УДК. 532.546

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЕЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

УРМАНБЕТОВ Р.Дж.
Кыргызский национальный аграрный университет им. К.И. Скрябина
г.Бишкек, Кыргызстан
izvestiya@ktu.aknet.kg

URMANBETOV R.Dj

Kyrgyzkiy National Agrarian University of the name K.I. Skryabin,
Bishkek. Kyrgyzstan
izvestiya@ktu.aknet.kg

Аннотация: Рассматривается начально - краевая задача, когда на теплофизические характеристики накладываются определенные ограничения при разработке математических моделей проникновения теплоты в почву.

За последние годы, несмотря на весьма хорошие достижения в области исследования теории теплопроводности в применении к естественной среде − почве, задача всегда усложнялась нелинейностью её теплофизических характеристик. Определение решения уравнения теплопроводности при любом произвольном задании функций λ(x,t), c(x,t) представляет исключительные трудности.

Ранее нами при исследовании уравнения теплопроводности [1]

$$c(x,\, t)\frac{dT(x,\, t)}{dt} = \frac{d}{dx}\left[\lambda(x,\, t)\frac{dT(x,\, t)}{dx}\right] \qquad (1)$$

предполагалось, что изменения теплофизических характеристик c(x,t) и λ(x,t) особенно существенны по глубине, причем они более резки и ярче выражены, чем её выраженные колебания. Вследствие этого за периоды, интересующие нас и укладывающиеся в интервалы вегетации растений, считали, что теплофизические характеристики приближенно равны постоянным величинам. На первых порах это нас устраивало.

Ниже рассмотрим задачу, учитывающую очень существенный фактор, а именно временной ход изменения коэффициентов теплопроводности λ и теплоемкости почвы c. Для изучения влияния временных изменений коэффициентов теплопереноса на термический режим необходимо прежде всего установить характер этих изменений – количественного изменения влажности и плотности за короткие промежутки времени − сутки. Экспериментально это сделать сложно, причем недостаток экспериментальных данных создает определенные трудности при построении математических моделей теплообмена в почве, учитывающих временные изменения коэффициентов теплопереноса. Существующие опыты показывают, что коэффициент теплопроводности в верхнем слое почвы меняется в течение суток как синусоида − достигает днем минимального, а ночью максимального значения. Такой ход коэффициента теплопроводности полностью соответствует наблюдаемому росту его по мере увеличения влажности. В работе [2] получены систематические и обширные (экспериментальные) данные, подтвердившие периодический ход в течение суток λ(t), причем для различных почв, глубин. Этот факт позволил перейти к формулированию более сложного, но зато более реально отражающего действительность уравнения (1).

Рассмотрим математическую модель, позволяющую раздельно оценивать влияние временного и глубинного хода коэффициентов теплопереноса на температурном поле в почве, представляя λ(x,t) и c(x,t) как произведения двух функций. В результате из (1) получим

$$c_1(x)c_2(t)\frac{\partial T(x,\, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_1(x)\lambda_2(t)\frac{\partial T(x,\, t)}{\partial x}\right]. \qquad (2)$$

I. Рассматриваемое уравнение можно решать при различных допущениях. Как и ранее в [3], полагаем, что обе теплофизические характеристики меняются с глубиной одинаковым образом, с одинаковым темпом и линейно, то есть

$$c_1(x) = c_0(1 - mx), \qquad \lambda_1(x) = \lambda_0(1 - mx), \tag{3}$$

где c_0, λ_0 – объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности на поверхности почвы. Далее предлагаем, что временные изменения λ намного резче проявляются, чем изменения c, в течение суток. Такое упрощение обосновано опытными данными, и его можно записать так [3]

$$c_2(t) = 1, \qquad \lambda_2(t) = 1 + \varphi(t) = 1 + A\cos\alpha t + B\sin\alpha t, \tag{4}$$

где A, B – коэффициенты, определяемые из опыта, α – угловая скорость вращения Земли вокруг оси. С учетом (3,4) уравнение (2) запишется в виде

$$\eta T_t = a[1 + A\cos\alpha t + B\sin\alpha t]\cdot[\eta T_{\eta\eta} + T_\eta], \qquad \eta = 1 - mx. \tag{5}$$

Для (5) ставятся следующие начально-краевые условия на поверхности почвы:

$$T(\eta,0) = \psi(\eta), \quad T(1,t) = \varphi(t), \quad \eta = 1, -[1+\varphi(t)]\eta T_\eta(1,t) = \frac{\varphi(t)}{\lambda_0} = M_0 + M_1\cos\alpha t + M_2\sin\alpha t\cdot \tag{6}$$

На глубине η = H принимается условие ограниченности температуры, т.е. перестают ощущаться температурные колебания

$$T(H,t) = T_H const. \tag{7}$$

Решение (5) будем искать классическим методом

$$T(\eta,t) = f_0(t)\cdot f_1(\eta), \tag{8}$$

в результате имеем систему уравнений

$$\text{а. } f_0'(t) + \lambda a(1 + A\cos\alpha t + B\sin\alpha t)f_0(t) = 0,$$

$$\text{б. } \eta f_1''(\eta) + f_1'(\eta) + \lambda\eta f_1(t) = 0. \tag{9}$$

Определяя $f_0(t)$, $f_1(\eta)$ и подставляя в (8), получим решение уравнения (5)

$$T(\eta,t) = c_1\exp(B_1\cos\alpha t - A_1\sin\alpha t - \lambda at)\cdot I_0\left(2\sqrt{\lambda x}\right), \tag{10}$$

где I_0 – одно из частных решений уравнения Бесселя (9б), $B_1 = \lambda a\beta/\alpha$, $A_1 = -\lambda aA/\alpha$. Постоянные величины c_1 и λ определяются из условий (7,8).

II. Выше была рассмотрена задача о теплообмене в почве при следующих условиях. Закон изменения двух теплофизических характеристик по глубине происходил линейно и одинаково, температурный режим в почве считался периодическим. Ниже рассмотрим более общий подход, освобождаясь от вышеуказанных ограничений. Это важно, хотя любая заранее принятая закономерность изменения λ(x,t) и c(x,t) не может отразить весь характер изменения этих величин в реальной ситуации в натуральной почве. Весьма сложно и трудно даже грубо подобрать некоторую количественную зависимость для множества конкретных ситуаций.В уравнении (2) предполагаем, что λ(x,t) и c(x,t) − непрерывные на [0,h] функции, имеющие 1-е и 2-е производные, а также $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 > 0$, $c_1 > 0$.

Уравнение (2) преобразуем таким образом, чтобы в левой части не было коэффициентов, зависящих от x, а в правой – от t. В результате некоторых преобразований имеем следующее уравнение:

$$P(t)T_t = Q(x)T_{xx} + Q_1 T_x , \tag{11}$$

где $\quad P(t) = \dfrac{c_2(t)}{\lambda_2(t)}, \quad Q(x) = \dfrac{\lambda_1(x)}{c_1(x)}, \quad Q_1(x) = \dfrac{\lambda_{1x}(x)}{c_1(x)}$.

Данная задача формулируется следующим образом. Найти решение уравнения (11) при начальном распределении температуры в почве

$$T(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) \tag{12}$$

и постоянстве её, начиная с некоторой глубины $T(x, t)|_{x=h} = T_h$, а на поверхности почвы задаются граничные условия I рода

$$T(0, t) = \psi(t) . \tag{13}$$

Данную задачу можно решить в зависимости от функций $P(t)$, $Q(x)$, $Q_1(x)$.

Пусть $\quad P(t) = P_0 t^n, \quad Q(x) = q_0 x^m, \quad Q_1(x) = q_0 m x^{m-1}$, тогда имеем

$$a_0 t^n T_t = x^{m-1}\left[XT_{xx} + mT_x\right], \qquad a = p_0/q_0 . \tag{14}$$

Решение последнего уравнения будем искать в трехпараметрическом автомодельном виде

$$T(x, t) = t^k f(z), z = x^\alpha \cdot t^\beta . \tag{15}$$

Определяя частные производные $z_t = \beta x^\alpha \cdot t^{\beta-1}$, $\quad z_x = \alpha x^{\alpha-1} \cdot t^\beta$, $T_t = t^{k-1}\left[kf + \beta z f'\right]$, $T_x = \alpha t^k x^{-1} z f'$, $T_{xx} = \alpha t^k x^{-2} z\left[\alpha z f'' + (\alpha - 1) f'\right]$ и подставляя в (14), после некоторых преобразований получим

$$\alpha^2 z^2 f''(z) + \alpha(\alpha + m - 1) z f' - a_0 t^{n-1} \cdot x^{2-m}\left[\beta z f' + kf\right] = 0 . \tag{16}$$

Здесь возможны следующие случаи.

А. При $m = 2$, $n = 1$ уравнение (16) переходит в уравнение Эйлера [4]

$$\alpha^2 z^2 f'' + (\alpha^2 + \alpha - \text{à}_0 \beta) z f' - \text{à}_0 \text{ê}\, f = 0 . \tag{17}$$

Из условий: $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 - \dfrac{\alpha^2 + \alpha - a_0\beta}{\alpha^2}$, $\quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -\dfrac{a_0 k}{\alpha^2}$ определяем λ_1 и λ_2 . Вначале получаем квадратное уравнение $\quad \alpha^2 \lambda_1^2 + (\alpha - a_0\beta)\lambda_1 - a_0 k = 0$, оттуда

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\alpha - a_0\beta) \pm \sqrt{D}}{2\alpha^2}, \qquad D = (\alpha - a_0\beta)^2 + 4a_0 k\alpha^2 .$$

Если $D \geq 0$, то λ_1 и λ_2 действительны и решение имеет вид

$$f(z) = z^{\lambda_1}(c_1 + c_2 \ln z), \text{ при } \lambda_1 = \lambda_2,$$

$$f(z) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}, \text{ ïðè } \quad \lambda \neq \lambda_2 . \tag{18}$$

Например, при $\beta = k\alpha$, $\quad \lambda_1 = \dfrac{ka_0}{\alpha}, \quad \lambda_2 = \dfrac{1}{\alpha}$ решение уравнения (14) с учетом (15) запишется

$$T(x, t) = t^k \cdot \left[c_1 z^{\lambda_1} + c_2 z^{\lambda_2}\right], \qquad z = x^\alpha \cdot t^{k\alpha} . \tag{19}$$

С другой стороны, при $k = -1/a_0$, $\lambda_1 = \lambda_2$ величина T имеет форму

$$T(x, t) = t^{-1/a_0} \cdot z^{-1/\alpha} \cdot \left[c_1 + c_2 \ln z\right], \qquad z = x^\alpha \cdot t^{-\alpha/a_0} . \tag{20}$$

Если λ_1 и λ_2 равны $r \pm iS$ при $D < 0$, то решение уравнения (14) имеет вид

$$T(x,t) = t^k \cdot x^r \cdot \left[c_1 \cos(S\ln z) + c_2 \sin(S\ln z)\right], \tag{21}$$

где $r = -\dfrac{\alpha \cdot a_0\beta}{2\alpha^2}$, $S = \dfrac{\sqrt{D}}{2\alpha^2}$

Б. Если $\alpha = 2 - m$, $\beta = n - 1$, то уравнение (16) запишется в форме

$$zf''(z) + \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{a_0\beta}{\alpha^2} z\right] f'(z) - \frac{a_0 k}{\alpha^2} f(z) = 0. \tag{22}$$

Введем новую переменную $\xi = -\dfrac{a_0\beta}{\alpha^2} z$, тогда, зная, что

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{a_0\beta}{\alpha^2} f''(\xi), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \xi}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) = \frac{a_0{}^2\beta}{\alpha^4} f''(\xi), \tag{23}$$

получим вырожденное гипергеометрическое уравнение Гаусса [3]

$$\xi f''(\xi) + \left[\frac{1}{\alpha} - \xi\right] f'(\xi) - \frac{k}{\beta} f(\xi) = 0. \tag{24}$$

Вырожденные гипергеометрические уравнения хорошо изучены, поэтому есть возможность рассмотреть различные его решения.
Если $1/\alpha$ не целое число, то получим два частных решения, которые имеют вид

$$f(\xi) = c_1 F\left(-\frac{k}{\beta}, \frac{1}{\alpha}, \xi\right) + c_2 \xi^{(\alpha-1)/\alpha} F\left(\frac{\alpha\beta - \beta - k\alpha}{\alpha\beta}, \frac{2\alpha+1}{\alpha}, \xi\right) \tag{25}$$

или с учетом (15) решение для искомой функции запишется

$$T(x,t) = t^k \cdot \left[c_1 F\left(-\frac{k}{\beta}, \frac{1}{\alpha}, \frac{a_0\beta}{\alpha^2}, \xi\right) + c_2 (\xi)^{(\alpha-1)/\alpha} \cdot F\left(\frac{\alpha\beta - \beta - k\alpha}{\alpha\beta}, \frac{2\alpha+1}{\alpha}, \frac{a_0\beta}{\alpha^2}, \xi\right)\right], \tag{26}$$

или при $\alpha = 2 - m \neq 0$, $\beta = n - 1 \neq 0$ получим

$$\begin{aligned} T(x,t) = t^k \cdot \Bigg[c_1 F\left(-\frac{k}{n-1}, -\frac{1}{m-2}, -\frac{a_0(n-1)}{(m-2)^2} x^{-(m-2)} \cdot t^{n-1}\right) + c_2 \left(-\frac{a_0(n-1)}{(m-2)^2} x^{-(m-2)} \cdot t^{n-1}\right)^{(1-m)/(2-m)} \cdot \\ \cdot F\left(\frac{(n-1)(1-m) - k(2-m)}{(n-1)(2-m)}, \frac{5-2m}{2-m}, -\frac{a_0(n-1)}{(m-2)^2} x^{-(m-2)} \cdot t^{n-1}\right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{27}$$

Два частных решения вида (27) исследуемого уравнения (14) могут быть записаны в виде алгебраических многочленов. Первое частное решение при $\dfrac{-k}{n-1} = N$ (где N – натуральное число) может принять вид полинома, а второе при

$$\frac{(n-1)(1-m) - k(2-m)}{(n-1)(2-m)} = N.$$

Причем эти решения имеют целых два класса частных решений.

Перепишем решение (27) как

$$T(x,t) = t^k \cdot \left[c_1 F(a,\ b,\ \xi) + c_2 \xi^{1-b} \cdot F(f - b + 1,\ 2 - b,\ \xi)\right], \tag{28}$$

где a, b, ξ определяются из решения (27). Если коэффициенты a = b = -N, где N – целое неотрицательное число, то

$$F(-m,\ -m,\ \xi) - \sum_{k=0}^{M} \frac{\xi^k}{k!} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} F(1,\ m+2,\ \xi) \qquad (29)$$

также является решением уравнения. В этом случае решение (28) перепишется

$$T(\xi,\ t) = t^k \cdot \left[c_1 F(-m,\ -m,\ \xi) - c_2 \frac{\xi^{N+1}}{(m+1)!} F(1,\ m+2,\ \xi) \right] \cdot \qquad (30)$$

Если величина $b = -1/(m-2) = 1$, то оба частных решения (28) совпадают.

Первое частное решение (28) при следующих функциональных соотношениях

$$F(a,\ b,\ \xi) = e^{\xi} F(b-a,\ b,\ -\xi), \qquad F(a,\ b,\ \xi) = (a/b) F'(a+1,\ b+1,\ \xi),$$

$$F(a,b,\xi) - F'(a,b,\xi) = \frac{b-a}{b} F(a,b+1,\xi), \quad aF(a,b,\xi) \cdot bF'(a,b,\xi) = \frac{a(a-b)}{b(b+1)} \xi F(a+1,b+2,\xi) \qquad (31)$$

может иметь другие классы частных решений. Аналогично и второе решение (28) с применением соотношений (31) также может иметь другие кассы новых решений. Все эти функциональные соотношения приводят к новым соотношениям между параметрами автомодельности n, m, и k.

Таким образом, в данной работе сделан более общий подход при выборе теплофизических коэффициентов почвы. Решена задача с начально-краевыми условиями, причем решения разработанной математической модели – уравнения − найдены в специальных функциях математической функции и в автомодельных формах. Определены несколько классов решений, которые сами имеют большое количество частных решений. Некоторые решения полезны при определении тепла рассматриваемой почвы, когда его закон и исследуемое уравнение можно записать в виде (11, 14).

Литература

1. *Нерпин С.В., Чудновский А.Ф.* Физика почв. – М.: Гидрометеоиздат, 1967.
2. *Забловская А.Г.* Исследование закономерностей в тепловым режиме почв Латвийской ССР. Автореф. Дисс. канд. тех. наук, − Л.: 1970.
3. *Чудновский А.Ф.* Физика теплообмена в почве. – М.: Гостехиздат, 1948.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференц. уравнениям. −М.: 1971.