ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

УДК 514.75 DOI: 10.35803/1694-5298.2020.2.302-307

ПАПИЕВА Т.М.,ШАМШИЕВА Г.А.
[1]Ошский государственный университет, Ош, Кыргызская Республика
PAPIEVA T.M.,SHAMSHIEVA G.A.
[1]Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic
(e-mail: tpapka73@mail.ru tpapieva73@gmail.com__gshamshieva@mail.ru)

О МИНИМАЛЬНОСТИ ОРТОГОНАЛЬНО-ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАННОМУ p-МЕРНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ В ПРОСТРАНСТВЕ E_{p+3}

ABOUT MINIMALITY OF ORTHOGONAL COMPLIMENTARY DISTRIBUTION TO GIVEN p-DIMENSIONAL DISTRIBUTION IN THE SPACE E_{p+3}

E_{p+3} мейкиндигинде берилген p-ченемдүү Δ_p бөлүштүрүүсүнө ортогоналдык-толуктоочу $\bar{\Delta}_3$ бөлүштүрүүсү каралган. Берилген Δ_p бөлүштүрүүсүнүн ийрилик вектору менен $\bar{\Delta}_3$ бөлүштүрүүсүнүн минималдуу жана $\bar{\Delta}_2$ бөлүштүрүүсүнүн N-минималдуу болушунун ортосундагы байланышы табылган.

Өзөк сөздөр: *бөлүштүрүү, ортогоналдык-кошумча бөлүштүрүү, орточо ийректин вектору, бөлүштүрүүнүн минималдуулугу, N - бөлүштүрүүнүн минималдуулугу.*

В пространстве E_{p+3} рассмотрено ортогонально-дополнительного распределение $\bar{\Delta}_3$ данному p-мерному распределению Δ_p. Найдены связи между минимальностью распределения $\bar{\Delta}_3$ и N-минимальностью распределения $\bar{\Delta}_2$ с вектором средней привизны данного распределения Δ_p.

Ключевые слова: *распределение, ортогонально-дополнительного распределение, вектор средней кривизны, минимальность распределения, N - минимальность распределения.*

It is considered the orthogonal complimentary distribution $\bar{\Delta}_3$ to given p-dimensional distribution Δ_p in the space E_{p+3}. It is defined the connection between minimality of $\bar{\Delta}_3$ and N-minimality of $\bar{\Delta}_2$ with the vector of mild curvature of the given distribution Δ_p.

Key words: *distribution, orthogonal complimentary distribution, vector of mild curvature, minimality of distribution, N - minimality of distribution.*

Введение. Теория распеделений на гладких многообразиях является значительной главой современной дифференциальной геометрии. Она позволила по новому подойти к ряду задач геометрии сетей, вскрыты тесные связи между этими двумя теориями.

Заданием p-мерного распределения Δ_p в некоторой области Ω евклидова пространства E_{p+3} инвариантным образом определяется распределение $\overline{\Delta}_3$, ортогонально дополнительные данному распределению .

В данной статье исследована связь между минимальностью распределения Δ_p и N-минимальностью распределения $\overline{\Delta}_2$ с вектором средней привизны данного распределения Δ_p.

Методы и материалы: В исследовании использованы метод внешних форм Картана, тензорной метод, метод Г.Ф.Лаптева.

Результаты исследования. Пусть $p+3$-мерное евклидово пространство E_{p+3} отнесено к подвижному реперу $\Re=(x,e_A),(A,B,C=1,2,...,p+3)$. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{x}=\omega^A\vec{e}_A,\ d\vec{e}_A=\omega^B_A\vec{e}_B\ . \tag{1}$$

Формы ω^A,ω^B_A удовлетворяют уравнениям инвариантности метрики:

$$dg_{AB}=g_{AK}\omega^K_B+g_{KB}\omega^K_A,$$

где $g_{AB}=e_A\cdot e_B$ – ковариантные компоненты метрического тензора пространства E_n и структурным уравнениям:

$$D\omega^A=\omega^B\wedge\omega^A_B\ D\omega^B_A=\omega^K_A\wedge\omega^B_K.$$

Контравариантные компоненты g^{BK} метрического тензора g_{AB} определяются из соотношения

$$g_{AB}g^{BK}=\delta^K_A \tag{2}$$

где δ^K_A – символ Кронекера.

Рассмотрим в области Ω пространства E_n распределение Δ_p и ортогонально дополнительное к нему распределение $\overline{\Delta}_3$. Векторы $e_1,...,\vec{e}_p$ репера $\Re$ расположим в плоскости $\Delta_p(x)$, а векторы e_{p+1},e_{p+2},e_{p+3} в плоскости $\overline{\Delta}_3(x)$, где $x\in\Omega$. При этом дифференциальные уравнения Δ_p будут:

$$\omega^\alpha_i=\Lambda^\alpha_{iA}\omega^A,\ (i,j,k=1,...,p;\alpha,\beta,\gamma=p+1,p+2,p+3), \tag{3}$$

а так как $\vec{e}_\alpha\in\overline{\Delta}_3(x)$, то

$$\omega^i_\alpha=\Lambda^i_{\alpha A}\omega^A\ . \tag{4}$$

В нашем репере $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_\alpha=0$, следовательно

$$g_{i\alpha}\cdot g_{\alpha i}=0\ . \tag{5}$$

В силу равенств (5) из соотношений (2) получим:

$g^{i\alpha}=g^{\alpha i}=0$,

и, следовательно

$$f_{ij}g^{jk}=\delta^k_i,\ g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}=\delta^\gamma_\alpha\ . \tag{6}$$

Из соотношений (6) получаем:

$$dg^{ij}=-\left(g^{ik}\omega^j_k+g^{kj}\omega^i_k\right), \tag{7}$$

$$dg^{\alpha\beta}=-\left(g^{\alpha\gamma}\omega^\beta_\gamma+g^{\gamma\beta}\omega^\alpha_\gamma\right). \tag{8}$$

Дифференцируя тождества $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_\alpha=0$ имеем:

$$\omega^{i}_{\alpha} = -g^{ik}\omega^{\beta}_{k} g_{\beta\alpha}, \quad \omega^{\alpha}_{i} = -g_{ij}\omega^{j}_{\beta} g^{\beta\alpha}. \tag{9}$$

Продолжив систему уравнений (3) и перенеся все слагаемые, содержащие главные формы, в правую часть, получим:

$$d\Lambda^{\alpha}_{ij} - \Lambda^{\alpha}_{ik}\omega^{k}_{j} - \Lambda^{\alpha}_{kj}\omega^{k}_{i} + \Lambda^{\beta}_{ij}\omega^{\alpha}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}_{ijA}\omega^{A} \tag{10}$$

$$d\Lambda^{\alpha}_{i\beta} - \Lambda^{\alpha}_{i\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta} - \Lambda^{\alpha}_{k\beta}\omega^{k}_{i} + \Lambda^{\gamma}_{i\beta}\omega^{\alpha}_{\gamma} = \Lambda^{\alpha}_{i\beta A}\omega^{A} \tag{11}$$

Если зафиксируем точку x (т.е. все формы $\omega^{A}_{\alpha} = 0$), то системы (10), (11) примут вид:

$$\delta\Lambda^{\alpha}_{ij} - \Lambda^{\alpha}_{ik}\pi^{k}_{j} - \Lambda^{\alpha}_{kj}\pi^{k}_{i} + \Lambda^{\beta}_{ij}\pi^{\alpha}_{\beta} = 0, \tag{10'}$$

$$\delta\Lambda^{\alpha}_{i\beta} - \Lambda^{\alpha}_{i\gamma}\pi^{\gamma}_{\beta} - \Lambda^{\alpha}_{k\beta}\pi^{k}_{i} + \Lambda^{\gamma}_{i\beta}\pi^{\alpha}_{\gamma} = 0, \tag{11'}$$

где $\pi^{B}_{A} = \omega^{B}_{A}\big|_{\omega^{A}=0}$ и δ – символ дифференцирования по вторичным параметрам. Так как формы $\omega^{\alpha}_{i}, \omega^{i}_{\alpha}$ главные, то $\pi^{\alpha}_{i} = 0, \pi^{i}_{\alpha} = 0$. Известно, что системы уравнений (10′), (11′) вполне интегрируемы.

Следовательно, система величин $\{\Lambda^{\alpha}_{ij}, \Lambda^{\alpha}_{i\beta}\}$ образует геометрический объект – фундаментальный объект первого порядка распределения Δ_p [1]. При этом компоненты $\Lambda^{\alpha}_{ij}, \Lambda^{\alpha}_{i\beta}$ образуют тензоры в отдельности. Тензор Λ^{α}_{ij} в общем случае не симметричен по индексам i, j. Величины

$$H^{\alpha}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Lambda^{\alpha}_{ij} - \Lambda^{\alpha}_{ji}\right)$$

образуют тензор. Этот тензор называют тензором неголономности распределения Δ_p. Распределение, тензор неголономности которого равен нулю тождественно, называется голономным. При этом система (3) вполне интегрируемая, через каждую точку x пространства проходит одно p-мерное интегральное многообразие, в каждой точке которого касательным элементом является соответствующий элемент распределения.

Векторы

$$\vec{M}_p = \frac{1}{p} g^{ij}\Lambda^{\alpha}_{(ij)}\vec{e}_{\alpha} \tag{12}$$

$$\vec{M}_3 = \frac{1}{3} g^{\alpha\beta}\Lambda^{i}_{(\alpha\beta)i}\vec{e} \tag{13}$$

называются векторами средних кривизн распределений Δ_p и $\overline{\Delta}_3$ соответственно. Если вектор средней кривизны распределения равен нулю, то распределение называется минимальным.

Система величин $\left\{\sum_i \Lambda^{i}_{p+1,i}, \sum_i \Lambda^{i}_{p+2,i}, \sum_i \Lambda^{i}_{p+3,i}\right\}$ образует геометрический объект типа ковектора. Ковектор $K_{\alpha} = \sum_i \Lambda^{i}_{\alpha i}$ в пространстве $\overline{\Delta}_3(x)$ определяет плоскость $\overline{\Delta}_2(x) \subset \overline{\Delta}_3(x)$, проходящую через точку x_i

$$K_{\alpha} y^{\alpha} = 0.$$

Ее вектором нормали в $\overline{\Delta}_3(x)$ будем вектор

$$K = g^{\alpha\beta} K_{\beta}\vec{e}_{\alpha}.$$

Из формулы (9) имеем:

$$\Lambda^{\alpha}_{ik} = -g^{\alpha\beta} g_{ij}\Lambda^{j}_{\beta k}. \tag{14}$$

$$\Lambda^{\alpha}_{i\gamma} = -g^{\alpha\beta} g_{ij} \Lambda^{j}_{\beta\lambda}.$$

В силу (14) получим:

$$g^{ik}\Lambda^{\alpha}_{(ik)} = g^{ik}\Lambda^{\alpha}_{ik} = -g^{\alpha\beta} g_{ij}\Lambda^{j}_{\beta k}\Lambda^{ik} = -g^{\alpha\beta}\sum_k \Lambda^{k}_{\beta k}.$$

Тогда

$$\vec{M}_p = \frac{1}{p} g^{ik}\Lambda_{(ik)}^{\alpha}\vec{e}_\alpha = -\frac{1}{p} g^{\alpha\beta}\sum_k \Lambda_{\beta k}\vec{e}_\alpha = -\frac{1}{p} g^{\alpha\beta} K_\beta \vec{e}_\beta,$$

т.е.

$$\vec{M}_p = -\frac{1}{p}\vec{K}.$$

Вектор $\vec{e}_{p+3}$ направим по вектору M_p, а векторы e_{p+1}, e_{p+2} расположим в плоскости $\overline{\Delta}_2(x)$. Тогда имеем

$$\vec{M}_p = \frac{1}{p} g^{ij}\Lambda^{p+3}_{(ij)}\vec{e}_{p+3}, \tag{15}$$

$$g^{ij}\Lambda^{p+1}_{(ij)} = 0,\ g^{ij}\Lambda^{p+2}_{(ij)} = 0,\ e_\alpha \cdot e_{p+3} = 0.$$

В выбранном репере дифференциальные уравнения распределения $\overline{\Delta}_3(x)$ будут

$$\omega^{i}_{\hat\alpha} = \Lambda^{i}_{\hat\alpha j}\omega^{j} + \Lambda^{i}_{\hat\alpha\beta}\omega^{\beta},$$

$$\omega^{p+3}_{\hat\alpha} = \Lambda^{p+3}_{\hat\alpha j}\omega^{j} + \Lambda^{p+3}_{\hat\alpha\beta}\omega^{\beta}.$$

Система величин $\left\{\Lambda^{i}_{\hat\alpha j},\ \Lambda^{p+3}_{\hat\alpha j},\ \Lambda^{i}_{\hat\alpha\beta},\ \Lambda^{p+3}_{\hat\alpha\beta}\right\}$ образует геометрический объект – фундаментальный объект первого порядка распределения $\overline{\Delta}_2(x)$.

Вектор средней кривизны этого распределения определяется следующим образом:

$$\vec{M}_2 = \frac{1}{2}\left(g^{\hat\alpha\hat\beta}\Lambda^{i}_{(\hat\alpha\hat\beta)}\vec{e}_i + g^{\hat\alpha\hat\beta}\Lambda^{p+3}_{(\hat\alpha\hat\beta)}\vec{e}_{p+3}\right).$$

Введем обозначения:

$$\vec{M}^{N}_2 = \frac{1}{2} g^{\hat\alpha\hat\beta}\Lambda^{i}_{(\hat\alpha\hat\beta)}\vec{e}_i, \tag{16}$$

$$\vec{M}^{T}_2 = \frac{1}{2} g^{\hat\alpha\hat\beta}\Lambda^{p+3}_{(\hat\alpha\hat\beta)}\vec{e}_{p+3}. \tag{17}$$

Вектор $\vec{M}^{N}_2$ называется вектором вынужденной средней кривизны распределения $\overline{\Delta}_2(x)$, а вектор $\vec{M}^{T}_2$ – вектором относительной средней кривизны этого распределения [*].

Из (14), (16) следует, что векторы M_p и $\overline{M}^{T}_2$ – коллинеарны. Таким образом, справедлива

Лемма. Вектор средней кривизны M_p распределения Δ_p и вектор относительной средней кривизны распределения $\overline{\Delta}_2$ коллинеарны.

Пусть распределение $\overline{\Delta}_3$ минимально, т.е. $\overline{M}_3 = \vec{0}$. Отсюда имеем:

$$g^{\alpha\beta}\Lambda^{i}_{(\alpha\beta)} = 0$$

или

$$g^{\hat\alpha\hat\beta}\Lambda^{i}_{(\hat\alpha\hat\beta)} + g^{\hat\alpha n}\Lambda^{i}_{(\hat\alpha n)} + g^{p+3,p+3}\Lambda^{i}_{p+3,p+3} = 0.$$

Так как $g^{\hat\alpha,p+3} = 0$, то из последнего равенства получим:

$$g^{p+3,p+3}\Lambda^{i}_{p+3,p+3} = -g^{\hat\alpha\hat\beta}\Lambda^{i}_{(\hat\alpha\hat\beta)}.$$

Умножим обе части этого равенства на вектор e_i и просуммируем по i.
Тогда получим:

$$g^{p+3,p+3}\Lambda^i_{p+3,p+3}\vec{e}_i = -g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\Lambda^i_{(\hat{\alpha}\hat{\beta})}\vec{e}_i, \tag{18}$$

где $\vec{\Lambda}_{p+3,p+3} = \Lambda^i_{p+3,p+3}\vec{e}_i$ - вектор вынужденной кривизны [**] поля вектора средней кривизны $\vec{M}_p$ распределения Δ_p.

Из (16), (18) имеем:

$$\vec{M}^N_2 = -\frac{g^{p+3,p+3}}{2}\vec{\Lambda}_{p+3,p+3}. \tag{19}$$

Таким образом, если распределение $\overline{\Delta}_3$ минимально, то вектор вынужденной средней кривизны распределения $\overline{\Delta}_2$ и вектор средней кривизны распределения Δ_p удовлетворяют условию (19), верно и обратное, т.е. если векторы $\overline{M}^N_2$ и $\Lambda_{p+3,p+3}$ удовлетворяют условия (19), то аспределение $\overline{\Delta}_3$ - минимально. Таким образом, справедлива

Теорема 1. Распределение $\overline{\Delta}_3$ будет минимальным тогда и только тогда, когда вектор вынужденной средней кривизны $\vec{M}^N_2$ распределения $\overline{\Delta}_2$ и вектор средней кривизны M_p распределения Δ_p удовлетворяют условию (19).

Выше мы предполагаем, что распределение $\overline{\Delta}_2$ не является N-минимальным, т.е. $\vec{M}^N_2 \neq 0$. Теперь ответим на вопрос: когда распределение $\overline{\Delta}_2$ является N-минимальным.

Пусть распределение $\overline{\Delta}_2$ – N-минимально, т.е. $\overline{M}^N_2 \neq \vec{0}$. Отсюда иммеем:

$$g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\Lambda^i_{(\hat{\alpha}\hat{\beta})} = 0.$$

Тогда вектор средней кривизны распределения $\overline{M}_3$ распределения $\overline{\Delta}_3(x)$ имеет вид (будем считать, что распределения $\overline{\Delta}_3(x)$ – не минимально):

$$\vec{M}_3 = \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}\Lambda^i_{(\alpha\beta)}\vec{e}_i = \frac{1}{3}g^{p+3,p+3}\Lambda^i_{(p+3,p+3)}\vec{e}_i,$$

или

$$\vec{M}_3 = \frac{1}{3}g^{p+3,p+3}\overline{\Lambda}_{p+3,p+3}, \tag{20}$$

Обратно, пусть имеет место равенство (20). Подставляя в (20) разложения векторов $\vec{M}_3$, $\overline{\Lambda}_{p+3,p+3}$ по базисным векторам, получим:

$$g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\Lambda^i_{(\hat{\alpha}\hat{\beta})} = 0.$$

Следовательно, распределение $\overline{\Delta}_2$ – N-минимально. Таким образом справедлива

Теорема 2. Пусть распределение $\overline{\Delta}_3$ – не минимально, тогда распределение $\overline{\Delta}_2$ является N-минимальным тогда и только тогда, когда имеет место равенство (20).

Следствие 1. Если распределение $\overline{\Delta}_2$ – N-минимально, то распределение $\overline{\Delta}_3$ является минимальным тогда и только тогда, когда $\Lambda_{p+3,p+3} = 0$, т.е. интегральные линии поля вектора средней кривизны распределения Δ_p являются асимптотическими на распределении $\overline{\Delta}_3$.

Следствие 1. Если распределение $\overline{\Delta}_3$ – минимально, то распределение $\overline{\Delta}_2$ будет N-минимальным тогда и только тогда, когда $\Lambda_{p+3,p+3} = 0$.

Выводы. Получены следующие результаты:

1. Распределение $\overline{\Delta}_3$ будет минимальным тогда и только тогда, когда вектор вынужденной средней кривизны $\vec{\vec{M}}_2^N$ распределения $\overline{\Delta}_2$ и вектор средней кривизны M_p распределения Δ_p удовлетворяют условию

$$\vec{\vec{M}}_2^N = -\frac{g^{p+3,p+3}}{2}\vec{\Lambda}_{p+3,\,p+3}\,.$$

2. Пусть распределение $\overline{\Delta}_3$ – не минимально, тогда распределение $\overline{\Delta}_2$ является N-минимальным тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\vec{\vec{M}}_3 = \frac{1}{3}g^{p+3,p+3}\vec{\Lambda}_{p+3,p+3}\,,$$

3. Если распределение $\overline{\Delta}_2$ – N-минимально, то распределение $\overline{\Delta}_3$ является минимальным тогда и только тогда, когда $\Lambda_{p+3,p+3} = 0$, т.е. интегральные линии поля вектора средней кривизны распределения Δ_p являются асимптотическими на распределении $\overline{\Delta}_3$.

4. Если распределение $\overline{\Delta}_3$ – минимально, то распределение $\overline{\Delta}_2$ будет N-минимальным тогда и только тогда, когда

$\Lambda_{p+3,p+3} = 0$.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Распределения касательных элементов. [Текст]/ Г.Ф. Лаптев. – ТрудыГеом. сем-ра, т.3. – М., 1971. – С. 29-48.
2. Кузьмин М.К. Сети, определяемые распределениями в евклидовом пространстве E_n и их обобщения. [Текст]/ М.К. Кузьмин. – В кн. Проблемы геометрии / Всесоюз. ин-т науч. и техн. информ., т. 7. – М., 1975. – С. 215-229.
3. Матиева Г. Геометрия p-распределения в евклидовом n-пространстве [Текст] / Г. Матиева. – Канд.дисс.., М., 1985. – 105 с.
4. Кузьмин М.К. О канонических сетях распределений на поверхностях евклидова пространства [Текст] / М.К. Кузьмин В кн. Проблемы геометрии / Всесоюз. ин-т науч. и техн. информ., т. 7. – М., 1975. – С. 231-248.
5. Какишев Ж.К. Асимптотические методы решения начальной задачи для сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [Текст] / Ж.К.Какишев, Б.А.Садыкова, Ж.У.Казакова // Вестник КГУСТА. – Бишкек: №1(63) 2019. - с.168-177.