)=\lambda\int_0^T K_n(t,s)v_n(s)\,ds+a_n(t), \tag{15}$$

где ядро

$$K_n(t,s)=\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)\,d\tau,$$

свободный член

$$a_n(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}z_n(x_0(\tau))f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau.$$

Решение уравнения (15) находим по формуле

$$v_n(t)=\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n(s)\,ds+a_n(t), \tag{16}$$

где резольвента $R_n(t,s,\lambda)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\ldots$ определяется по формуле

$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s), n=1,2,3,\ldots, \tag{17}$$

где $K_{n,i}(t,s)$ – повторные ядра.

Ряд (17) сходится при значениях параметра λ, удовлетворяющих оценке

$$|\lambda|<\frac{\sqrt{2}\lambda_n}{\sqrt{K_0T}},$$

из которой следует, что радиус сходимости ряда Неймана увеличивается с ростом индекса $n=1,2,3,\ldots,$ коэффициента Фурье.

Установлены следующие оценки

$$|R_n(t,s,\lambda)|\le\frac{\sqrt{\int_0^T K^2(\eta,s)d\eta}}{\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}},\quad \int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds\le\frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2},$$

которые используются в дальнейшем.

Решение (16) перепишем в виде

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n(t,\lambda)+\int_0^T\varepsilon_n(t,\eta,\lambda)z_n(x_0(\tau))f(\tau,u(\tau))d\eta\right\}z_n(x),$$

где

$$\psi_n(t,\lambda)=\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2t}+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2s}ds\right],$$

$$\varepsilon_n(t,\tau,\lambda)=\begin{cases}e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, & 0\le\tau\le t,\\ \lambda\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, & t<\tau\le T.\end{cases}$$

Заметим, что функция $\varepsilon_n(t,\tau,\lambda)$ на линии $t=\tau$ терпит разрыв со скачком равным 1.

Процедура построения решения сопряженной краевой задачи (8)– (10) аналогична основной краевой задаче и это решение находим по формуле

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left[-h_n+\int_0^T\varepsilon_n(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right]G_n(T,t,\lambda)z_n(x),$$

где

$$G_n(T,t,\lambda)=e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T Q_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds.$$

Введем обозначение

$$h(t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0(t))h_n, \tag{18}$$

$$G[u(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0(t))\int_0^T \varepsilon_n(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau \tag{19}$$

и $\omega(t,x_0(t))$ выразим в виде

$$\omega(t,x_0(t))=2\left[h(t)-G\left(u(t)\right)\right]. \tag{20}$$

Так равенство (20), с учетом (18) – (19) примет вид

$$\beta\frac{p\left[t,u(t)\right]p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]}+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0)\int_0^T \varepsilon_n(T,\tau,\lambda)z_n(x_0)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0)h_n, \tag{21}$$

которое является нелинейным интегральным уравнением. Это уравнение исследуем согласно методике, разработанной профессором Керимбековым А.

Положим

$$q(t)=\beta\frac{p\left[t,u(t)\right]p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]}. \tag{22}$$

Равенство (22) однозначно разрешается относительно $u(t)$ согласно теореме о неявно заданной функции, т.е. существует функция φ, такая, что

$$u(t)=\varphi\left[t,q(t),\beta\right]. \tag{23}$$

Уравнение (21) перепишем

$$q(t)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0(t))\int_0^T \varepsilon_n(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(t))f\left[\tau,\varphi\left(\tau,\mathrm{q}(\tau),\beta\right)\right]d\tau=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0(t))h_n, \tag{24}$$

в операторной форме

$$q(t)=\overline{G}\left[q(t)\right]=h(t)-G_0\left[q(t)\right], \tag{25}$$

где

$$G_0[q]=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(t))\int_0^T E_n\left(T,\tau,\lambda\right)f\left[\tau,\varphi\left(\tau,q(\tau),\beta\right)\right]d\tau.$$

Предварительно доказываются, что функция $q(t)$ является элементом гильбертова пространства, а также оператор $G_0\left[q(t)\right]$ отображает пространство $H(0,T)$ в себя. Доказана ***теорема,*** что при выполнении этих условий операторное уравнение (25) имеет единственное решение в гильбертовом пространстве квадратично-суммируемых функций.

Решение операторного уравнения (25) строится методом последовательных приближений по следующей схеме

$$q_n(t)=\overline{G}\left[q_{n-1}(t)\right]=h(t)-\overline{G}_0\left[q_{n-1}(t)\right],\ n=1,2,3,\dots,$$

и точное решение определяется как

$$q^0(t)=\lim_{n\to\infty}q_n(t).$$

Имеет место оценка

$$\left\|q_0(t)-q_n(t)\right\|_{H(0,T)}\le\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|G_0\left[q_0(t)\right]-q_0(t)\right\|_{H(0,T)}<\varepsilon.$$

Подставляя найденное решение $q^0(t)$ в (24) находим оптимальное управление

$$u^0(t)=\varphi\left[t,q^0(t),\beta\right],$$

которое является решением нелинейного интегрального уравнения (21).

После определения оптимального управления, соответствующее к $u^0(t)$ решение краевой задачи находим по формуле

$$v^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds+a_n^0(t)\right)z_n(x),$$

где

$$a_n^0(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}z_n(x_0)f\left[\tau,u^0(\tau)\right]d\tau.$$

Это решение описывает *оптимальный процесс*.

После определения оптимального управления и оптимального процесса, минимальное значение функционала (1) вычислим по формуле

$$J\left[u^0(t)\right]=\int_0^1\left[v^0(T,x)-\xi(x)\right]^2+\beta\int_0^T p^2\left[t,u^0(t)\right]dt.$$

Найденная тройка $\left(u^0(t),v^0(t,x),I\left(u^0\right)\right)$ определяет полное решение задачи нелинейной оптимизации (1) – (6).

Алгоритм построения приближений оптимального управления определяются по формулам

$$u_n(t)=\varphi\left[t,q_n(t),\beta\right],\ n=1,2,3,...,$$

где $q_n(t)$ находится методом последовательных приближений, как решение нелинейного интегрального уравнения, и в пределе совпадает с точным решением, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}q_n(t)=q^0(t),$ причем удовлетворяет оценке

$$\left\|q^0(t)-q_n(t)\right\|_{H(0,T)}\le\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|G\left[h(t)\right]\right\|_{H(0,T)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ n=1,2,3,...,\ 0<\gamma<1.$$

Рассмотрим следующие виды приближений оптимального процесса:

1) $m-$е приближение оптимального процесса по «резольвенте»

$$V_m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\int_0^T\varepsilon_n^m(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[(\tau,u^0(\tau)\right]d\tau\right\}z_n(x),$$

где

$$R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),$$

$$\varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda)=\begin{cases} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int\limits_\tau^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}ds,\ 0\le\tau\le t,\\ \lambda\int\limits_\tau^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds,\ t\le\tau\le T.\end{cases}$$

2) $m,k-$е приближение оптимального процесса, построенное с учетом приближения оптимального управления

$$V_m^k(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int\limits_0^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\int\limits_0^T\varepsilon_n^m(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[(\tau,u_k(\tau)\right]d\tau\right\}z_n(x).$$

3) $m,k,r-$е конечномерное приближение оптимального процесса

$$V_m^{k,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int\limits_0^T R_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\int\limits_0^T\varepsilon_n^m(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[(\tau,u_k(\tau)\right]d\tau\right\}z_n(x).$$

Доказаны сходимости оптимального управления, оптимального процесса и функционала по норме гильбертова пространства.

В конце главы приведена численная реализация примера, подтверждающая теоретические выводы.

В главе IV «Решение задачи слежения при нелинейном оптимизации тепловых процессов в случае векторных подвижных точечных управлений» исследована разрешимость задачи слежения при подвижных точечных управлениях тепловыми процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма в случае, когда функции точечных источников являются нелинейными по управлению.

Критерием качества управления является минимизация обобщенного квадратичного функционала. Установлено, что оптимальные управления определяются как решения системы нелинейных интегральных уравнений, содержащие неизвестные функции как под интегралом, так и вне интеграла.

Разработан алгоритм построения решения этой системы и найдены достаточные условия ее однозначной разрешимости. Построено полное решение задачи слежения и исследована сходимость их приближения.

Постановка задача оптимизации: найти управление, минимизирующее значение интегрального обобщенного квадратичного функционала

$$J\left[u_1(t),...,u_m(t)\right]=\int\limits_0^T\int\limits_0^1\left[V(t,x)-\xi(t,x)\right]^2dxdt+\beta\int\limits_0^T\left\{p_1^2\left[u_1(t)\right]+...+p_m^2\left[u_m(t)\right]\right\}dt$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_t=V_{xx}+\lambda\int\limits_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau+\sum_{k=1}^m g_k(x)\delta(x-x_k(t))f_k\left[u_k(t)\right]dt, \tag{26}$$

$$V(0,x)=\psi(x),\quad x\in(0,1), \tag{27}$$

$$V_x(t,0)=0,\quad V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\quad 0<t\le T. \tag{28}$$

где $\xi(t,x)\in H(Q_r),\ Q_r=(0,1)\times(0,T),\qquad g_k(x)\in H(0,1);\ \psi(x)\in H_1(0,1),\ K(t,\tau)\in H(Д),$ $Д=\{0\le t,\tau\le T\}-$ известные функции; $\delta(x)-$ дельта-функция Дирака, $x_k(t)-$ заданные функции, описывающие закон движения точкек приложения внешних источников, областью значения которых является отрезок $[0,1]$; функции $f_k[u_k(t)]\in H(0,T);\ p_k[u_k(t)]\in H(0,T)$ при любых управлениях $u_k(t)\in H(0,T),$ причем обладают свойством монотонности, то есть

$$f_{ku_k}[u_k(t)]\ne 0,\ p_{ku_k}[u_k(t)]\ne 0,\ \forall t\in[0,T],$$

λ – параметр, T– фиксированный момент времени; $H(Y)-$ гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y.

Вычислим приращение функционала

$$\Delta J[u_1(t),...,u_m(t)]=-\int_0^T\Delta\Pi[t,V(t,x),\omega(t,x),u_m(t)]dt+\int_0^T\int_0^1\Delta V^2(t,x)dxdt, \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta\Pi[t,V(t,x),\omega(t,x),u(t)]&=\Pi[t,V(t,x),\omega(t,x),u_1(t)+\Delta u_1(t),...,u_m(t)+\Delta u_m(t)]-\\&-\Pi[t,V(t,x),\omega(t,x),u_1(t),...,u_m(t)],\end{aligned}\tag{30}$$

$$\Pi[t,V(t,x),\omega(t,x),u(t)]=\sum_{k=1}^m\left\{g_k[x_k(t)]\omega[t,x_k(t)]f_k[u_k(t)]-\beta p_k^2[u_k(t)]\right\}.$$

Функция $\omega(t,x)$ - является обобщенным решением краевой задачи

$$\omega_t+\omega_{xx}=\lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau-2[V(t,x)-\xi(t,x)],\quad 0<x<1,\quad 0\le t\le T,$$

$$\omega(0,x)=0,\quad 0<x<1,$$

$$\omega_x(t,0)=0,\ \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0,\ 0\le t<T,$$

которая сопряжена с основной краевой задачей (26) – (28). Она называется *сопряженной краевой задачей.*

Из (29) –(30) следует, что $\Delta J[u_1(t),...,u_m(t)]\ge 0$ на управлениях, на которых выполняется неравенство $\Delta\Pi[t,V(t,x),\omega(t,x),u_1(t),...,u_m(t)]\le 0.$ Эти соотношения лежат в основе принципа максимума для рассматриваемой задачи оптимального управления, то есть на управлениях, где функция $\Pi(\cdot)$ достигает максимума, а $J[u_1(t),...,u_m(t)]$ достигает минимума.

Получено необходимое условие оптимальности первого порядка

$$2\beta\frac{p_k[u_k(t)]p_{ku_k}[u_k(t)]}{f_{ku_k}[u_k(t)]}=g_k[x_k(t)]\omega[t,x_k(t)],\ k=1,2,..,m, \tag{31}$$

которое имеет место почти для всех $t\in[0,T]$.

Необходимое условие оптимальности второго порядка, согласно критерию Сильвестра, имеет вид неравенства

$$(-1)^j\prod_{k=1}^j f_{ku_k}[u_k(t)]\left(\frac{p_k[u_k(t)]p_{ku_k}[u_k(t)]}{f_{ku_k}[u_k(t)]}\right)_{u_k}>0,\ j=1,2,...,m$$

и выполняется почти при всех $t \in [0,T]$.

Решение нелинейного интегрального уравнения Фредгольма

$$v_n(t) = \lambda \int_0^T K_n(t,s) V_n(s) ds + a_n(t),$$

где

$$K_n(t,s) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} K(\tau,s) d\tau, K_n(0,s) = 0,$$

$$a_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \sum_{k=1}^m g_k[x_k(\tau)] z_n[x_k(\tau)] f_k[u_k(\tau)] d\tau$$

и имеет вид

$$v_n(t) = \lambda \int_0^T R_n(t,s,\lambda) a_n(s) ds + a_n(t),$$

где $R_n(t,s,\lambda)$ – резольвента ядра $K_n(t,s)$ определяется как сумма ряда Неймана, то есть

$$R_n(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t,s),\ K_{n,i+1}(t,s) = \int_0^T K_n(t,\tau) K_{n,i}(\tau,s) d\tau,\ i = 1,2,3,...$$

Получено решение краевой задачи (26) – (28) в следующем виде

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^T R_n(t,s,\lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right) z_n(x).$$

Решение соответствующей сопряженной краевой задачи определяется формулой

$$\omega(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^T B_n(\tau,t,\lambda) q_n(\tau) d\tau + q_n(t) \right) z_n(x), \tag{32}$$

где

$$q_n(t) = -2 \int_t^T e^{-\lambda_n^2(s-t)} [V_n(s) - \xi_n(s)] ds, \tag{33}$$

где $B_n(\tau,t,\lambda)$ – резольвента ядра

$$G_n(\tau,t) = \int_t^T e^{-\lambda_n^2(s-t)} K(\tau,s) ds,\ G_n(\tau,t) = 0,$$

при каждом n=1,2,3,… определяется, как сумма ряда Неймана вида

$$B_n(\tau,t,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} G_{n,i}(\tau,t),\quad G_{n,i+1}(\tau,t) = \int_0^T G_n(\eta,t) G_{n,i}(\tau,\eta) d\eta$$

и удовлетворяет оценке

$$\int_0^T B_n^2(\tau,t,\lambda) d\tau \le \frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\right)^2}.$$

Искомые управления $\{u_1^0(t),...,u_m^0(t)\}$ находим согласно условиям оптимальности. Эти управления $\{u_1^0(t),...,u_m^0(t)\}$ будут оптимальными управлениями.

В формуле (31) функцию $\omega(t,x)$ заменим согласно формулам (32)− (33) и получим систему уравнений

$$\beta\frac{p_k\left[u_k(t)\right]p_{ku_k}\left[u_k(t)\right]}{f_{ku_k}\left[u_k(t)\right]}=g_k\left[x_k(t)\right]\sum_{n=1}^{\infty}z_n\left[x_k(t)\right]h_n(t,\lambda)-g_k\left[x_k(t)\right]\sum_{n=1}^{\infty}z_n\left[x_k(t)\right]\times$$

$$\times\int_0^T W_n(t,\eta,\lambda)\sum_{j=1}^{m}q_j\left[x_j(\eta)\right]d\eta,\ \ k=1,2,..,m, \tag{34}$$

где

$$W_n(t,\eta,\lambda)=\int_0^T\varepsilon_n(y,t,\lambda)Y_n(y,\eta,\lambda)dy.$$

Далее исследована однозначная разрешимость системы нелинейных уравнений (34)

$$\beta\frac{p_k\left[u_k(t)\right]p_{ku_k}\left[u_k(t)\right]}{f_{ku_k}\left[u_k(t)\right]}=\sigma_k(t),\ \ k=1,2,..,m.$$

Из этого соотношения, согласно теореме о неявной функции, управление $u_k(t)$ определяется однозначно

$$u_k(t)=\varphi_k\left[t,\sigma_k(x),\beta\right],\ k=1,2,3,...,m. \tag{35}$$

Введя вектор-функции

$$\sigma(t)=\left\{\sigma_1(t),...,\sigma_m(t)\right\},\ \overline{\theta_n}\left[t\right]=\left\{\theta_{1n}\left[x_1(t),...,\theta_{mn}\left[x_m(t)\right]\right]\right\},$$

$$\varphi\left[t,\sigma(t),\beta\right]=\left\{\varphi_1\left[t,\sigma_1(t),\beta\right],...,\varphi_m\left[t,\sigma_m(t),\beta\right]\right\},$$

$$f\left(t,\varphi\left[t,\sigma(t),\beta\right]\right)=\left\{f_1\left(\varphi_1\left[t,\sigma_1(t),\beta\right]\right),...,f_m\left(\varphi_m\left[t,\sigma_m(t),\beta\right]\right)\right\},$$

$$h(t,\lambda)=\left\{h^{(1)}(t,\lambda),...,h^{(m)}(t,\lambda)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\theta}_n(t)h_n(t,\lambda)$$

систему уравнений (34) перепишем в векторной и операторной форме

$$\sigma(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\theta}_n(t)\left\{h_n(t,\lambda)-\int_0^T\omega_n(t,\eta,\lambda)\tilde{\theta}_n^{*}(\eta)f\left(\varphi\left[\eta,\sigma(\eta),\beta\right]\right)d\eta\right\}, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\omega}\left[\boldsymbol{\sigma}\right]+\boldsymbol{h} \tag{37}$$

где $\sigma(t),\ \tilde{\theta}_n(t),\ \tilde{\theta}_n^{*}(\eta),\ f\left(\varphi\left[\eta,\sigma(\eta),\beta\right]\right)$ – вектор-столбцы.

Предварительно доказываются, что вектор-функции $h(t,\lambda)$ и $\omega\left[\sigma(t)\right]$ являются элементами гильбертова пространства $H^m(0,T)$. Доказана ***теорема,*** что при выполнении этих условий операторное уравнение (37) имеет единственное решение в гильбертовом пространстве $H^m(0,T)$.

Решение системы (36) определяется как предел последовательности $\sigma_{(n)}(t)$, которые определяются методом последовательных приближений

$$\sigma_{(n)}(t)=\omega\left[\sigma_{(n-1)}(t)+h(t,\lambda)\right],\ n=1,2,3,...,$$

где нулевые приближения $\sigma^{(0)}(t)$ выбирается произвольно, в частности $\sigma_{(0)}(t)=h(t,\lambda)$. При этом имеет место оценка

$$\left\|\tilde{\sigma}(t)-\sigma_{(n)}(t)\right\|_{H^m(0,T)}\leq\frac{\left(2f^0\varphi^0(\beta)\right)^n}{1-(2f^0\varphi^0(\beta))}\left\|\omega(\sigma_{(0)}(t)\right\|_{H^m(0,T)}.$$

Таким образом, найденное решение $\tilde{\sigma}(t)=\left\{\tilde{\sigma}_1(t),...,\tilde{\sigma}_m(t)\right\}$ подставляя в (35) находим искомые управления

$$u_k^0(t)=\varphi_k\left[t,\tilde{\sigma}_k(t),\beta\right],\ k=1,2,3,...,m.$$

Соответствующее этим управлениям решение краевой задачи определяется формулой

$$V^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds+a_n^0(t)\right)z_n(x),$$

где

$$a_n^0(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\sum_{k=1}^m g_k\left[x_k(\tau)\right]z_n\left[x_k(\tau)\right]f_k\left[u_k^0(\tau)\right]d\tau.$$

По найденным $u_k^0(t)$ и $V^0(t,x)$ вычислим минимальное значение функционала

$$J\left[u_1^0(t),...,u_m^0(t)\right]=\int_0^T\int_0^1\left[V^0(t,x)-\xi(t,x)\right]^2dxdt+\beta\int_0^T\sum_{k=1}^m p_k^2\left[u_k^0(t)\right]dt.$$

Таким образом найденная тройка

$$\left\{u_1^0(t),...,u_m^0(t),V^0(t,x),\ J\left[u_1^0(t),...,u_m^0(t)\right]\right\}$$

является полным решением задачи слежения при нелинейном оптимальном управлении процессом распространения тепла под действием подвижных точечных источников.

Найдена оценка соответствующей приближениям оптимального управления

$$\left\|u^0(t)-u^{(n)}(t)\right\|^2_{H^m(0,T)}\leq\sum_{k=1}^m\left\|u_k^0(t)-u_k^{(n)}(t)\right\|^2_{H(0,T)}\leq\varphi_k^0(\beta)\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\left\|\omega\left[\sigma_{(0)}(t)\right]\right\|^2_{H^m(0,T)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Оценено соответствующее приближение оптимального процесса

$$\left\|V^0(t,x)-V_q^{j,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\leq\left\|V^0(t,x)-V^j(t,x)\right\|_{H(Q)}+\left\|V^j(t,x)-V_q^j(t,x)\right\|_{H(Q)}+$$
$$+\left\|V_q^j(t,x)-V_q^{j,r}(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[r\to\infty]{}0.$$

Установлена сходимость конечномерного приближения к минимальному значению функционала

$$\left|J\left[u^0(t)\right]-J_q^{j,r}\left[u^{(q)}(t)\right]\right|\leq\left|J\left[u^0(t)\right]-J_q^j\left[u^0(t)\right]\right|+\left|J^j\left[u^0(t)\right]-J_q^j\left[u^{(q)}(t)\right]\right|+$$
$$+\left|J_q^j\left[u^{(q)}(t)\right]-J_q^{j,r}\left[u^{(q)}(t)\right]\right|\xrightarrow[j,q,r\to\infty]{}0.$$

В конце главы проведена численная реализация на примере, подтверждающая теоретические выводы.

ВЫВОДЫ

В работе исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма. При этом управление объектом осуществляется с помощью подвижных точечных источников, действия которых описываются нелинейными функциями, а критерием качества управления является минимизация интегрального функционала.

Исследования проводились для задач нелинейной оптимизации тепловых процессов при скалярном и векторном точечном подвижном управлении, где требуется найти его компоненты такими, что изменение состояния управляемого процесса в течении всего времени управления мало отличался от заданного режима.

Установлены, что принцип максимума является как необходимым, так и достаточным условием оптимальности управления. Здесь скалярное управление определяется как единственное решение нелинейного интегрального уравнения, а компоненты векторного управления− как решение системы нелинейных интегральных уравнений, которые нелинейно содержат неизвестных функций как под интегралом, так и вне интеграла.

Разработаны алгоритмы построения полного решения задач нелинейной оптимизации и их приближений, а также доказаны сходимость приближений по норме соответствующих функциональных пространств.

Разработанный алгоритм построения решения задачи нелинейной оптимизации является конструктивными и может быть полезной при решении прикладных задач естествознания, физики и техники, а также при разработке новых моделей решения нелинейных задач управления, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Эрмекбаева, А.Т.** Условия оптимальности в задаче подвижного точечного управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / А. Керимбеков, А.Т. Эрмекбаева // Вестник КРСУ. − Бишкек, 2016.− № 5. − С. 45−50. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26452853
2. **Эрмекбаева, А.Т.** Подвижное оптимальное точечное управление тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями [Текст] / А.Т. Эрмекбаева // Вестник КРСУ. − Бишкек, 2017. −№ 1. – С. 71-75. https:// www.elibrary.ru/item.asp?id =29076781
3. **Эрмекбаева, А.Т.** Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации при подвижном точечном управлении тепловым процессом [Текст] / А. Керимбеков, А.Т. Эрмекбаева // Вестник КРСУ. − Бишкек, 2016. − № 8. − С. 10-15. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36486810
4. **Эрмекбаева, А.Т.** Численное решение задачи нелинейной оптимизации с подвижным управлением [Текст] / А.Т. Эрмекбаева // Вестник ОшГУ. − Ош, 2021. − № 1. – С. 114-123. https:// https://www.elibrary.ru/item.asp?id =47406397
5. **Ermekbaeva, A.T.** Numerical analysis of the influence of the initial parameters on the convergence rate of the approximate solution of the boundary value problem [Текст] / A. Kerimbekov, A.T. Ermekbaeva, G.B. Mombekova // Abstractbook/ ICMS 2019, AIP Conference Proceedings 2183, 070024. − 2019. − P. 110-112. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43219730
6. **Ermekbaeva, A.T.** On the solvability of the tracking problem in the optimization of the thermal process by moving point controls [Текст] / A. Kerimbekov, A.T. Ermekbaeva, E. Seydakmat k. // Журнал «Математика Карагандинского университета». – Караганда, 2021. − № 2(102). –– С. 67-73. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46270639

Эрмекбаева Айжан Турдубековнанын «Фредгольм тибиндеги интегро-дифференциалдык тендемеси менен мүнөздөлгөн жылуулук процесстерин оптималдуу чекиттик башкаруу» деген темада 01.01.02 –тендемелер, дифференциалдык динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: жылуулук процесси, алсыз жалпыланган чечим, функционал, оптималдык башкаруу, сызыктуу эмес интегралдык теңдеме, жакындаштырылган чечим, жыйналуучулук.

Изилдөөнүн объектиси: Фредгольм тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемелер менен мүнөздөлгөн башкарылуучу жылуулук процесстер.

Изилдөөнүн предмети: жылуулук процесстерин сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин чечүү жана оптималдуу башкаруу, оптималдуу процесс жана функционал боюнча анын жакындашуусунун жыйналуучулугун далилдөө.

Изилдөөнүн максаты: квадраттык функционал минималдаштыруу менен жылуулук процессин башкаруунун сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесинин бир маанилүү чыгарылышынын жеткиликтүү шарттарын аныктоо.

Изилдөөнүн методдору: изилдөөдө бөлүштүрүлгөн параметрлер системасында оптималдуу башкаруу теориясынын методдору , вариациялык эсептөө, математикалык физиканын теңдемелери, функционалдык анализ жана сызыктуу эмес интегралдык тендемелер теориясы колдонулду.

Алынган натыйжалар жана алардын жаңылыгы: башкарылуучу процесстин чектик маселеси үчүн Фредгольм интегралдык оператору менен жылуулук өткөрүмдүүлүктүн интегро-дифференциалдык теңдемесинин алсыз жалпыланган чечими түшүнүгүн киргизилген жана тышкы кыймылдуу чекиттердин башкаруулардын катышуусунда аны куруунун алгоритми көрсөтүлгөн; сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин чечими негизги функциясына карата барабарсыздык түрүндөгү кошумча шартты канааттандырышынын зарылдыгы көрсөтүлгөн; маселенин толук чечимин тургузуунун алгоритми иштелип чыккан жана алардын жакындашуулардын жыйналуусу далилденген.

Изилдөөнүн практикалык мааниси: сызыктуу эмес оптималдаштыруунун маселесинин чекиттик башкаруу функциясы сызыктуу эмес болгон учурдагы жакындаштырылган чыгарылышын табуунун түзүлгөн алгоритми жылуулук процессин башкарууга байланышкан маселелерди чыгарууда колдонулунат.

РЕЗЮМЕ

диссертации Эрмекбаевой Айжан Турдубековны на тему: «Оптимальное точечное управление тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: тепловой процесс, слабо обобщенное решение, функционал, оптимальное управление, нелинейное интегральное уравнение, приближенное решение, сходимость.

Объект исследования: управляемые тепловые процессы, описываемые фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями.

Предмет исследования: разрешимость задачи нелинейной оптимизации теплового процесса и доказательства сходимости приближений по управлению, оптимальному процессу и функционалу.

Цель исследования: установить достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации теплового процесса в случае точечного подвижного управления при минимизации квадратичного функционала.

Методы исследования: при исследовании были использованы методы теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, классического вариационного исчисления, уравнений математической физики, функционального анализа и теории нелинейных интегральных уравнений.

Полученные результаты и их новизна: введено понятие слабо обобщенного решения интегро-дифференциального уравнения теплопроводности с интегральным оператором Фредгольма и указан алгоритм его построения при наличии внешних подвижных точечных источников; установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации; разработан алгоритм построения полного решения задачи нелинейной оптимизации и доказаны сходимости его приближений.

Практическое значение исследования: разработанный алгоритм построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации при точечном управлении может быть использован в приложениях при решении практических задач, связанных с управлением тепловых процессов.

SUMMARY

Dissertations «Optimal point control of thermal processes described by a Fredholm integral-differential equations»by Ermekbaeva Ayzhana Turdubekovna is submitted for the scientific degree of physical-mathematical sciences candidate, specialty 01.01.02 - differential equations, dynamical systems and optimal control

Keywords: thermal processes, generalized solution, functionality, optimal control, nonlinear integral equation, approximate solution, convergence.

Research object is the controlled thermal processes described by a Fredholm integral-differential equations.

Research subject is the solvability of the problem of nonlinear optimization of the thermal process and proof of convergence of approximations on control, optimal process and functional.

Research purpose is to establish the sufficient conditions of the unique solvability of nonlinear optimization in thermal process in case of the point moving control while minimizing the quadratic functional.

Research methodology: the methods of the optimal control theory of distributed parameters systems, methods of classical variational calculus, methods of solving of equations of mathematical physics, methods functional analysis and the theory of nonlinear integral equations.

Obtained results and their novelty: the concepts of a weakly generalized solution of integro-differential equation of thermal conductivity with the Fredholm integral operator for the boundary value problem of a controlled process are introduced and an algorithm for its construction in the presence of external moving point sources is specified; sufficient conditions for unambiguous solvability of the nonlinear optimization problem were established; an algorithm for constructing a complete solution to the nonlinear optimization problem is developed and the convergence of its approximations was proved.

The practical significance of research: The developed algorithm for constructing the approximate solution of nonlinear optimization by point control can be used in applications for solving practical problems related to the management of the thermal processes.

Подписано в печать: 20.06.2022 г.
Заказ № 12 Тираж 100 шт.
Объем 1,25 п.л. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$

РИО “Билим”, ОшГУ, г. Ош, ул. Ленина, 331