

**Р.О. ОМОРОВ**

**РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ  
ИНТЕРВАЛЬНЫХ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**БИШКЕК - 2018**



УДК 519.6:55121.3  
ББК 22.213  
О – 57

Рекомендовано к изданию решением ученого совета  
Института физико-технических проблем и материаловедения  
им. акад. **Ж. Жеембаева** Национальной академии наук  
Кыргызской Республики

**Рецензенты:**

доктор физико-математических наук, профессор **С. Искандаров**,  
доктор технических наук, профессор **Б.О. Джолдошов**

**Оморов Р.О.**

О – 57      **Робастная устойчивость интервальных динамических систем.** Бишкек: Илим, 2018. – с. 104.

ISBN 978-9967-12-756-2

В монографии рассмотрены вопросы робастной устойчивости интервальных динамических систем как частотного, так и алгебраического направления. Приведены оригинальные результаты, полученные автором в теории робастной устойчивости, названные «Алгебраическим методом робастной устойчивости», которые позволяют решать вопросы анализа и синтеза робастных интервальных непрерывных и дискретных систем. Результаты продемонстрированы на примерах, известных из теории робастных интервальных систем.

Книга рассчитана на читателей, интересующихся теорией и практикой робастных интервальных систем, в особенности ученых, специалистам и студентам вузов соответствующих специальностей

О 1602080000-18

УДК 519.6:551.2/3  
ББК 22.213

ISBN 978-9967-12-756-2

© Оморов Р.О., 2018  
© «Илим», 2018



# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                            |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Введение .....</b>                                                                      | <b>4</b>  |
| <b>Глава I. Проблема устойчивости динамических систем .....</b>                            | <b>10</b> |
| 1.1. Понятие об устойчивости динамических систем .....                                     | 10        |
| 1.2. Устойчивость по А.М.Ляпунову .....                                                    | 12        |
| 1.3. Критерии устойчивости линейных систем .....                                           | 16        |
| <b>Глава II. Методы частотного направления робастной устойчивости ...</b>                  | <b>30</b> |
| 2.1. Частотные методы Б.Т. Поляка, Я.З.Цыпкина .....                                       | 31        |
| 2.2. Метод робастной устойчивости Ю.И. Неймарка .....                                      | 36        |
| 2.3. Метод корневых годографов полиномов Харитоновна .....                                 | 41        |
| <b>Глава III. Методы алгебраического направления</b>                                       |           |
| <b>робастной устойчивости .....</b>                                                        | <b>48</b> |
| 3.1. Робастная устойчивость интервальных динамических систем по<br>В.Л. Харитонову .....   | 48        |
| 3.2. Робастная устойчивость линейных непрерывных интервальных<br>динамических систем ..... | 54        |
| 3.3. Вопросы робастности интервальных динамических систем .....                            | 67        |
| 3.4. Робастная устойчивость линейных дискретных интервальных<br>динамических систем.....   | 70        |
| <b>Заключение .....</b>                                                                    | <b>83</b> |
| <b>Приложение .....</b>                                                                    | <b>84</b> |
| <b>Список литературы .....</b>                                                             | <b>94</b> |

## ВВЕДЕНИЕ

В развитии современной теории управления наблюдается повышенный интерес к проблемам робастности и грубости (малочувствительности) систем.

Особое место в обсуждении проблемы робастности систем управления заняло направленность тематики 11-го Международного Конгресса ИФАК, которая состоялась в 1990 г. в г.Таллине. На этом Конгрессе, в связи с важностью вопросов робастности для современной теории и практики систем управления, была проведена представительная дискуссия о проблемах робастности. Достаточно отметить, что на этой дискуссии Конгресса по проблеме робастности в системах управления участвовали и выступали многие известные ученые в области автоматического управления, такие как Я.З. Цыпкин, Э.И. Джури, Б.Т. Поляк, Р. Темпо, В.Л. Харитонов, Ю. Аккерманн, Б. Бармиш, В.М. Кунцевич, М. Мансур и др. Вопросам робастности, с которыми тесно связана проблема грубости, посвящены работы ученых и исследователей многих стран мира.

Традиционное понимание грубости и робастности в современной литературе определяет робастность как способность

систем сохранять те или иные свойства не единственной системы, а множества систем, определенных тем или иным способом, а грубость как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологии, при рассмотрении близких по виду уравнений систем.

Таким образом надо полагать, что грубость – это робастность топологии пространства в малом, а робастность это грубость определенных свойств в большом, при конечных возмущениях. Расширяя понятие грубости можно говорить о грубости не только как топологическом свойстве, но и о том, что свойство грубости – это способность систем сохранять какие-либо свойства при малых возмущениях исходной системы.

Отметим, что с понятием грубости тесно связано и понятие корректности и регулярности, введенное А.Н.Тихоновым и развиваемое его школой, но в данной работе мы не будем рассматривать эти понятия, поскольку объектом исследований являются динамические процессы и системы управления применительно к которым понятия грубости и робастности являются традиционными и типичными.

Тот интерес, к которому привлекают проблемы робастности и грубости в различных областях науки и техники, да и не только в теории управления, но и в экологии, синергетике и т.д.,

связан с тем, что эти понятия относятся к важнейшим свойствам систем, рассматриваемых при их реальном функционировании. Особенно расширяет границы проблемы грубости, ее связь с проблемой бифуркаций и катастроф.

Что касается непосредственно систем управления, то в настоящее время наиболее рассмотрены и решены вопросы робастной устойчивости. Решение этих вопросов прежде всего связано с основополагающими работами В.Л. Харитонов, в которых решены вопросы робастной устойчивости для интервальных полиномов.

Первые работы по анализу и синтезу грубых (малочувствительных) систем были связаны с развитием теории чувствительности. А первые задачи по проблеме робастности были поставлены и решались при обработке статистических информации.

К настоящему времени недостаточно рассмотрены вопросы построения робастных и грубых нелинейных систем управления.

При этом для инженерных применений необходимо рассмотреть и большие (конечные) возмущения, т.е. вопросы робастности и грубости в большом, а также следует отметить, что на практике модели и параметры возмущений могут быть не только известны, но и неопределенны.

Появление тенденции «робастизации» в развитии теории управления не случайно, она продиктована необходимостью рассмотрения современных сложных систем управления (не только традиционных систем автоматического управления, а более широкого класса систем управления различной природы) в динамике, со всеми возможными изменениями и возмущениями в реальных условиях функционирования и развития (эволюции).

Как известно, работы В.Л. Харитонова [45-47], явились основой современной теории робастной устойчивости.

В этих работах В.Л. Харитоновым решены вопросы об устойчивости интервальных полиномов (или семейства полиномов) вида

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (1)$$

где  $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ ,  $i = \overline{0, n}$  - коэффициенты заданные в интервалах  $\underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i$  (далее придерживаемся записи  $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ ),  $\underline{a}_i, \bar{a}_i$  - соответственно нижние и верхние границы коэффициентов  $a_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ .

В работе [45] решена задача для полиномов (1) с действительными коэффициентами, а в [46] с комплексными коэффициентами. Показано, что необходимыми и достаточными условиями робастной устойчивости всего семейства действительных

и комплексных полиномов (1) является соответственно устойчивостью четырех и восьми (парных) угловых полиномов с коэффициентами:

1) в случае действительных коэффициентов:

$$\begin{aligned} &\{\underline{a}_0, \underline{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \underline{a}_4, \dots\}, \\ &\{\underline{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \dots\}, \\ &\{\bar{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \dots\}, \\ &\{\bar{a}_0, \bar{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \bar{a}_4, \dots\}, \end{aligned} \tag{2}$$

2) в случае комплексных коэффициентов, определенные парами:

$$\begin{aligned} &(h_1, g_1), (h_1, g_2), (h_2, g_1), (h_2, g_2), \\ &(h_3, g_3), (h_3, g_4), (h_4, g_3), (h_4, g_4), \end{aligned}$$

$h_i, g_i, i = \overline{1, 4}$  - соответственно действительные и мнимые части комплексного полинома (1),  $f(j\omega) = h(\omega) + jg(\omega)$  с действительными коэффициентами множеств типа (2).

Эти угловые полиномы теперь носят название *полиномов Харитонова*.

В настоящее время получены много новых результатов в теории робастной устойчивости, это прежде всего реберная теорема и дискретные аналоги и варианты теорем Харитонова. Советскими и российскими учеными - Я.З. Цыпкиным, Б.Т. По-

ляком, Ю.И. Неймарком разработаны частотные критерии робастной устойчивости типа Михайлова, Найквиста,  $D$  – разбиения [15, 27-32].

Данная книга посвящена вопросам проблемы робастной устойчивости интервальных динамических систем. Рассмотрены робастная устойчивость линейных интервальных динамических систем как в непрерывном, так и в дискретном времени. При этом, представлены методы как алгебраического, так и частотного направления исследований робастности систем.

В главе III настоящей книги представлены оригинальные результаты, полученные автором для непрерывных и дискретных линейных интервальных динамических систем, названный *Алгебраическим методом робастной устойчивости* [21-24].

## ГЛАВА I.

# ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### 1.1. Понятие об устойчивости динамических систем

Понятие *«устойчивости системы»* связано со способностью возвращаться в состояние равновесия после исчезновения внешних возмущающих сил, которые вывели ее из этого состояния. При неустойчивости системы, она не возвращается в состояние равновесия, из которого ее вывели, а удаляется от него, либо совершает вокруг этого состояния недопустимые колебания.

В общем случае, вводятся понятия устойчивости *«в малом»*, *«в большом»*, *«в целом»*. Система считается устойчивым *«в малом»*, если известна, что она устойчива, но неизвестны границы области устойчивости. Если же границы области устойчивости известны, то система называется устойчивой *«в большом»*. В случае, если система возвращается в исходное равновесное состояние при любых начальных отклонениях

(возмущениях), система называется устойчивой «в целом». Устойчивость «в целом» для определенного класса нелинейностей называется *«абсолютной» устойчивостью*.

При определении устойчивости состояния равновесия, вводится понятие о *невозмущенном состоянии*, соответствующем состоянию покоя. А также о *возмущенном состоянии*, в которую внешняя сила приводит систему, затем прекращает свое действие. Система является устойчивой, если из возмущенного состояния она перейдет в некоторую область, окружающую невозмущенное состояние равновесия.

Понятие устойчивости распространяется и на более общий случай, когда в качестве невозмущенного состояния рассматривается не положение равновесия системы, а ее движение по определенной траектории.

Пусть *невозмущенное движение* определяется некоторым законом изменения независимых координат  $x_1^*(t)$ ,  $x_2^*(t)$ , ...,  $x_n^*(t)$ . Внешние возмущения, действующие на систему, вызывают отклонение действительного *возмущенного движения* движения системы от заданного. Пусть *возмущенное движение* системы определяется независимыми координатами  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$ . В общем случае  $x_1(t) \neq x_1^*(t)$ ,  $x_2(t) \neq x_2^*(t)$ , ...,  $x_n(t) \neq x_n^*(t)$ .

*Невозмущенное движение* называется устойчивым, если после приложения внешних сил (возмущений), которые затем снимаются, *возмущенное движение* по истечении некоторого времени войдет в заданную область  $|x_i(t) - x_i^*(t)| \leq \varepsilon_i$ , где  $\varepsilon_i = \text{const}$  – заданные величины,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Для иллюстрации сказанного, предположим, что невозмущенное движение происходит по некоторой траектории  $A$ , а возмущенное движение имеет траекторию  $C$ . Тогда, если взять две произвольные точки на этих траекториях в один и тот же момент времени  $t$ , обозначаемые  $N^A$  и  $N^C$ , то при устойчивом движении траектории  $A$  и  $C$  должны быть близкими и точки  $N^A$  и  $N^C$  не должны расходиться при возрастании  $t$ .

## **1.2. Устойчивость по А. М. Ляпунову**

Известно, что впервые определение устойчивости было дано великим русским математиком А.М. Ляпуновым в 1892 году в знаменитой своей работе «Общая задача об устойчивости движения» [13]. Определение устойчивости данное А.М. Ляпуновым оказалось столь удачным и наилучшим образом удовлетворяющим практическим задачам, что оно в современной науке принято как основное.

Рассматривается динамическая система, описываемая дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x}_i = dx_i/dt = X_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t), \quad (1.1)$$

где  $x_i$  – действительные переменные, характеризующие состояние системы,  $X_i$  – известные функции переменных  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$  и времени  $t$ , удовлетворяющие условиям существования и единственности решения.

А.М. Ляпуновым сформулировано следующее определение устойчивости.

**Определение 1.** *Невозмущенное движение называется устойчивым по отношению к переменным  $x_i$ , если при всяком произвольно заданном положительном числе  $\varepsilon$ , как бы мало оно ни было, можно выбрать другое такое положительное число  $\delta(\varepsilon)$ , что при всяких возмущениях  $x_{i0}$ , удовлетворяющих условию*

$$\sum x_{i0}^2 \leq \delta, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (1.2)$$

*и при любом  $t \geq t_0$  будет выполняться неравенство*

$$\sum x_i^2(t) \leq \varepsilon, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (1.3)$$

*в противном случае движение неустойчиво.*

Таким образом, устойчивость невозмущенного движения означает, что при достаточно малых начальных возмущениях возмущенное движение будет сколь угодно мало отличаться от невозмущенного движения. Если же невозмущенное движение неустойчиво, то возмущенное движение будет удаляться от него, как бы малы ни были начальные возмущения.

**Определение 2.** Если невозмущенное движение устойчиво и при этом любое возмущенное движение при достаточно малых начальных возмущениях стремится к невозмущенному движению, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0, \quad (1.4)$$

то невозмущенное движение называется **асимптотически устойчивым**.

Выше даны классические определения устойчивости динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые сформулированы А.М. Ляпуновым в его классической работе в 1892 году. Современные постановки устойчивости по Ляпунову отличаются только формой представления систем, а идея и содержание понятия устойчивости по Ляпунову выдержали требования времени и показывают эффективность и плодотворность в практических приложениях.

А.М. Ляпуновым также сформулирована и решена задача устойчивости динамических систем общего вида по так называемому первому приближению или линеаризованных систем.

При этом, в современной постановке рассматривается динамическая система вида  $n$ -го порядка

$$\dot{x} = A x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.5)$$

где  $x(t) \in R^n$  - вектор состояния,  $A \in R^{n \times n}$  - матрица с элементами  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Характеристическое уравнение системы (1.5) представляется в виде

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.6)$$

или

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0, \quad (1.7)$$

где  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  коэффициенты характеристического полинома.

Из (1.6) или (1.7) находятся корни  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , которые в общем случае равны  $\lambda_i = \alpha_i \pm j \omega_i$ , где  $\alpha_i$  и  $\omega_i$  - действительные и мнимые части корней соответственно.

Для линеаризованных систем А.М. Ляпунов сформулировал две важные теоремы устойчивости.

**Теорема 1.1.** *Если действительные части всех корней  $\lambda_i$  характеристического уравнения (1.7) первого приближения отрицательны, то невозмущенная система асимптотически устойчива.*

**Теорема 1.2.** *Если среди корней  $\lambda_i$  характеристического уравнения (1.7) первого приближения имеется хотя бы один*

корень с положительной действительной частью, то возмущенная система неустойчива.

Если среди корней  $\lambda_i$  имеется один или несколько нулевых корней, а действительные части остальных корней отрицательны, то этот случай называется *критическим*. Ляпунов А.М. показал, что в критическом случае устойчивость (неустойчивость) невозмущенной системы не может быть оценена по уравнениям первого приближения (1.5), и поэтому в этом случае требуется рассмотрение дифференциальных уравнений возмущенной системы в исходном виде

$$\dot{x} = F(x, t) + f(x, t), \quad (1.8)$$

где  $F(\bullet)$ ,  $f(\bullet)$  – нелинейные вектор-функции,  $dF(\bullet)/dx(\bullet) = A$ .

### 1.3. Критерии устойчивости линейных систем

На основе понятия устойчивости по Ляпунову и пользуясь результатами, изложенными выше возможно определение устойчивости линейных (линеаризованных систем).

Пусть задана линейная динамическая система

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) x(t) = (c_0 s^m + c_1 s^{m-1} + \dots + c_m) g(t), \quad (1.9)$$

где  $x(t)$  и  $g(t)$  – соответственно выходная и управляющая (входная) координаты системы,  $a_i, i=0, 1, \dots, n$ , и  $c_j, j=0, 1, \dots, m$  – постоянные коэффициенты, а  $s = d/dt$  – оператор дифференцирования.

Как известно, изменение выходной величины  $x(t)$  при произвольном управляющем (входном) воздействии  $g(t)$  является решением уравнения (1.9):

$$x(t) = x_g(t) + x_{св}(t). \quad (1.10)$$

В (1.10)  $x_g(t)$  является вынужденной составляющей, которая определяется как частное решение (1.9), а  $x_{св}(t)$  является свободной составляющей, определяемой общим решением однородного дифференциального уравнения (1.9) без правой части.

Согласно устойчивости по Ляпунову система (1.9) будет асимптотически устойчивой, если при  $t \rightarrow \infty$ ,  $x_{св}(t) \rightarrow 0$ .

Таким образом, устойчивость системы (1.9) определяется характером корней ее *характеристического уравнения*, представляемого в виде

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0. \quad (1.11)$$

Вычисление корней характеристического уравнения (1.11) при высоких порядках  $n$  является достаточно сложной проблемой. Поэтому, были разработаны различные *критерии устойчивости*, которые позволяют без вычисления корней (1.11) установить устойчивость системы (1.5) или (1.9).

Эти критерии устойчивости делятся на *алгебраические* и *частотные*.

### 1.3.1. Алгебраические критерии устойчивости

Алгебраические критерии устойчивости определяют устойчивость систем по коэффициентам характеристического уравнения

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0. \quad (1.12)$$

Наиболее известными из алгебраических критериев устойчивости являются критерии Рауса и Гурвица.

Необходимым условием устойчивости систем любого порядка является положительность всех коэффициентов уравнения (1.12), т.е. все  $a_i > 0$ .

**Критерий устойчивости Рауса.** Критерий предложен в 1877 г. английским математиком Э. Раусом в виде алгоритма, которое поясняется табл. 1.1.

Таблица 1.1

| Строка            |     | Столбец                  |                          |                          |   |
|-------------------|-----|--------------------------|--------------------------|--------------------------|---|
| Коэффициент $r_i$ | (i) | 1                        | 2                        | 3                        | 4 |
| -                 | 1   | $a_0 = c_{11}$           | $a_2 = c_{21}$           | $a_4 = c_{31}$           |   |
| ...               |     |                          |                          |                          |   |
| -                 | 2   | $a_1 = c_{12}$           | $a_3 = c_{22}$           | $a_5 = c_{32}$           |   |
| ...               |     |                          |                          |                          |   |
| $r_3 = a_0/a_1$   | 3   | $c_{13} = a_2 - r_3 a_3$ | $c_{23} = a_4 - r_3 a_5$ | $c_{33} = a_6 - r_3 a_7$ |   |
| ...               |     |                          |                          |                          |   |

$$\begin{array}{ccccccc}
r_4 = a_1/c_{13} & 4 & c_{14} = a_3 - r_4 c_{23} & c_{24} = a_5 - r_4 c_{33} & c_{34} = a_7 - r_4 c_{43} & & \\
\ldots & & & & & & \\
r_5 = c_{13}/c_{14} & 5 & c_{15} = c_{23} - r_5 c_{24} & c_{25} = c_{33} - r_5 c_{34} & c_{35} = c_{43} - r_5 c_{44} & & \\
\ldots & & & & & & \\
& \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & & & & & & \\
r_i = c_{1,i-2}/c_{1,i-1} & i & c_{1,i} = c_{2,i-2} - r_i c_{2,i-1} & c_{2,i} = c_{3,i-2} - r_i c_{3,i-1} & c_{3,i} = c_{4,i-1} & r_i c_{4,i-1} & \\
\ldots & & & & & & \\
& \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & & & & & & 
\end{array}$$


---

Условие устойчивости Рауса формулируется следующим образом:

**Теорема Рауса.** Для устойчивости системы (1.5), (1.9), необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса имели один и тот же знак, т.е. при  $a_0 > 0$ , были положительными:

$$a_0 = c_{11} > 0; \quad a_1 = c_{12} > 0; \quad c_{13} > 0; \quad \dots; \quad c_{1,n+1} > 0. \quad (1.13)$$

Если не все коэффициенты первого столбца положительны, то система неустойчива, а число правых корней характеристического уравнения равно числу перемен знака в первом столбце таблицы Рауса.

Форма алгоритма, с помощью которого составляют таблицу Рауса, весьма удобна для программирования ЭВМ, поэтому критерий Рауса нашел широкое применение при исследовании влияния на устойчивость коэффициентов характеристического уравнения или отдельных параметров системы.

**Критерий устойчивости Гурвица.** Критерий разработан в 1895 г. немецким математиком А. Гурвицем в форме определителей, составляемых из коэффициентов характеристического уравнения системы.

Из коэффициентов характеристического уравнения (1.12) строится *главный определитель Гурвица*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}. \quad (1.14)$$

Выделяя в главном определителе Гурвица, диагональные миноры, получают определители Гурвица низшего порядка:

$$\Delta_1 = a_1; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \dots \quad (1.15)$$

Критерий устойчивости Гурвица формулируется в следующем виде.

**Теорема Гурвица.** Для устойчивости системы (1.5), (1.9), необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица имели знаки, одинаковые со знаком первого коэффициента характеристического уравнения  $a_0$ , т.е. при  $a_0 > 0$ , были положительными.

Таким образом, при  $a_0 > 0$  (в (1.12)  $a_0 = 1$ ) для устойчивости системы необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$\Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0; \Delta_3 > 0; \dots; \Delta_n > 0. \quad (1.16)$$

Раскрывая определители получим:

- 1) для системы первого порядка ( $n=1$ ), условия устойчивости

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0;$$

- 2) для системы второго порядка ( $n=2$ ), условия устойчивости

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0;$$

- 3) для системы третьего порядка ( $n=3$ ), условия устойчивости

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0;$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

и т.д.

При  $n \geq 5$  процесс раскрытия определителей становится трудоемким и громоздким. Поэтому, при  $n \geq 5$  обычно приме-

няется алгебраический критерий Лъенара-Шипара, либо используются численные методы критерия Гурвица с применением ЭВМ.

Известно, что критерий Гурвица можно получить из критерия Рауса, поэтому иногда критерий Гурвица называют критерием Рауса-Гурвица.

**Критерий устойчивости Лъенара – Шипара.** Этот критерий является модификацией критерия Гурвица и был предложен П.Лъенаром и Р.Шипаром в 1914 г. Если сформулировать в виде теоремы, то :

**Теорема Лъенара-Шипара.** *Для того чтобы система (1.5), (1.9), была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:*

$$\begin{aligned} a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \dots, \quad a_n > 0, \\ \Delta_1 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \Delta_5 > 0, \quad \dots, \end{aligned} \quad (1.17)$$

*или*

$$\begin{aligned} a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \dots, \quad a_n > 0, \\ \Delta_2 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad \Delta_6 > 0, \quad \dots. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Критерий Лъенара-Шипара требует меньшего вычисления, поэтому удобен при системах высокого порядка.

### 1.3.2. Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости позволяют определить устойчивость динамических систем по виду их частотных характеристик. Они являются графоаналитическими критериями и получили широкое применение, поскольку они имеют простую геометрическую интерпретацию и наглядность, особенно при исследовании устойчивости систем высокого порядка.

В основе частотных методов лежит так называемый *принцип аргумента*, который заключается в следующем.

Рассматривается некоторый полином степени  $n$ :

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n. \quad (1.19)$$

Полагая  $\lambda = j\omega$ , получим по теореме Безу

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2) \dots (j\omega - \lambda_n), \quad (1.20)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  являются корнями полинома (1.19), которые в общем случае комплексные величины  $\lambda_i = \alpha_i + j\omega_i$ .

На комплексной плоскости,  $D(j\omega)$  в (1.20) представляет вектор, равный произведению векторов  $(j\omega - \lambda_i)$  и числа  $a_0$ .

Модуль этого вектора:

$$|D(j\omega)| = a_0 |j\omega - \lambda_1| |j\omega - \lambda_2| \dots |j\omega - \lambda_n|, \quad (1.21)$$

а аргумент:

$$\text{Arg } D(j\omega) = \text{Arg } (j\omega - \lambda_1) + \text{Arg } (j\omega - \lambda_2) + \dots + \text{Arg } (j\omega - \lambda_n). \quad (1.22)$$

Считая вращение против часовой стрелки положительным и называя устойчивые корни  $\lambda_i = \alpha_i + j\omega_i$  левыми, а неустойчивые правыми формулируется следующее правило принципа аргумента: *изменение аргумента  $D(j\omega)$  при изменении частоты  $\omega$  от  $-\infty$  до  $\infty$  равно разности между числом левых и правых корней уравнения  $D(\lambda) = 0$ , умноженной на  $\pi$ , т.е.*

$$\Delta \text{Arg } D(j\omega) = \pi(n-2m), \quad (1.23)$$

где  $m$  – число правых корней.

Если рассматривать изменения  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , то имеем:

$$\Delta \text{Arg } D(j\omega) = (\pi/2)(n-2m). \quad (1.24)$$

**Критерий устойчивости Михайлова.** Этот критерий был сформулирован в 1938 г. советским ученым А.В. Михайловым и носит его имя, и по существу является геометрической интерпретацией рассмотренного выше принципа аргумента. Критерий позволяет определить устойчивость систем по некоторой кривой, называемой кривой (годографом) Михайлова.

Рассматривается характеристическое уравнение (1.12), левая часть которого называется характеристическим полиномом системы (1.5):

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n. \quad (1.25)$$

Полагая  $\lambda = j\omega$ , получим комплексный полином

$$D(j\omega) = (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = X(\omega) + jY(\omega) = D(\omega)e^{j\psi(\omega)}, \quad (1.26)$$

где

$$X(\omega) = a_n - a_{n-2} \omega^2 + a_{n-4} \omega^4 - \dots, \quad Y(\omega) = \omega(a_{n-1} - a_{n-3} \omega^2 + a_{n-5} \omega^4 - \dots) \quad (1.27)$$

соответственно действительная и мнимая функции Михайлова; функции  $D(\omega)$  и  $\psi(\omega)$  являются модулем и аргументом (фазой) вектора  $D(j\omega)$ .

При изменении частоты  $\omega$  вектор  $D(j\omega)$ , будет описывать своим концом в комплексной плоскости некоторую кривую, которая называется *кривой (годографом) Михайлова*.

Вычисляя при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  в соответствии с (1.24) получим, что число правых корней  $m$  будет равно нулю при следующем условии

$$\Delta \operatorname{Arg} D(j\omega) = n\pi/2. \quad (1.28)$$

Условие (1.28) является необходимым условием устойчивости, но не достаточным условием устойчивости. Необходимое и достаточное условие устойчивости определяется не только отсутствием правых корней, но и тем, что все корни левые, т.е. не должно быть корней нулевых или чисто мнимых. Математически, дополнительное условие к (1.28) выражается формулой

$$D(j\omega) \neq 0. \quad (1.29)$$

Таким образом, критерий Михайлова формулируется следующим образом:

**Теорема Михайлова.** Для устойчивости динамической системы (1.5), необходимо и достаточно, чтобы кривая (годограф) Михайлова при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , начинаясь при  $\omega = 0$  на действительной положительной полуоси, обходила только против часовой стрелки последовательно  $n$  квадрантов координатной плоскости, где  $n$  – порядок характеристического уравнения.

Признаком неустойчивости системы является нарушение числа и последовательности пройденных кривой Михайлова квадрантов координатной плоскости.

Из критерия устойчивости Михайлова вытекает следующее следствие, которое также используется для определения устойчивости по частотным годографам систем. При этом рассматриваются действительная и мнимая функции Михайлова  $X(\omega)$  и  $Y(\omega)$ , которые пересекаются с координатными осями в точках со значениями  $\omega$ , удовлетворяющими уравнениям:

$$X(\omega) = 0; \quad Y(\omega) = 0. \quad (1.30)$$

**Теорема Михайлова (следствие).** Система (1.5) будет устойчива тогда и только тогда, когда действительная  $X(\omega)$  и мнимая  $Y(\omega)$  функции Михайлова, имеют в (1.30) все действительные и перемежающиеся корни  $\omega_i$ , причем общее число корней равно  $n$ , и при  $\omega = 0$  выполняются неравенства:

$$X(0) > 0, \quad dY(0)/d\omega > 0.$$

К частотным критериям устойчивости относится и *критерий устойчивости Найквиста*, предложенный в 1932 г. американским ученым Г. Найквистом. Но он касается систем управления и устанавливает устойчивость замкнутых систем по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы. Поэтому рассмотрение этого критерия здесь в данной работе отпустим.

Важное практическое значение при исследовании устойчивости систем имеет построение областей устойчивости в плоскости параметров системы, чаще всего в плоскости одного параметра или двух параметров.

Для определения уравнений границ областей устойчивости могут быть использованы любые критерии устойчивости. Но чаще всего на практике применяется общий метод построения областей устойчивости, который был предложен советским ученым Ю.И. Неймарком [14], и назван им *методом D-разбиения*.

***Понятие о D-разбиении Неймарка.*** Рассматривается характеристическое уравнение системы  $n$  –го порядка

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 = 1. \quad (1.31)$$

Рассмотрим  $n$  – мерное пространство , по координатным осям которого отложены коэффициенты уравнения (1.31). Это пространство называется *пространством коэффициентов*.

Уравнение (1.31) имеет  $n$  корней, расположение которых на комплексной плоскости корней  $\lambda$  зависит от числовых значений коэффициентов  $a_i$ .

При изменении коэффициентов  $a_i$  уравнения (1.31), его корни вследствие их непрерывной зависимости от коэффициентов будут перемещаться в комплексной плоскости корней, описывая *корневые годографы (кривые)*.

При некотором значении коэффициентов уравнения (1.31) один из корней попадает в начало координат или пара корней попадает на мнимую ось, т.е. его корни будут равны 0 или  $\pm j\omega_k$ , следовательно, соответствующая точка в пространстве параметров удовлетворяет уравнению

$$D(j\omega_k) = (j\omega_k)^n + a_1 (j\omega_k)^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (1.32)$$

Этому уравнению при  $\infty > \omega > -\infty$  соответствует некоторая поверхность  $S$  в пространстве параметров.

Корни характеристического уравнения попадают на мнимую ось тогда, когда точка в пространстве коэффициентов попадет на поверхность  $S$ . При пересечении такой поверхности  $S$  корни переходят из одной полуплоскости корней в другую.

Таким образом, поверхность  $S$  разделяет пространство коэффициентов на области, каждой точке которых соответствует определенное одинаковое число правых и левых корней. Эти области обозначаются  $D(m)$ , где  $m$  – число правых корней ха-

рактистического уравнения. Разбиение пространства коэффициентов на области с одинаковым числом правых корней внутри каждой области и выделение среди полученных областей области устойчивости называется *методом  $D$  – разбиения Неймарка*.

Для систем порядка  $n \leq 3$  метод  *$D$  – разбиения* позволяет исследовать устойчивость систем наглядно на плоскости и в 3-х мерном пространстве параметров. Но при высоких порядках систем  $n > 3$  получаются многомерные пространства и гиперповерхности, разбивающие эти пространства на области, что затрудняет рассмотрение и теряется наглядность.

Границу  *$D$  – разбиения* исследуют не только в пространстве коэффициентов характеристического уравнения (1.31), но и в пространстве параметров системы (в системах управления – коэффициентов усиления, постоянных времени и др.), от которых зависят коэффициенты (1.31).

## *ГЛАВА II.*

### **МЕТОДЫ ЧАСТОТНОГО НАПРАВЛЕНИЯ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ**

Как отмечено во введении, работы В.Л. Харитонова [44-46], явились основой современной теории робастной устойчивости.

Эти основополагающие работы В.Л.Харитонова со времени выхода в свет, вызвали огромный поток публикаций, связанных с чрезвычайной актуальностью решения проблем робастности и грубости систем [10, 11, 27]. К настоящему времени из круга проблем робастности решены многие вопросы робастной устойчивости. Получены дискретные аналоги и варианты теорем Харитонова [10]. Частотные условия робастной устойчивости рассмотрены и решены в работах Я.З.Цыпкина, Б.Т.Поляка [27-30], Ю.И.Неймарка [15]. Однако в проблеме робастной устойчивости к настоящему времени решены не все вопросы, особенно большие противоречия возникли в непрерывном случае [11]. Не были решены и задачи для интервальных матриц и

многогранников матриц, которые рассматриваются в главе III настоящей работы.

Данная глава посвящается частотным методам и критериям робастной устойчивости.

## 2.1. Частотные критерии робастной устойчивости

### Цыпкина-Поляка

Рассматривается характеристический полином системы в виде

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n, \quad (2.1)$$

где вектор коэффициентов  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  принадлежит множеству  $B \in R^{n+1}$ , лежащему в полупространстве  $a_n > 0$ :

$$a \in B, \quad a_n > 0. \quad (2.2)$$

В работе [27] рассматриваются ряд критериев робастной устойчивости, которые получены при различных типах ограничений (2.2).

Полагая  $\lambda = j\omega$  (2.1) представляется в виде

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega),$$

где  $X(\omega) = a_n - a_{n-2} \omega^2 + a_{n-4} \omega^4 - \dots$ ,  $Y(\omega) = \omega(a_{n-1} - a_{n-3} \omega^2 + a_{n-5} \omega^4 - \dots)$ . (2.3)

Множество значений  $D(j\omega)$  на комплексной плоскости при фиксированных  $\omega$ , когда коэффициенты  $a$  соответствуют (2.2), обозначается  $Q(\omega)$ :

$$Q(\omega) = \{D(j\omega): a \in B\}.$$

При  $a^* \in B$ ,

$$D^*(\lambda) = a_0^* \lambda^n + a_1^* \lambda^{n-1} + a_2^* \lambda^{n-2} + \dots + a_n^*, \quad (2.4)$$

называется «невозмущенным» полиномом.

Доказаны [27] три следующих утверждения, на основе которых сформулированы критерии робастной устойчивости при различных видах ограничений (2.2), в частности при интервальных ограничениях представлены четыре критерия.

**Утверждение 1.** Система робастно устойчива тогда и только тогда, когда  $D^*(\lambda)$  гурвицев и  $0 \in Q(\omega)$  для всех  $\omega$  от 0 до  $\infty$ .

**Утверждение 2.** Если  $Q(\omega)$  выпукло, замкнуто и ограничено для всех  $\omega \geq 0$ , то система робастно устойчива тогда и только тогда, когда  $D^*(\lambda)$  гурвицев и  $\tau(\omega) > 0$  для всех  $\omega \geq 0$ , где  $\tau(\omega) = \max [\psi(c, \omega) = \min(c_1 X(\omega) + c_2 Y(\omega))]$ ,  $c = (c_1, c_2) \in R^2$ .

**Утверждение 3.** Робастная устойчивость при ограничении  $a - a^* \in \gamma E$  эквивалентна условию:  $D^*(\lambda)$  гурвицев и

$$\mu(\omega) > \gamma, \quad 0 \leq \omega < \infty, \quad (2.5)$$

где  $\gamma > 0$  – параметр, а  $E \in R^{n+1}$  – выпуклое замкнутое ограниченное множество,  $0 \in E$ , (например,  $E$  – параллелепипед или эллипсоид, содержащий точку 0),  $\mu(\omega) = \max (c_1 X^*(\omega) + c_2 Y^*(\omega)) / \max(c_1 X(\omega) + c_2 Y(\omega))$ .

При изменениях коэффициентов полинома (2.1), определяемых неравенствами:

$$\underline{a}_i \leq a \leq a^-_i, i=0, 1, \dots, n, \quad (2.6)$$

область  $Q(\omega)$ - прямоугольник:

$$\underline{X}(\omega) \leq X(\omega) \leq X^-(\omega), \quad \underline{Y}(\omega) \leq Y(\omega) \leq Y^-(\omega), \quad (2.7)$$

где  $\underline{X}(\omega) = \underline{a}_n - a^-_{n-2} \omega^2 + \underline{a}_{n-4} \omega^4 - \dots$ ,  $X^-(\omega) = a^-_n - \underline{a}_{n-2} \omega^2 + a^-_{n-4} \omega^4 - \dots$ ,  $\underline{Y}(\omega) = \omega(\underline{a}_{n-1} - a^-_{n-3} \omega^2 + \underline{a}_{n-5} \omega^4 - \dots)$ ,  $Y^-(\omega) = \omega(a^-_{n-1} - \underline{a}_{n-3} \omega^2 + a^-_{n-5} \omega^4 - \dots)$ .

В данном случае, робастная устойчивость при ограничениях (2.6) эквивалентна гурвицевости четырех полиномов Харитонова, из [45, 47].

Рассматриваются частотные критерии при следующих более общих интервальных ограничениях:

$$|a_i - a_i^*| \leq \gamma \alpha_i, \quad i=0, 1, \dots, n, \quad (2.8)$$

где  $a_i^*$  - номинальные значения параметров,  $\alpha_i > 0$  – масштабы возможных погрешностей по параметрам,  $\gamma > 0$  – размах погрешностей (по ограничениям (2.2)  $a_i^* = (\underline{a}_i + a^-_i)/2$ ,  $\alpha_i = (\underline{a}_i - a^-_i)/2$ ,  $\gamma = 1$ ).

Составляются полиномы:

$$X^*(\omega) = a_n^* - a_{n-2}^* \omega^2 + a_{n-4}^* \omega^4 - \dots, \quad \hat{Y}^*(\omega) = a_{n-1}^* - a_{n-3}^* \omega^2 + a_{n-5}^* \omega^4 - \dots, \quad (2.9)$$

$$S(\omega) = \alpha_n + \alpha_{n-2} \omega^2 + \alpha_{n-4} \omega^4 + \dots, \quad T(\omega) = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-3} \omega^2 + \alpha_{n-5} \omega^4 + \dots, \quad (2.10)$$

и образуются отношения:

$$x(\omega) = X^*(\omega) / S(\omega), \quad y(\omega) = \hat{Y}^*(\omega) / T(\omega). \quad (2.11)$$

**Критерий робастной устойчивости 1 (Цыпкина-Поляка 1).** Для робастной устойчивости при ограничениях (2.8) необходимо и достаточно, чтобы  $\alpha_0^* > \gamma \alpha_0$ ,  $\alpha_n^* > \gamma \alpha_n$ , а годограф, описываемый точкой  $z(\omega) = x(\omega) +$

$j y(\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , проходил через  $n$  квадрантов и не пересекал квадрата с вершинами  $(\pm \gamma, \pm \gamma)$ .

Максимальное значение  $\gamma$  находится с помощью наибольшего квадрата, вписанного в годограф  $z(\omega)$ , или по граничным условиям  $\gamma < x(0) = \alpha_0^* / \alpha_0$ ,  $\gamma < |x(\infty)| = \alpha_n^* / \alpha_n$  (при  $n$  четном),  $\gamma < |y(\infty)| = \alpha_n^* / \alpha_n$  (при  $n$  нечетном).

**Критерий робастной устойчивости 2 (Цыпкина-Поляка 2).** Для робастной устойчивости при ограничениях (2.8) необходимо и достаточно, чтобы  $D^*(\lambda)$  был гурвицев,  $\alpha_0^* > \gamma \alpha_0$ ,  $\alpha_n^* > \gamma \alpha_n$ , а годограф, описываемый точкой  $z(\omega) = |x(\omega)| + j|y(\omega)|$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  не пересекал отрезка с концами 0 и  $\gamma(1+j)$ .

Здесь, максимальное значение  $\gamma$  находится как абсцисса точки первого пересечения биссектрисы первого квадранта с годографом.

Вводя в рассмотрение  $\mu(\omega) = \max \{ |X^*(\omega)|/S(\omega), |\dot{Y}^*(\omega)|/T(\omega) \}$ , предложены следующие две критерии робастной устойчивости.

**Критерий робастной устойчивости 3 (Цыпкина-Поляка 3).** Для робастной устойчивости при ограничениях (2.8) необходимо и достаточно, чтобы  $\mu(\omega) > \gamma$ ,  $0 \leq \omega < \infty$ ,  $a_0^* > \gamma \alpha_0$ ,  $a_n^* > \gamma \alpha_n$ , а годограф

$$\dot{X}(\omega) = X^*(\omega)(1 - \gamma/\mu(\omega)), \quad \dot{Y}(\omega) = Y^*(\omega)(1 - \gamma/\mu(\omega)) \quad (2.12)$$

проходил через  $n$  квадрантов.

Этот критерий является аналогом критерия Михайлова для случая робастной устойчивости.

**Критерий робастной устойчивости 4 (Цыпкина-Поляка 4).** Для робастной устойчивости при ограничениях (2.8) необходимо и достаточно, чтобы  $D^*(\lambda)$  был гурвицев и  $a_0^* > \gamma \alpha_0$ ,  $a_n^* > \gamma \alpha_n$ ,  $\mu(\omega) > \gamma$ ,  $0 < \omega < \infty$ .

Для практических применений более удобным из вышеприведенных критериев робастной устойчивости является критерий 1, поскольку: 1) строится лишь один годограф; 2) легко определима максимальный размах ограничений; 3) удобство практического построения годографа, вследствие его ограниченности. Эти же достоинства критерия 1, определяют привлекательность данного частотного критерия робастной устой-

чивости перед алгебраическим критерием, основанным на теореме Харитонов, хотя конечно же исследователи вправе выбирать тот или иной критерий и подход в зависимости от конкретной задачи.

Вопросы частотных критериев робастной устойчивости при эллипсоидальных ограничениях возмущений и робастной апериодичности, а также при комплексных возмущениях параметров и для нелинейных систем здесь опускаем, поскольку эти вопросы выходят за рамки рассмотрения в данной работе. Здесь лишь отметим, что все частотные критерии, предложенные Я.З. Цыпкиным и Б.Т. Поляком получены относительно характеристического уравнения системы с определенными ограничениями возмущений его коэффициентов и не рассматривают векторно-матричные представления систем.

## **2.2. Метод робастной устойчивости Ю.И. Неймарка**

*Робастный метод Ю.И. Неймарка*, основан на подходе D-разбиений пространства коэффициентов характеристического полинома, рассмотренного в главе I, и предложенного им же самим.

В основе метода лежит параметрическое описание границы D-разбиения пространства коэффициентов полинома, кото-

рая для комплексных полиномов состоит из одной гиперповерхности, а в случае действительных полиномов состоит из двух гиперплоскостей и одной гиперповерхности.

По Ю.И. Неймарку [15], понятие робастной устойчивости формулируется следующим образом: условие устойчивости выполняется как для невозмущенного полинома (в обозначениях принятых в предыдущем параграфе)

$$D^*(\lambda) = a_0^* \lambda^n + a_1^* \lambda^{n-1} + a_2^* \lambda^{n-2} + \dots + a_n^*, \quad (2.13)$$

так и для любого возмущенного полинома

$$D^*(\lambda) + \delta D^*(\lambda) = (a_0^* + \delta a_0) \lambda^n + (a_1^* + \delta a_1) \lambda^{n-1} + (a_2^* + \delta a_2) \lambda^{n-2} + \dots + a_n^* + \delta a_n, \quad (2.14)$$

при норме возмущения  $\rho$ , меньше некоторого малого  $\varepsilon > 0$

$$\rho(\delta a_0, \delta a_1, \delta a_2, \dots, \delta a_n) < \varepsilon. \quad (2.15)$$

При этом, задача робастной устойчивости заключается в определении максимально допустимого значения  $\varepsilon$ , которое принимается за меру робастной устойчивости.

Здесь используется норма вида

$$\rho = (\sum k_s^{-1} (Re \delta a_s)^m + v_s^{-1} (Im \delta a_s)^m)^{1/m}, \quad (2.16)$$

где  $k_s^{-1} > 0$ ,  $v_s^{-1} > 0$  и  $m$  – любое четное число.

При  $m \rightarrow \infty$  и замене  $k_s, v_s$  на  $k_s^m, v_s^m$  норма (2.16) переходит в норму вида

$$\rho = \max(|Re \delta a_s| / k_s, |Im \delta a_s| / v_s). \quad (2.17)$$

Далее рассмотрим робастный метод D-разбиения Неймарка для непрерывных и дискретных систем с действительными характеристическими полиномами типа (2.13). Вначале рассмотрим непрерывный случай.

Если представить D-разбиение  $n+1$  мерного пространства коэффициентов (параметров)  $a_0 = a_0^* + \delta a_0$ ,  $a_1 = a_1^* + \delta a_1$ , ...,  $a_n = a_n^* + \delta a_n$ , то его граница [14] состоит из двух гиперплоскостей  $P_0$  и  $P_\infty$ , имеющих уравнения

$$a_0 = 0 \text{ и } a_n = 0, \quad (2.18)$$

и соответствующих корням  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \infty$ , и гиперповерхности  $P_\omega a_n^* - a_{n-2}^* \omega^2 + a_{n-4}^* \omega^4 - \dots = 0$ ,  $a_{n-1}^* - a_{n-3}^* \omega^2 + a_{n-5}^* \omega^4 - \dots = 0$  ( $0 \leq \omega < \infty$ ),

$$(2.19)$$

соответствующей чисто мнимым корням  $\pm j\omega$ .

Для определения меры робастной устойчивости необходимо найти максимальное  $\varepsilon$ , при котором выполняется

$$\rho = (\sum k_s^{-1} (a_s - a_s^*)^m)^{1/m} < \varepsilon, \quad (2.20)$$

лежит внутри области устойчивости, выделяемой границей (2.18), (2.19).

Если номинальный полином (2.13) устойчив, то максимально допустимое  $\varepsilon$  определяется как минимальное значение (2.20) для  $\rho$  по всем точкам  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$  на границе D-

разбиения, т.е. на  $P_0$ ,  $P_\infty$  и  $P_\omega$ . Это  $\rho$  является расстоянием от полинома  $D^*(\lambda)$  до границы области устойчивости. Максимальное  $\varepsilon$  будет наименьшим значением из трех минимумов  $\rho$  до границ  $P_0$ ,  $P_\infty$  и  $P_\omega$ .

Минимальные значения  $\rho$  для гиперплоскостей  $P_0$ ,  $P_\infty$  равны соответственно

$$\rho_{0,min} = k_0^{-1/m} |a_0^*|, \quad \rho_{\infty,min} = k_n^{-1/m} |a_n^*|. \quad (2.21)$$

Минимальное  $\rho$  для гиперповерхности  $P_\omega$  находится методом множителей Лагранжа и равна

$$\rho_{\omega,min} = \min (N_1^m / A_1^{m-1} + N_2^m / A_2^{m-1})^{1/m}, \quad (2.22)$$

где  $(\gamma = 1/m-1)$ ,

$$N_1 = a_n^* - a_{n-2}^* \omega^2 + a_{n-4}^* \omega^4 - \dots, \quad N_2 = a_{n-1}^* - a_{n-3}^* \omega^2 + a_{n-5}^* \omega^4 - \dots,$$

$$A_1 = k_n^\gamma + k_{n-2}^\gamma \omega^{2(1+\gamma)} + k_{n-4}^\gamma \omega^{4(1+\gamma)} + \dots,$$

$$A_2 = k_{n-1}^\gamma + k_{n-3}^\gamma \omega^{2(1+\gamma)} + k_{n-5}^\gamma \omega^{4(1+\gamma)} + \dots.$$

В итоге, мера робастной устойчивости устойчивого действительного характеристического полинома непрерывной линейной системы определяется следующим выражением

$$\rho^* = \min \{ \rho_{0,min}, \rho_{\infty,min}, \rho_{\omega,min} \}, \quad (2.23)$$

где значения  $\rho_{0,min}$ ,  $\rho_{\infty,min}$ ,  $\rho_{\omega,min}$  определяются соответственно из (2.21), (2.22).

При  $m \rightarrow \infty$  норма (2.16) переходит в норму (2.17) и (2.22) примет вид

$$\rho_{\omega, \min} = \min \max \{ |N_1| / \hat{A}_1, |N_2| / \hat{A}_2 \}, \quad (2.24)$$

где  $\hat{A}_1 = k_n + k_{n-2} \omega^2 + k_{n-4} \omega^4 + \dots$ ,  $\hat{A}_2 = k_{n-1} + k_{n-3} \omega^2 + k_{n-5} \omega^4 + \dots$ ,

а в выражении (2.21)  $k_0$  и  $k_n$  заменяется на  $k_0^m$  и  $k_n^m$ .

Рассмотрим робастный метод D-разбиения Неймарка для случая дискретных систем. Здесь, определение меры робастной устойчивости состоит в вычислении минимума значения  $\rho$  из (2.20), по всем точкам  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ , принадлежащим границе D-разбиения, которая в данном случае состоит из двух гиперплоскостей  $P_{+1}$  и  $P_{-1}$ , отвечающих уравнениям соответственно

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = 0 \quad \text{и} \quad a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n = 0, \quad (2.25)$$

и гиперповерхности  $P_\varphi$  с параметрическим уравнением

$$a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots = 0, \quad a_1 \sin \varphi + a_2 \sin 2\varphi + \dots = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi).$$

Гиперплоскости  $P_{+1}$  и  $P_{-1}$  соответствуют корням  $\lambda = 1$  и  $\lambda = -1$ , а гиперповерхность  $P_\varphi$  двум корням  $e^{j\varphi}$  и  $e^{-j\varphi}$ .

В итоге, мера робастной устойчивости дискретной линейной системы с действительным характеристическим полиномом по норме (2.16) при  $m = 2$  равна

$$\rho^* = \min \{ \rho_{+1, \min}, \rho_{-1, \min}, \rho_{\varphi, \min} \}, \quad (2.26)$$

где

$$\rho_{+1,min} = (\sum k_s)^{-1/2} |\sum a_s^*|, \quad \rho_{-1,min} = (\sum k_s)^{-1/2} |\sum (-1)^s a_s^*|, \quad (2.27)$$

$$\rho_{\varphi,min} = \min D^{-1} \{ A(\operatorname{Re} D^*(e^{j\varphi}))^2 - 2B(\operatorname{Re} D^*(e^{j\varphi}))( \operatorname{Im} D^*(e^{j\varphi})) + C( \operatorname{Im} D^*(e^{j\varphi}))^2 \}^{1/2},$$

$$A = \sum k_s \cos^2 s\varphi, \quad B = \sum k_s \cos s\varphi \sin s\varphi, \quad C = \sum k_s \sin^2 s\varphi, \quad D = (AB - C^2)^{1/2}.$$

### **2.3. Метод корневых годографов полиномов Харитонов**

Метод корневого годографа является графоаналитическим методом, обладающим как и представленные выше частотные методы широкой наглядностью исследований устойчивости и других свойств рассматриваемых систем. Первоначально [39] *корневой годограф определялся как совокупность траекторий, описываемых корнями характеристического уравнения системы в плоскости корней при изменении одного из ее параметров, чаще всего общего коэффициента усиления.*

Этот метод появился позже частотных методов, но в дальнейшем получил широкое распространение во многих странах благодаря своей наглядности и сравнительной простоте построения годографов.

Для решения задач робастной устойчивости также успешно применим метод корневых годографов. Новые резуль-

таты в этом направлении робастной устойчивости рассмотрим на основе работы [16].

Рассматривается интервальная динамическая система, описываемая следующим семейством характеристических полиномов

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n, \quad (2.28)$$

где  $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ ,  $\underline{a}_0 > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $\underline{a}_i$  и  $\bar{a}_i$  - соответственно нижняя и верхняя границы интервала  $[\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ ,  $\lambda = \varphi + j\omega$ .

Вводятся ряд определений, из которых приведем два основных необходимых определений.

**Определение 1.** *Корневым годографом динамической системы называется корневой годограф характеристического уравнения (полинома) этой системы.*

**Определение 2.** *Корневым портретом (годографом) интервальной динамической системы называется семейство (множество) корневых годографов этой системы.*

Далее исследования проводятся на основе корневого годографа Теодорчика – Эванса, параметром которого является свободный член характеристического уравнения системы.

Для корневого портрета интервальной динамической системы рассматривается семейство функций отображения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-2}\lambda^2 + a_{n-1}\lambda = u(\varphi, \omega) + jv(\varphi, \omega) = -a_n, \quad (2.29)$$

где  $u(\varphi, \omega)$  и  $v(\varphi, \omega)$  – гармонические функции двух независимых переменных  $\varphi$  и  $\omega$ ,  $a_n$  – параметр годографа,  $\lambda = \varphi + j\omega$ .

Аналитические и графические корневые годографы полиномов строятся с использованием функций отображения (2.29).

Уравнение корневого годографа

$$jv(\varphi, \omega) = 0, \quad (2.30)$$

и уравнение параметра

$$u(\varphi, \omega) = -a_n. \quad (2.31)$$

Определяя четыре угловые полиномы Харитонова строится корневой портрет интервальной динамической системы.

Вводятся множества  $W$  и  $B$ , описываемые выражениями:

$$W = \{\omega_i\}, \quad B = \{a_{\omega i}\}, \quad (2.32)$$

где  $W$  – множество (семейство) координат  $\omega_i$  точек пересечения границы устойчивости положительными ветвями годографов корневого портрета интервальной динамической системы,  $B$  – множество значений  $a_{\omega i}$  параметра траекторий  $a_n$  в точках множества  $W, i = 1, 2, \dots$ .

Вводятся также множества  $W_k, B_k$  :

$$W_k \in W, \quad B_k \in B, \quad (2.33)$$

где  $W_k$  – множество координат  $\omega_i$  точек пересечения границы устойчивости положительными ветвями некоторого подсемейства  $f$  полиномов семейства (2.28),  $B_k$  - множество значений  $a_{\omega i}$  параметра траекторий  $a_n$  в точках множества  $W_k$ .

Минимальное значение параметра  $a_{\omega \min}$  в области пересечений для подсемейства  $f$  :

$$a_{\omega \min} = \inf B_k. \quad (2.34)$$

Расположение начальных точек годографов корневого портрета интервальной динамической системы относительно границы устойчивости, определяет интервалы изменения значений коэффициентов ее характеристического уравнения, при которых данная система будет асимптотически устойчивым.

Справедливо следующее утверждение, доказанное в [16].

**Утверждение 1.** *Если все начальные точки корневых годографов подсемейства  $f$  семейства полиномов (2.28) исключая точки, постоянно находящиеся в начале координат, располагаются в левой полуплоскости комплексной плоскости корней  $\lambda$ , то всегда существует интервал  $d$  значений параметра  $a_n$  этих годографов:*

$$d = (0, a_{\omega \min}), \quad (2.35)$$

при которых подсемейство  $f$  асимптотически устойчиво.

Утверждение 1 используется для синтеза устойчивых полиномов Харитонова на основе заданных неустойчивых. Алгоритм синтеза, когда рассматривается случай расположения начальных точек в левой полуплоскости будет следующий.

*Этап 1.* Определение уравнения (2.30) корневого годографа Теодорчика-Эванса для каждого из четырех полиномов Харитонова интервальной системы.

*Этап 2.* Определение координат  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ , где  $l$  - число точек пересечения мнимой оси ветвями корневых годографов) точек пересечения границы устойчивости ветвями подсемейства корневых годографов полиномов Харитонова системы путем решения уравнений, полученных на предыдущем этапе, относительно  $\omega$  при условии, что  $\varphi=0$ . В итоге, определяется множество  $W_k$  (2.33).

Для каждого  $\omega_i$  из множества  $W_k$  по формуле параметра (2.31) вычисляется соответствующее значение варьируемого коэффициента  $a_n$ , и определяется множество  $B_k$  (2.34).

*Этап 3.* Определение интервала устойчивости (2.35) по коэффициенту  $a_n$ .

Для этого, используя (2.34), определим минимальное  $a_{\omega_{min}}$  из значений параметра в точках множества  $B_k$ . В итоге, по-

лучим интервал  $d$  изменения коэффициента  $a_n$ , который обеспечивает устойчивость полиномов Харитонова, а следовательно и системы в целом.

Для осуществления этапа 4 используется Теорема 1, доказанная также в работе [16].

**Теорема 1.** *Для робастной устойчивости семейства (2.28) необходимо и достаточно, чтобы значения свободного члена  $a_n$  удовлетворяли неравенству*

$$0 < a_n < a_{\omega \min}, \quad (2.36)$$

*если при  $a_n = 0$  отрицательны действительные части всех корней каждого полинома Харитонова (2.28), кроме одного из этих корней, который всегда равен нулю.*

**Этап 4.** Сравнение полученного интервала устойчивости (2.35) с заданным интервалом  $a_n \in [\underline{a}_n, \overline{a}_n]$  неопределенности параметра  $a_n$  в соответствии с неравенством (2.36).

В случае невыполнения условия (2.36) верхняя граница  $\overline{a}_n$  интервала изменения параметра настраивается в соответствии с этим неравенством.

Если часть начальных точек годографов располагается в правой полуплоскости корней, то интервал устойчивости свободного параметра может отсутствовать. В этом случае, устой-

чивость будет недостижима посредством настройки одного свободного параметра (свободного члена характеристического уравнения) и для ее обеспечения потребуются иной, более сложный алгоритм.

### ГЛАВА III.

## МЕТОДЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО НАПРАВЛЕНИЯ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

### 3.1. Робастная устойчивость интервальных динамических систем по В.Л. Харитонову

Как отмечено во введении, основополагающие работы В.Л.Харитонова [45-47], со времени выхода в свет, вызвали огромный поток публикаций, связанных с чрезвычайной актуальностью решения проблем робастности и грубости систем [11].

В этих работах В.Л. Харитоновым решены вопросы об устойчивости интервальных полиномов (или семейства полиномов) вида

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (3.1)$$

где  $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ ,  $i = \overline{0, n}$  - коэффициенты заданные в интервалах  $\underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i$  (далее придерживаемся записи  $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ ),  $\underline{a}_i, \bar{a}_i$  - соответственно нижние и верхние границы коэффициентов  $a_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ .

В работе [45] решена задача для полиномов (I.I) с действительными коэффициентами, а в [46] с комплексными коэффициентами. Показано, что необходимыми и достаточными условиями робастной устойчивости всего семейства действительных и комплексных полиномов (1.1) является соответственно устойчивость четырех и восьми (парных) угловых полиномов с коэффициентами:

1) в случае действительных коэффициентов:

$$\begin{aligned} &\{\underline{a}_0, \underline{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \underline{a}_4, \dots\}, \\ &\{\underline{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \dots\}, \\ &\{\bar{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \dots\}, \\ &\{\bar{a}_0, \bar{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \bar{a}_4, \dots\}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

2) в случае комплексных коэффициентов, определенные парами:

$$\begin{aligned} &(h_1, g_1), (h_1, g_2), (h_2, g_1), (h_2, g_2), \\ &(h_3, g_3), (h_3, g_4), (h_4, g_3), (h_4, g_4), \end{aligned}$$

$h_i, g_i, i = \overline{1, 4}$  - соответственно действительные и мнимые части комплексного полинома (1.1)  $f(j\omega) = h(\omega) + jg(\omega)$  с действительными коэффициентами множеств типа (1.2).

Эти угловые полиномы теперь носят название *полиномов Харитонова*.

Как известно [10, 45], В.Л. Харитоновым получены фундаментальные результаты в области робастной устойчивости, которые сформулированы в виде трех теорем. При этом, Теорема 1 в литературе часто называют *слабой теоремой Харитонова*, результат которой формулируется следующим образом.

**Теорема 1 Харитонова.** *Для робастной устойчивости семейства полиномов (3.1), необходимо и достаточно, чтобы все  $2^{n+1}$  угловые полиномы были гурвицевы.*

Угловые полиномы это все полиномы вида (3.1), которые имеют коэффициенты, соответствующие угловым значениям интервалов принадлежности этих коэффициентов.

Результат *сильной теоремы Харитонова* - Теоремы 2 Харитонова, формулируется следующим образом.

**Теорема 2 Харитонова.** *Для робастной устойчивости семейства полиномов (3.1), необходимо и достаточно, чтобы были гурвицевы лишь четыре угловых полинома с наборами коэффициентов (3.2).*

Для представления Теоремы 3 Харитонова рассмотрим динамическую систему вида

$$\dot{x} = F(x, q), \quad (3.3)$$

где  $x \in R^n$ ,  $q \in R^p$ ,  $q_i \in [\underline{q}_i, \bar{q}_i]$ ,  $i = \overline{1, p}$ ,  $q$  - вектор параметров, граничные (угловые) значения параметров  $\underline{q}_i, \bar{q}_i$ . Предполагается, что изменения  $q$  квазистационарные (медленные,  $dq/dt = 0$ ).

Тогда в окрестностях точек равновесия  $F(x, q) = 0$ , систему (3.3) можно представить линейными интервальными системами

$$\dot{x} = A_k(q)x, \quad (3.4)$$

где  $A_k(q) \in R^{n \times n}$  - интервальная матрица с элементами  $a_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , являющимися функциями от  $q$ , т.е. представимы как интервальные величины  $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$  с угловыми значениями  $\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}$ ,  $\bar{a}_{ij} \leq \bar{a}_{ij}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  - номера особых точек. В общем случае  $A_k(q)$  является многогранником матриц со взаимосвязанными элементами [10].

Таким образом мы приходим к необходимости решения задачи В.Л.Харитонова для интервальных матриц [45] и задачи 3 для многогранников матриц [10].

В работе [45] была сформулирована теорема (третья) об асимптотической устойчивости системы типа (3.4), без доказательства и каких-либо уточнений.

**Теорема 3 Харитонова.** *Для асимптотической устойчивости точки (положения) равновесия  $x = 0$  всех систем вида (3.4), достаточно, чтобы четыре полинома из теоремы 2 были гурвицевы.*

Эта работа В.Л.Харитоновы вызвала огромный поток публикаций отечественных и зарубежных исследователей (см.обзоры [10, 29]). Так в работе [59] была опубликовано доказательство теоремы типа указанной теоремы Харитоновы, которая как было показано на контрпримерах [55, 66], оказалась неверной.

Таким образом, в современной теории робастной устойчивости интервальных динамических систем существуют два альтернативных направления :

- алгебраическое или Харитоновское направление;
- частотное или направление Цыпкина – Поляка.

В алгебраическом или Харитоновском направлении исследований проблемы робастной устойчивости, известны работы многих авторов.

В работах [8-11, 29] представлены обзоры и постановки задач робастной устойчивости, которые были вызваны известной работой В.Л.Харитоновы [45].

В работе Б.Т.Поляка, П.С.Щербакова [32] предложено понятие сверхустойчивости линейных систем управления. При этом сверхустойчивые системы обладают свойствами выпуклости, допускающими простые решения многих классических задач теории управления, в частности, задачи робастной стабилизации при матричной неопределенности. Но существенным

ограничением таких систем является практическая узость их класса, определяемого условиями наличия доминирующих диагональных элементов матрицы системы с отрицательными величинами [7].

В работе В.М.Кунцевича [12] получены интересные результаты по робастной устойчивости для линейных дискретных систем. При этом матрица системы задается в классе сопровождающих характеристический полином системы, т.е. в Фробениусовой форме [7], что также сужает класс рассматриваемых реальных систем.

В работах В.Р.Вармिश и др. [55, 56] предложены контрпримеры к теореме Биаласа [59], которые аннулированы в работе [21].

В работах М.Мансур и др. [68-70] получены дискретные аналоги слабой и сильной теорем Харитоновой [45], которые имеют ограничения, накладываемые на интервальные области коэффициентов или применяется [10, 22, 23] непростая процедура проектирования корней полиномов на отрезок  $[-1, 1]$ .

В последующих параграфах данной главы работы рассматривается *алгебраический метод* Харитоновского направления исследования робастной устойчивости непрерывных интервальных динамических систем, в случае интервальных мат-

риц систем общего вида и без определенных ограничений, основы которого заложены в работах [21, 22].

### 3.2. Робастная устойчивость линейных непрерывных интервальных динамических систем

В работе [21] сформулирована и доказана теорема типа третьей теоремы Харитоновой [45], которая аннулирует контрпримеры [55, 66], более того на ее основе доказана реберная теорема [10] для многогранников матриц. Новая реберная теорема также аннулирует контрпримеры [56] для этого случая.

Прежде, чем сформулировать основную теорему введем следующие обозначения:  $A$  - матрица  $A_k$  в (3.4) при фиксированном значении  $k$ ;  $D_a$ - множество матриц с интервальными элементами  $a_{ij}$ ,

$$D_a = \{a_{ij} : \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, i, j = \overline{1, n}\};$$

$a_i, i = \overline{1, n}$ - коэффициенты характеристического уравнения (полинома) системы (3.4)

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0, \quad (3.5)$$

где  $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i], i = \overline{1, n}, a_0 = 1$ , а коэффициенты  $\underline{a}_i, \bar{a}_i$  называются угловыми; четыре угловых полиномов Харитоновой  $f_l(\lambda), l = \overline{1, 4}$  [45] характеризуются множествами коэффициентов, представленных в (3.2), начиная с  $a_1$ .

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.1.** *Для того, чтобы особая точка (положение равновесия)  $x=0$  системы (3.4) была асимптотически устойчива при всех  $A \in D_a$ , необходимо и достаточно, чтобы были гурвицевы все четыре угловых полиномов Харитонова, составленных по сепаратным угловым коэффициентам  $a_i$  ( $\underline{a}_i, \bar{a}_i$ ),  $i=\overline{1, n}$ , характеристических полиномов системы (3.5).*

Данная теорема доказывается на основе следующей леммы.

**Лемма.** *Сепаратные угловые коэффициенты  $a_i$  ( $\underline{a}_i, \bar{a}_i$ ),  $i=\overline{1, n}$ , образуются как соответствующие коэффициенты полиномов (3.5), либо при угловых значениях элементов  $a_{ij}; i, j = \overline{1, n}$ , матрицы  $A$ , либо при нулевых значениях некоторых элементов (если интервал принадлежности включает нуль).*

Как нетрудно видеть из леммы, для нахождения коэффициентов  $a_i$  ( $\underline{a}_i, \bar{a}_i$ ),  $i=\overline{1, n}$ , в общем случае необходимо применение оптимизационных методов нелинейного программирования [48].

К теореме 3.1, доказательство которой приведено в приложении [21], а также в приложении к данной работе, необходимо сделать следующее уточняющее замечание.

*Замечание.* Из основного аргумента доказательства теоремы 3.1, связанного с наличием четырех угловых полиномов Харитонова следует, что при отсутствии полного множества (набора) из четырех угловых полиномов условия теоремы 3.1 необходимы, но могут быть недостаточны для устойчивости системы (3.4).

Случай соответствующий приведенному замечанию может возникнуть тогда, когда сепаратные угловые коэффициенты полиномов (3.5) взаимосвязаны и в итоге сужают набор угловых полиномов до количества менее четырех, включая и кратные, совпадающие полиномы.

Лемма и теорема 3.1 при больших порядках  $n$  вызывают немалые вычислительные трудности, связанные с оптимизационным нахождением коэффициентов  $\underline{a}_i, \bar{a}_i, i=\overline{1, n}$ .

Для уменьшения этих трудностей воспользуемся результатами теории мажоризации, а именно теоремой Фана [64], позволяющей сравнивать действительные части собственных значений матрицы  $A$  с собственными значениями матрицы  $(A + A^*)/2$ .

**Теорема Fan:** Для любой комплексной  $(n \times n)$  - матрицы  $A$

$$(Re\lambda_1(A), \dots, Re\lambda_n(A)) \subset (\lambda_1((A+A^*)/2), \dots, \lambda_n((A+A^*)/2)). \quad (3.6)$$

Здесь  $c$  - знак мажорирования, которая представляет (3.6) в виде

$$\sum_1^k \lambda_i ((A + A^*)/2)/2 \geq \sum_1^k \operatorname{Re} \lambda_i(A), i, k = \overline{1, n}. \quad (3.7)$$

где  $\lambda_1((A + A^*)/2)$  и  $\lambda_1(A)$  считаются упорядоченными, т.е.

$$\lambda_1((A+A^*)/2), \dots, \lambda_n((A+A^*)/2),$$

$$\operatorname{Re} \lambda_1(A) \geq \dots \geq \operatorname{Re} \lambda_n(A),$$

$A^*$  - сопряженная (транспонированная) к  $A$  матрица.

Элементы  $a_{ij}^c$  симметрической матрицы  $A_c = (A+A^*)/2$  будут соответственно равны: диагональные  $a_{ii}^c = a_{ii}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ; внедиагональные  $a_{ij}^c = a_{ji}^c = (a_{ij} + a_{ji})/2$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

Для такой матрицы  $A_c$  очевидно выражения (П.1), а значит и процедура оптимизации соответствующих коэффициентов (П.1) характеристических полиномов существенно упрощается.

Доказав устойчивость четырех угловых полиномов Харитонова для матрицы  $A_c$ , мы тем самым согласно теореме Фана (определяющей достаточные условия) докажем устойчивость исходной системы (3.4).

Справедливость доказанной теоремы 3.1 подтверждается аннулированием известных контрпримеров к теореме Биаласа [59].

Действительно, для контрпримера из [55] имеем:

$$A=\Omega_r=\begin{vmatrix} -0.5-r & -12.06 & -0.06 \\ -0.25 & 0 & 1 \\ 0.25 & -4 & -1 \end{vmatrix}, \quad (3.8)$$

где  $r \in [0,1]$ .

По Биаласу матрица  $A$  устойчива. Но в [55] показано, что при  $r \in [0.5-\sqrt{0.06}, 0.5+\sqrt{0.06}]$  интервальная матрица  $A$  неустойчива (негурвицева), поскольку  $a_1a_2 - a_0a_3 = r^2 - r + 0.19 < 0$ .

А по результатам данной работы имеем

$$a_1 = -\sum_1^3 a_{ii} = 1.5 + r,$$

$$a_2 = \sum_1^3 a_{ii}a_{jj} - \sum_1^3 a_{ij}a_{ji} = 1.5 + r,$$

$$a_3 = -\sum_1^3 a_{ii}a_{jj}a_{kk} + \sum_1^3 a_{ii}a_{jk}a_{kj} - \sum_1^3 a_{ij}a_{jk}a_{ki} = 4r + 2.6,$$

отсюда  $\underline{a}_1 = 1.5$ ,  $\bar{a}_1 = 2.5$ ;  $\underline{a}_2 = 1.5$ ,  $\bar{a}_2 = 2.5$ ;  $\underline{a}_3 = 2.06$ ,  $\bar{a}_3 = 6.06$ .

Тогда четыре угловых полинома Харитоновы будут

$$f_1(\lambda) = \lambda^3 + 1.5\lambda^2 + 1.5\lambda + 6.06,$$

$$f_2(\lambda) = \lambda^3 + 1.5\lambda^2 + 2.5\lambda + 6.06,$$

$$f_3(\lambda) = \lambda^3 + 2.5\lambda^2 + 1.5\lambda + 2.06,$$

$$f_4(\lambda) = \lambda^3 + 2.5\lambda^2 + 2.5\lambda + 2.06.$$

Вычисляя получаем, что  $f_1(\lambda)$  и  $f_2(\lambda)$  неустойчивы, а  $f_3(\lambda)$  и  $f_4(\lambda)$  - устойчивы. Для

$$f_1(\lambda): a_1a_2 = 2.25, a_0a_3 = 6.06;$$

$$f_2(\lambda): a_1a_2 = 3.75, a_1a_2 = 6.06;$$

$$f_3(\lambda): a_1a_2=3.75, a_0a_3=2.06;$$

$$f_4(\lambda): a_1a_2=6.25, a_0a_3=2.06.$$

Следовательно, интервальная матрица  $A = \Omega_r$  неустойчива.

Аналогично можно установить непротиворечивость полученных результатов контрпримеру из [66].

Теперь рассмотрим примеры, которые наглядно поясняют смысл *Замечания* к теореме 3.1.

*Пример 1.* Покажем, что система (3.4) с интервальной матрицей вида  $A = \Omega_r$  (3.8), которая не обладает полным набором из четырех характеристических полиномов Харитонова, является неопределенной робастности.

Действительно, если положим  $r_1 = 0,5 - \sqrt{0,06}$ ,  $r_2 = 0,5 + \sqrt{0,06}$ , то как известно [55] система (3.4) является неустойчивой при  $r_1 < r < r_2$ , а в интервалах  $r \in [0, r_1)$  и  $r \in (r_2, 1]$  эта система устойчива. Если теперь предположить, что коэффициенты характеристического полинома (3.5) не зависят друг от друга и мы имеем четыре угловых полинома системы (3.4), то нетрудно вычислить, что только в малых частях указанных выше интервалов робастной устойчивости  $r \in [0, r_1)$  и  $r \in (r_2, 1]$  имеет место устойчивость всех четырех характеристических полиномов, а именно при  $r \in [0, 0,475)$  и  $r \in (0,9617, 1]$ .

Так например, для интервала  $r \in [0, r_1)$  имеем следующие четыре угловых полинома:

$$f_1(\lambda) = \lambda^3 + 1,5 \lambda^2 + 1,5 \lambda + (2,06 + 4r_1),$$

$$f_2(\lambda) = \lambda^3 + 1,5 \lambda^2 + (1,5 + r_1) \lambda + (2,06 + 4r_1),$$

$$f_3(\lambda) = \lambda^3 + (1,5 + r_1) \lambda^2 + 1,5 \lambda + 2,06,$$

$$f_4(\lambda) = \lambda^3 + (1,5 + r_1) \lambda^2 + (1,5 + r_1) \lambda + 2,06,$$

из которых два первых неустойчивы, а следующие два устойчивы.

Данный пример показывает, что из-за зависимости между коэффициентами характеристического полинома (3.5), здесь действительно имеет место неполный набор из двух угловых полиномов, и мы не можем однозначно установить интервалы робастной устойчивости системы (3.4), как и следовало согласно *Замечания* к теореме 3.1.

*Пример 2.* Пусть задан характеристический полином интервальной системы (3.4) в виде

$$f(\lambda) = \lambda^3 + 1,5 \lambda^2 + 2,5 \lambda + a_3, \quad (3.9)$$

где коэффициент  $a_3 \in [2, 3]$ . Такой случай системы (3.4) возможен например, при Фробениусовой или сопровождающей форме матрицы  $A$ .

Тогда, четыре угловых характеристических полинома системы (3.4) будут следующие:

$$f_1(\lambda) = \lambda^3 + 1,5 \lambda^2 + 2,5 \lambda + 3,$$

$$f_2(\lambda) = \lambda^3 + 1,5 \lambda^2 + 2,5 \lambda + 3,$$

$$f_3(\lambda) = \lambda^3 + 1,5 \lambda^2 + 2,5 \lambda + 2,$$

$$f_4(\lambda) = \lambda^3 + 1,5 \lambda^2 + 2,5 \lambda + 2.$$

Как нетрудно видеть, в данном случае все четыре характеристических полинома системы (3.4) устойчивы ( $a_1 a_2 > a_3$ ) и система (3.4) робастно устойчива. Если же, положим  $a_3 \in [2,06, 4,06]$ , то в этом случае, первые два полинома  $f_1(\lambda)$  и  $f_2(\lambda)$  неустойчивы, а два следующих  $f_3(\lambda)$  и  $f_4(\lambda)$  устойчивы, а следовательно система (3.4) робастно неустойчива.

В этом примере мы рассмотрели два случая интервальной системы (3.4), когда имеются две пары совпадающих или кратных характеристических полиномов, но при этом имеются полные наборы четырех полиномов Харитонова, в отличие от случая системы (3.4) с матрицей  $A = \Omega_r$  (3.8), где нет полного набора из четырех угловых характеристических полиномов, а только два угловых полинома, вследствие жесткой зависимости коэффициентов  $a_i$ ,  $i=1,2,3$  от параметра  $r$ . Поэтому, в обоих случаях рассматриваемого *Примера 2* в соответствии с *Замечанием* к теореме 3.1 можно сделать вполне определенный вывод о робастной устойчивости или неустойчивости интервальной системы (3.4) с характеристическим полиномом (3.5), в то вре-

мя как в случае с матрицей вида  $A = \Omega_r$ , мы определенный вывод о робастной устойчивости не можем сделать (здесь следует отметить, что в работе [21] вывод по данному случаю сделан неправомерно).

*Пример 3.* Для наглядности рассмотрим простой пример интервальной системы второго порядка.

Пусть система (3.4) имеет интервальную матрицу  $A = [a_{11}, a_{12}; 1, -2]^T$ , где элементы первой строки являются интервальными:  $a_{11} \in [-1, 0]$ ;  $a_{12} \in [-2, -1]$ .

Тогда, последовательные сепаратные угловые коэффициенты интервального характеристического полинома будут следующие:

$\underline{a}_1 = 2$ ,  $\overline{a}_1 = 3$ ;  $\underline{a}_2(\underline{a}_1) = 1$ ,  $\overline{a}_2(\underline{a}_1) = 2$ ;  $\underline{a}_2(\overline{a}_1) = 3$ ,  $\overline{a}_2(\overline{a}_1) = 4$ ; , следовательно, имеем полный набор следующих четырех угловых характеристических полиномов Харитонова:

$$f_1(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1,$$

$$f_2(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2,$$

$$f_3(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 3,$$

$$f_4(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 4.$$

Как видно, все четыре угловые полиномы устойчивы, а значит система (3.4) с рассмотренной интервальной матрицей робастно устойчива.

Полученные теорема 3.1 и лемма позволяют решить и задачу о реберной теореме для многогранников матриц [10].

Как известно [10], многогранником матриц называется множество

$$P = \{P_s = \sum_1^m s_i P_i : s_i \geq 0, i=1, 2, \dots, m, \sum_1^m s_i = 1\}, \quad (3.10)$$

где  $P_i, i = \overline{1, m}$  постоянные матрицы.

В обзоре [10] сформулирована гипотеза об условиях устойчивости  $P$  в следующем виде (с точностью до обозначений).

**Гипотеза.** Многогранник  $P$  устойчив тогда, и только тогда, когда ребра  $P$  устойчивы, т.е. матрица

$$sP_i + (1-s)P_j. \quad (3.11)$$

устойчива при любых  $i, j = \overline{1, m}, s \in [0, 1]$ .

Но как показано на контрпримерах в [56] гипотеза неверна для строго гурвицева случая. Эти контрпримеры аннулируются теоремой 3.2, полученной на основе теоремы 3.1 и леммы.

**Теорема 3.2.** Для устойчивости многогранника матриц  $P$  необходимо и достаточно, чтобы выпуклые ребра  $P$  были устойчивы, т.е. матрица

$$s_1 P_i + s_2 P_j, \quad (3.12)$$

устойчива при любых  $i, j = \overline{1, m}, s_1 \in [-1, 0], s_2 \in [0, 1]$ .

Доказательство теоремы 3.2 приведено в Приложении к данной работе.

Покажем, что действительно контрпримеры [56] не противоречат теореме 3.2.

*Контрпример 1.* Рассматриваются матрицы

$$P_1=M_1=\begin{vmatrix} -1.0 & 0 & 1.0 \\ 0 & -1.0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0.1 \end{vmatrix},$$

$$P_2=M_2=\begin{vmatrix} -1.0 & 0 & 1.0 \\ 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0.1 \end{vmatrix};$$

$$P_3=M_3=\begin{vmatrix} -1.0 & 0 & -1.0 \\ 0 & -1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.1 \end{vmatrix}$$

В [56] показано, что ребра типа (3.12) строго гурвицевы, которое утверждается по гипотезе об устойчивости многогранника матриц  $P$ .

Но там же показано, что матрица

$$\frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3 = \begin{vmatrix} -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{vmatrix}$$

неустойчива.

По теореме 3.2 имеем для пары  $(P_1, P_2)$

$$\det[\lambda I - (s_1 P_1 + s_2 P_2)] = (\lambda + s_1 + s_2)[\lambda^2 + 0.9(s_1 + s_2)\lambda - 0.1(s_1 + s_2)^2 + s_1 s_2 + s_1^2].$$

Отсюда очевидно, что при независимых  $s_1$  и  $s_2$  принадлежащих соответственно интервалам  $s_1 \in [-1, 0]$ ,  $s_2 \in [0, 1]$  например, при  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = 0$ , матрица  $s_1 P_1 + s_2 P_2$  неустойчива.

*Контрпример 2.* Рассматривается матрица

$$M = \begin{vmatrix} m_{11} & -12.06 & -0.06 & 0 \\ -0.25 & -0.03 & 1.00 & 0.5 \\ 0.25 & -4.0 & -1.03 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & m_{44} \end{vmatrix}$$

где  $m_{11} \in [-1.5, -0.5]$ ;  $m_{44} \in [-4.0, -1.0]$ , которые представлены в виде  $m_{11} = -0.5 - q_1$ ,  $m_{44} = -1.0 - q_2$ ,  $q_1 \in [0, 1]$ ,  $q_2 \in [0, 3]$ .

Характеристический полином

$$f(\lambda, q_1, q_2) = \lambda^4 + (2.56 + q_1 + q_2)\lambda^3 + (2.871 + 2.06q_1 + 1.561q_2 + q_1q_2)\lambda^2 + (3.164 + 4.841q_1 + 1.56q_2 + 1.06q_1q_2)\lambda + (1.853 + 3.773q_1 + 1.985q_2 + 4.032q_1q_2).$$

В [56] рассматривая 4 случая:

$$q_1 = 0, q_2 \in [0, 3];$$

$$q_1 \in [0, 1], q_2 = 0;$$

$$q_1 = 1, q_2 \in [0, 3];$$

$$q_1 \in [0, 1],$$

$$q_2 = 3,$$

показывается, что во всех этих случаях множества (семейства)  $M$  строго гурвицевы. Однако, в точке множества  $q = 0.5$  и  $q = 1.0$

получен полином  $f(\lambda, 0.5, 1.0) = \lambda^4 + 4.06\lambda^3 + 5.961\lambda^2 + 7.676\lambda + 7.741$ , который неустойчив.

Для нашего случая, представляя как в (П.7)  $q_1 = q_{11} + q_{12}$ ,  $q_2 = q_{21} + q_{22}$ , где  $q_{11} \in [-1, 0]$ ,  $q_{12} \in [0, 1]$ ,  $q_{21} \in [-3, 0]$ ,  $q_{22} \in [0, 3]$ , получим для пары  $(q_{11}, q_{22})$  следующие четыре полинома Харитонова

$$f_1(\lambda) = \lambda^4 + 2.56\lambda^3 + 2.871\lambda^2 + 15.865\lambda + 23.677,$$

$$f_2(\lambda) = \lambda^4 + 2.56\lambda^3 + 12.614\lambda^2 + 15.865\lambda + 1.853,$$

$$f_3(\lambda) = \lambda^4 + 6.56\lambda^3 + 2.871\lambda^2 + 3.164\lambda + 23.677,$$

$$f_4(\lambda) = \lambda^4 + 6.56\lambda^3 + 12.614\lambda^2 + 3.164\lambda + 1.853.$$

Для полиномов четвертого порядка как известно при положительности всех коэффициентов условие устойчивости определяется неравенством  $\Delta = a_1 a_2 a_3 - (a_3^2 + a_4 a_1^2) > 0$ .

Вычисляя соответственно находим, что полиномы  $f_1(\lambda)$  и  $f_3(\lambda)$  неустойчивы  $\Delta_1 = -290.264$ ,  $\Delta_3 = -969.327$ , а полиномы  $f_2(\lambda)$  и  $f_4(\lambda)$  устойчивы  $\Delta_2 = 248.468$ ,  $\Delta_4 = 172.062$ .

Таким образом, и для этого примера нет противоречий с теоремами 3.1 и 3.2.

*Контрпример 3.* В [56] утверждается, что между выпуклыми оболочками многогранника матриц и соответствующих полиномов нет соответствия. По результатам леммы, теорем 3.1

и 3.2 это подтверждается в силу того, что множества угловых коэффициентов полиномов содержат только два значения  $\underline{a}_j, \bar{a}_j$ ,  $i=\overline{1, n}$  и для каждого коэффициента, а множества угловых элементов матриц могут содержать в общем случае три значения  $\underline{a}_{ij}, 0, \bar{a}_{ij}$ ,  $i, j=\overline{1, n}$ , т.е. множество матриц шире (мощнее) множества полиномов, относительно угловых элементов и коэффициентов.

### 3.3. Вопросы робастности интервальных динамических систем

Результаты предыдущего параграфа позволяют решать ряд нерешенных вопросов робастной устойчивости. Рассмотрим эти вопросы.

*Комплексные матрицы.* В случае комплексных матриц  $A$  и многогранников матриц  $P$ , результаты полученные в параграфе 3.2 в сочетании с результатами работы [46] для комплексных полиномов позволяют решать задачи робастной устойчивости, а именно в этом случае требуется рассмотрение восьми полиномов Харитонова по четыре для действительной и мнимой частей (парами). Соответственно оптимизируются коэффициенты мнимых и вещественных частей полиномов  $f(j\omega) = h(\omega) + jg(\omega)$ .

Таким образом, нетрудно доказать следующие теоремы.

**Теорема 3.3.** Для того, чтобы интервальная матрица  $A$  с комплексными коэффициентами  $a_{ij} = \alpha_{ij} + j\beta_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ;  $\alpha_{ij} \in [\underline{\alpha}_{ij}, \bar{\alpha}_{ij}]$ ,  $\beta_{ij} \in [\underline{\beta}_{ij}, \bar{\beta}_{ij}]$  была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы восемь вещественных полиномов Харитонова, определенных парами  $(h_1, g_1)$ ,  $(h_1, g_2)$ ,  $(h_2, g_1)$ ,  $(h_2, g_2)$ ,  $(h_3, g_2)$ ,  $(h_3, g_3)$ ,  $(h_4, g_3)$ ,  $(h_4, g_4)$  были устойчивы.

*Замечание 1.* Оптимизация коэффициентов отдельных угловых полиномов здесь ведется раздельно по вещественным и мнимым частям.

*Замечание 2.* Если использовать доказанную выше теорему, то в этом случае верна и реберная теорема для комплексных матриц.

*Условие аперидичности.* Как известно [10], условие аперидичности (строгой аперидичности) означает, что все корни (собственные значения) вещественны и отрицательны (различны, вещественны и отрицательны).

В этом случае, используя результаты [74] ([10]) получим следующую теорему .

**Теорема 3.4.** Для того, чтобы интервальная матрица  $A$  была строго аперидична, необходимо и достаточно, чтобы были строго аперидичны четыре пары полиномов Соха, ассоциированные с четырьмя полиномами Харитонова, полученными в соответствии с теоремой 3.1.

*Замечание 1.* Аналогичное место имеет и условие нестрогой апериодичности.

*Замечание 2.* Условие строгой и нестрогой апериодичности нетрудно сформулировать и для многогранников матриц, используя теорему 3.2 и полиномы Соха [10].

Доказательство теоремы 3.4 нетрудно провести используя теорему 3.1, а также теорему Соха об условиях апериодичной робастности многочленов [10].

**Теорема Соха.** *Необходимым и достаточным условием строго апериодичной робастности многочлена  $f(\lambda)$  является строгая апериодичность многочленов  $f_{s1}(\lambda)$  и  $f_{s2}(\lambda)$ , полученных из  $f(\lambda)$  следующим образом:*

$$f_{s1}(\lambda) = \sum_{i=0}^n t_{1i} \lambda^{n-i},$$

$$\text{где } t_{1k} = \begin{cases} \overline{a_k}, & k \text{ нечетно,} \\ \underline{a_k}, & k \text{ четно,} \end{cases}$$

$$f_{s2}(\lambda) = \sum_{i=0}^n t_{2i} \lambda^{n-i},$$

$$\text{где } t_{2k} = \begin{cases} \overline{a_k}, & k \text{ четно,} \\ \underline{a_k}, & k \text{ нечетно,} \end{cases} \quad k = \overline{0, n}.$$

*Модальность.* Термин модальности введен отечественными исследователями [27], в зарубежной литературе пользуются термином  $D$  - устойчивости и означает, что область устойчивости (локализации корней, собственных значений) пред-

ставляет некоторую односвязную область  $D$  - любой формы [10]. Для этого случая справедлива теорема.

**Теорема 3.5.** *Для того, чтобы многогранник матриц  $P$  был модальным с областью  $D$ , необходимо и достаточно, чтобы были модальными с этой же областью все матрицы*

$$s_1 P_i + s_2 P_j, \quad (3.13)$$

где  $s_1 \in [-1, 0]$ ,  $s_2 \in [0, 1]$ ,  $i, j = \overline{1, m}$ .

### **3.4. Робастная устойчивость линейных дискретных интервальных динамических систем**

Как известно, публикация работы [45] дала импульс для поиска многими исследователями дискретных аналогов теорем Харитоновой [8-10, 22]. Так в работе [10] указано, что «дискретный вариант харитоновского условия четырех многочленов отсутствует». В этой работе показывается, что действительно для дискретных систем возникают сложности, связанные с тем, что «имеется несовместимость между областью устойчивости, которая в данном случае представляет собой единичный круг и областью изменения коэффициентов, которая является прямоугольником со сторонами параллельными координатным осям» Здесь же отмечается, что в настоящее время получены [68-70] дискретные аналоги слабой и сильной теорем Харитоновой с по-

мощью декомпозиции рассматриваемого интервального многочлена

$$f(z) = \sum_0^n a_{n-i} z^i, a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i], \quad (3.14)$$

на симметричную и антисимметричную части:

$$h(z) = (1/2)[f(z) + z^n f(z^{-1})],$$

$$g(z) = (1/2)[f(z) - z^n f(z^{-1})].$$

Но эти аналоги теорем Харитоновы имеют определенные ограничения, накладываемые на интервальные области коэффициентов (пары коэффициентов)  $a_i$  и  $a_{n-i}$  образуют прямоугольники наклоненные под углом  $45^\circ$  к осям). Эти ограничения были сняты в работах [22,23], где получены аналоги теорем Харитоновы с использованием теоремы Шура. При этом сформулированы теоремы, являющиеся дискретными аналогами результатов работы [21] по интервальным матрицам и многогранникам матриц.

Далее, рассматривается обобщение результатов, полученных в работах [22, 23] с учетом выводов приведенных выше для непрерывных систем.

Пусть задана дискретная интервальная динамическая система

$$x(m+1) = Ax(m), m = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.15)$$

где  $x(m)$  - вектора состояния,  $A \in R^{n \times n}$  - интервальная матрица с элементами  $a_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$ , представляющими интервальные величины  $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$  с угловыми значениями  $\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}, \bar{a}_{ij} \leq \bar{a}_{ij}$ .

Для дискретных систем, используя  $z$  - преобразование, получаем интервальный характеристический полином системы (3.15)

$$f(z) = \det(zI - A) = \sum a_i z^{n-i}, a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i], \underline{a}_i \leq \bar{a}_i. \quad (3.16)$$

Тогда, как известно [10, 50], полином (система) (3.16) устойчив, если все его корни лежат внутри единичного круга, т.е.

$$|z_i| < 1, \quad (3.17)$$

где  $z_i, i = \overline{1, n}$  корни (3.16). Для определения условий устойчивости воспользуемся подходом теоремы Шура [50], т.е. путем проверки выполнения условий вида

$$|a_0| < |a_n|, \quad (3.18)$$

для последовательности полиномов, определяемых рекуррентными соотношениями

$$f_1(z) = (a_0 f(z) - a_n f(1/z) z^n) / z, \quad \dots \dots \dots (3.19)$$

$$f_{i+1}(z) = (a_{0,i} f_i(z) - a_{n,i} f_i(1/z) z^{n-i}) / z,$$

где  $a_{0,i}, a_{n,i}$  - соответственно старший и младший коэффициенты  $i$  - го ( $i = \overline{1, n-2}$ ) полинома  $f_i(z)$ . Введем определение.

**Определение.** Точками перемежаемости для коэффициента  $a_i, i = \overline{0, n}$ , будем называть точки на действительной оси,

в которых происходят переходы корней полинома (3.16) через единичную окружность на плоскости корней, а *интервалами перемежаемости* соответственно интервалы в которых корни находятся либо внутри, либо вне единичного круга (рис.1).

Используя (3.18) и (3.19) получены следующие утверждения.

**Теорема 3.6.** Для полинома (3.16), в общем случае, количество точек перемежаемости при изменениях  $a_{n-1}$  или  $a_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , по всей действительной оси и фиксированных значениях остальных коэффициентов будет не более  $N_1 = 2(2^{n-1} - 1)$

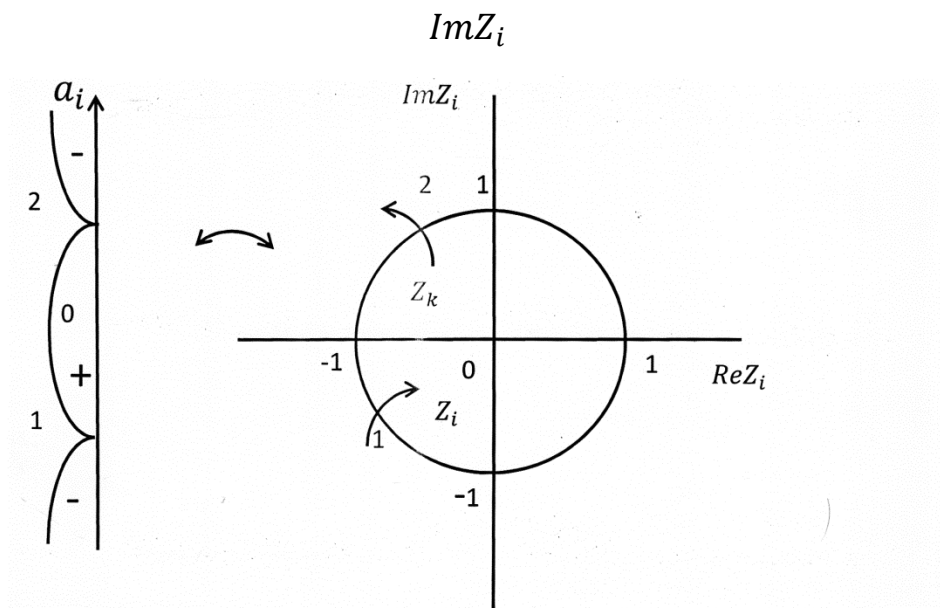


Рис. 1. Точки (1, 2) и интервалы перемежаемости  $(-\infty, 1)^-$ ,  $[1, 2]^+$ ,  $[2, +\infty)^-$  для коэффициента  $a_i$

*Следствие.* Интервалов перемежаемости по  $a_i$  или  $a_{n-1}$  коэффициентам будет в общем случае на всей оси не более  $N_1 + 1$ , из них не более  $N_1-1$  внутренних (не включающих  $-\infty, +\infty$ ).

*Замечание.* Интервалов перемежаемости в практических задачах следует ожидать существенно меньше, чем  $N_1 + 1$  или  $N_1-1$ .

**Теорема 3.7.** *Для того, чтобы интервальный полином (3.16) был устойчив (в смысле (3.17)) в общем случае, при изменениях  $a_i, i = \overline{0, n}$ , на всей оси, необходимо и достаточно, чтобы было устойчиво множество, состоящее из*

$$N_2 = 2^{n+1} (2^{n-1} - 1)^2 (2^{n-2} - 1)^2 \dots (2^{n-m} - 1)^2 (2^{n-m-1} - 1)^2 \quad (3.20)$$

*интервальных полиномов, где  $n=2m$  или  $n=2m+1$ .*

Поскольку в теореме 3.7 предполагается, что  $a_i, i = \overline{0, n}$  изменяются по всей действительной оси, то очевидно при конкретных заданных интервалах для  $a_i$  оценка (3.20) будет существенно сужаться. Учитывая выводы при доказательстве теоремы 3.7, можно сформулировать вероятностное утверждение, которое приведем за следующими определением и обозначениями.

**Определение.** Если интервал принадлежности коэффициента  $a_i, i = \overline{0, n}$  содержит число нуль, то интервал  $[\underline{a}_i, \bar{a}_i]$  делим на две части, а интервалы  $[\underline{a}_i, 0]$  и  $[0, \bar{a}_i]$  будем называть левым и правым интервалами коэффициента  $a_i$  и обозначать соот-

ветственно  $a_i^-$ ,  $a_i^+$ . Каждый из интервалов  $a_i^-$  и  $a_i^+$  будем делить ровно на три части и обозначим точки деления соответственно  $a_{i1}^-$ ,  $a_{i2}^-$  и  $a_{i1}^+$ ,  $a_{i2}^+$ .

Тогда левый интервал  $[\underline{a}_i, 0]$  разбивается на интервалы

$$[\underline{a}_i, a_{i1}^-], [a_{i1}^-, a_{i2}^-], [a_{i2}^-, 0],$$

а правый на

$$[0, a_{i1}^+], [a_{i1}^+, a_{i2}^+], [a_{i2}^+, \bar{a}_i].$$

Образуем интервальные полиномы Харитонова в следующем виде

$$\begin{aligned} [f_1(z)] &= a_0^- z^n + a_1^- z^{n-1} + a_2^+ z^{n-2} + a_3^+ z^{n-3} + \dots, \\ [f_2(z)] &= a_0^- z^n + a_1^+ z^{n-1} + a_2^+ z^{n-2} + a_3^- z^{n-3} + \dots, \\ [f_3(z)] &= a_0^+ z^n + a_1^- z^{n-1} + a_2^- z^{n-2} + a_3^+ z^{n-3} + \dots, \\ [f_4(z)] &= a_0^+ z^n + a_1^+ z^{n-1} + a_2^- z^{n-2} + a_3^- z^{n-3} + \dots, \end{aligned} \quad (3.21)$$

Для каждого из полиномов (3.21) будем строить по 16 полиномов в следующем порядке, например для  $[f_1(z)]$ :

$$\begin{aligned} f_{11}(z) &= \underline{a}_0^- z^n + \underline{a}_1^- z^{n-1} + \underline{a}_2^+ z^{n-2} + \underline{a}_3^+ z^{n-3} + \\ &+ a_{41}^- z^{n-4} + a_{51}^- z^{n-5} + a_{61}^+ z^{n-6} + a_{71}^+ z^{n-7} + \\ &+ a_{82}^- z^{n-8} + a_{92}^- z^{n-9} + a_{102}^+ z^{n-10} + a_{112}^+ z^{n-11} + \\ &+ \bar{a}_{12}^- z^{n-12} + \bar{a}_{13}^- z^{n-13} + \bar{a}_{14}^+ z^{n-14} + \bar{a}_{15}^+ z^{n-15} + \dots, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} f_{12}(z) &= \underline{a}_0^- z^n + \underline{a}_1^- z^{n-1} + \underline{a}_2^+ z^{n-2} + \underline{a}_3^+ z^{n-3} + \\ &+ a_{42}^- z^{n-4} + a_{52}^- z^{n-5} + a_{62}^+ z^{n-6} + a_{72}^+ z^{n-7} + \\ &+ a_{81}^- z^{n-8} + a_{91}^- z^{n-9} + a_{101}^+ z^{n-10} + a_{111}^+ z^{n-11} + \end{aligned}$$

$$+\bar{a}_{12}^-z^{n-12}+\bar{a}_{13}^-z^{n-13}+\bar{a}_{14}^+z^{n-14}+\bar{a}_{15}^+z^{n-15}+...,$$

.....

$$\begin{aligned} f_{116}(z)= & a_0^-z^n + a_1^-z^{n-1} + a_2^+z^{n-2} + a_3^+z^{n-3} + \\ & + \underline{a}_4^-z^{n-4} + \underline{a}_5^-z^{n-5} + \underline{a}_6^+z^{n-6} + \underline{a}_7^+z^{n-7} + \\ & + a_{82}^-z^{n-8} + a_{92}^-z^{n-9} + a_{102}^+z^{n-10} + a_{112}^+z^{n-11} + \\ & + \bar{a}_{121}^-z^{n-12} + \bar{a}_{131}^-z^{n-13} + \bar{a}_{141}^+z^{n-14} + \bar{a}_{151}^+z^{n-15} + .... \end{aligned}$$

Отметим, что в общем случае получим 48 различных полиномов (остальные из 64 по (3.22) совпадают). При этом в (3.22)  $\bar{a}_i^- = \underline{a}_i^+ = 0$ .

**Утверждение 3.1.** *Для того, чтобы установить устойчивость интервального полинома (3.16) при заданных интервалах коэффициентов  $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ ,  $i = \overline{0, n}$ , с большей вероятностью для практики достаточно ограничиться 48 различными полиномами вида (3.22).*

*Замечание 1.* В качестве области корней может служить любая односвязная область  $D$ , если соответственно видоизменить (3.17).

*Замечание 2.* Утверждение 3.1 проще теоремы Мансура-Крауса [10, 70] и сводит задачу к рассмотрению меньшего числа полиномов при больших порядках  $n$ . При небольших порядках  $n \leq 6$  возможны существенные уменьшения количества полиномов.

Аналоги слабой и сильной теорем Харитоновой для дискретного случая формулируются соответственно в виде теорем 3.9 и 3.10, полученных на основе теоремы 3.8.

**Теорема 3.8.** При изменениях любого из действительных коэффициентов  $a_i$ ,  $i = \overline{0, n}$  полинома (3.16), действительные корни претерпевают строго монотонные изменения, а смена монотонности действительной части комплексно-сопряженных корней возможна только при их переходе в действительную область.

**Теорема 3.9.** Для того чтобы интервальный полином (3.16) был строго устойчив в дискретной области, необходимо и достаточно, чтобы для каждого коэффициента  $a_i$  все точки перемежаемости, полученные по всем  $2^n$  угловым полиномам, не лежали в заданных интервалах  $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ .

**Теорема 3.10.** Для того чтобы интервальный полином (3.16) был строго устойчив в дискретной области, необходимо и достаточно, чтобы для каждого коэффициента  $a_i$  все точки перемежаемости, полученные по соответствующим четырем полиномам Харитоновой, не лежали в заданных интервалах  $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ .

Относительно матриц и многогранников матриц в дискретном случае справедливы теоремы.

**Теорема 3.11.** *Для того, чтобы интервальная матрица  $A_d$  была устойчива с областью собственных значений*

$$|z_i| < 1 \text{ (или } z_i \in D), i = \overline{1, n},$$

*необходимо и достаточно, чтобы были устойчивы с той же областью множество 48 полиномов (3.22), полученных из множества всех характеристических полиномов  $\{f(z)\}$ , каждый полином которой есть полином с отдельными угловыми коэффициентами найденными согласно теореме 3.1.*

**Теорема 3.12.** *Для того, чтобы многогранник матриц  $P_d$  был устойчив с областью собственных значений  $|z_i| < 1, i = \overline{1, n}$ , необходимо и достаточно, чтобы был устойчив с той же областью все выпуклые ребра  $P_d$*

$$s_1 P_i + s_2 P_j,$$

*при любых  $i, j = \overline{1, n}, s_1 \in [-1, 0], s_2 \in [0, 1]$ .*

Доказательства теорем, сформулированных в этом параграфе приведены в Приложении.

Справедливость утверждения 3.1 покажем на известных контрпримерах [10, 60, 61].

*Пример 1.* Для контрпримера [10, 60].

$$f(z) = z^4 + a_1 z^3 + (3/2)z^2 - (1/3),$$

где  $a_1 \in [-17/8, 17/8]$ , справедливость утверждения очевидна (согласно [10], поскольку при  $a_1 = 0$ , полином  $f(z)$  неустойчив.

*Пример 2.* Контрпример 1 из [61].

Рассматривается полином четвертого порядка

$$f(z)=z^4+a_1z^3+(109/288)z^2+0.5z-0.5, \quad (3.23)$$

где  $a_1 \in [-1, 0]$ .

Согласно [61] по полиномам Харитонова

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z^4 - z^3 + (109/288)z^2 + 0.5z - 0.5, \\ f_2(z) &= z^4 + (109/288)z^2 + 0.5z - 0.5, \end{aligned} \quad (3.24)$$

мы получим, что интервальный полином (3.23) устойчив (если предполагать справедливость теоремы Харитонова для дискретного случая), т.к.  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  устойчивы. Но в [61] показывается, что при  $a_1 = -1/8$  и  $a_1 = -3/8$  полином (3.23) неустойчив (на границе устойчивости), т.к. имеет корни  $|z_i| = 1$ .

Теперь рассмотрим данный пример, пользуясь результатами данной работы. Имеем для  $a_1$  интервалы

$$[\underline{a}_1, \bar{a}_{11}], [\underline{a}_{11}, \bar{a}_{12}], [\underline{a}_{12}, \bar{a}_1],$$

где  $\bar{a}_1 = -1$ ,  $\bar{a}_{11} = -2/3$ ,  $\bar{a}_{12} = -1/3$ ,  $\bar{a}_1 = 0$ .

Согласно теореме 3.11 полиномам (3.24) добавляются следующие два полинома

$$\begin{aligned} f_3(z) &= z^4 - (2/3)z^3 + (109/288)z^2 + 0.5z - 0.5, \\ f_4(z) &= z^4 - (1/3)z^3 + (109/288)z^2 + 0.5z - 0.5, \end{aligned}$$

из которых  $f_3(z)$  устойчив, а  $f_4(z)$  неустойчив. Действительно, корни

$$\begin{aligned} f_3(z): \{z_1=0.6655, z_2=-0.7715, z_{3,4}=0.3864 \pm j0.9081\}, \quad |z_1| < 1, \\ f_4(z): \{z_1=0.8265, z_2=0.6042, z_{3,4}=0.2778 \pm j0.9613\}, \quad |z_{3,4}| > 1. \end{aligned}$$

Следовательно, контрпример 1 не противоречит утверждению 3.1.

*Пример 3.* Контрпример 2 из [61].

Рассматривается полином

$$f(z)=z^3+a_1z^2+a_2z+a_3, \quad (3.25)$$

где  $a_1 \in [-1/2, 1/4]$ ,  $a_2 \in [-1/2, 1/2]$ ,  $a_3 \in [-1/2, 1/4]$ .

В [61] показывается, что каждый из четырех полиномов Харитонова

$$f_1(z)=z^3+(1/4)z^2-(1/2)z-1/2,$$

$$f_2(z)=z^3+(1/4)z^2+(1/2)z-1/2,$$

$$f_3(z)=z^3-(1/2)z^2-(1/2)z+1/4,$$

$$f_4(z)=z^3-(1/2)z^2+(1/2)z+1/4,$$

имеет корни внутри единичного круга, но при  $a = [a_1, a_2, a_3] = [-1/2, -1/2, -1/2]$  имеет корни, которые не лежат внутри единичного круга.

Образуя полиномы (3.22) можно убедиться, что полином (3.25) неустойчив. Например, полином

$$f_{11}(z) = z^3 + \underline{a}_1^- z^2 + \underline{a}_2^- z + \underline{a}_3^- = z^3 - (1/2)z^2 - (1/2)z + 0,$$

имеет корни  $z_1 = -0.5$ ,  $z_2 = 0$ ,  $z_3 = 1$ , т.е. является неустойчивым.

Итак, и данный пример также не противоречит утверждению 3.1.

В заключение данного параграфа, сформулируем следующий алгоритм определения робастной устойчивости линейных дискретных интервальных динамических систем.

1. Пользуясь формулами леммы к теореме 3.1 [21], оптимизацией по элементам  $a_{ij}$ :  $\underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , интервальной матрицы  $A$ , находятся сепаратные угловые коэффициенты  $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ ,  $i = \overline{0, n}$ , интервального характеристического полинома (3.16).

2. Определяются четыре полинома Харитонова, соответствующие интервальному полиному (3.16):

$$f_1(z) : \{\underline{a}_0, \underline{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \underline{a}_4, \dots\};$$

$$f_2(z) : \{\underline{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \dots\};$$

$$f_3(z) : \{\bar{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4, \dots\};$$

$$f_4(z) : \{\bar{a}_0, \bar{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \bar{a}_4, \dots\}.$$

3. Составляются  $n$  неравенств вида (П.15), указанные в Приложении.

4. Относительно каждого коэффициента  $a_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , считая остальные коэффициенты фиксированными, последовательно находятся точки перемежаемости для всех четырех полиномов Харитонова и по всем  $n$  неравенствам (см. п.3), начиная с меньших порядков.

5. Если все точки перемежаемости по всем коэффициентам  $a_i, i = \overline{0, n}$ , не принадлежат заданным интервалам, то исходный полином (система) устойчив, в противном случае – неустойчив.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Алгебраический метод Харитоновского направления исследований робастной устойчивости интервальных динамических систем, рассмотренный в главе III данной работы, является дальнейшим развитием основных результатов работ [21, 22], позволяющим решать проблему робастной устойчивости при общем виде интервальной матрицы системы. При этом метод направлен для решения задач робастной устойчивости как для линейных непрерывных интервальных динамических систем, так и для линейных дискретных интервальных динамических систем.

Следует отметить, что *Замечание* к теореме 3.1 существенным образом уточняет результаты работы [21], а именно подчеркивает необходимость полного набора из четырех угловых полиномов Харитонова (с учетом кратности полиномов) для определения робастной устойчивости интервальных динамических систем. Также, условия необходимости и достаточности по теореме 3.1 соответствуют угловым сепаратным коэффициентам, определяемым последовательно от 1-го до  $n$ -го коэффициента характеристического полинома системы, которые могут быть найдены с использованием методов нелинейного программирования [48].

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство леммы.* Определим аналитические выражения для коэффициентов интервального характеристического полинома через элемента интервальной матрицы  $A$ . Вычисляя определитель  $\det[\lambda I_n - A]$  находим

$$\begin{aligned}
 a_1 &= - \sum_{i=1}^n a_{ii}, \\
 a_2 &= \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jj} - \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ji}, \\
 a_3 &= \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jk} a_{kj} - \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{jk} a_{ki} - \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jj} a_{kk}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_{n=2m} &= \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jk} a_{ks} \dots a_{ij} - \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jj} a_{ks} a_{sk} \dots a_{pq} a_{qp} + \\
 &+ \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jj} a_{kk} a_{ss} a_{lm} a_{ml} \dots a_{pq} a_{qp} - \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jj} \dots a_{ss} a_{pq} a_{qp} + \\
 &+ \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jj} \dots a_{kk} + \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ji} a_{ks} a_{sk} \dots a_{pq} a_{qp} - \\
 &- \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{jk} a_{ks} \dots a_{pq} a_{qi}, \\
 \\
 a_{2m+1} &= \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jk} a_{ks} \dots a_{ij} - \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jk} a_{kj} a_{sk} \dots a_{pq} a_{qp} - \\
 &- \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jj} a_{ks} a_{sl} \dots a_{pq} a_{qk} + \sum_{i=1}^n a_{ii} a_{jj} a_{kk} a_{sl} a_{ls} \dots a_{pq} a_{qp} - \\
 &- \dots - \prod_i^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ji} a_{ks} a_{sl} \dots a_{pq} a_{qk} - \\
 &- \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{jk} a_{ks} \dots a_{pq} a_{qi},
 \end{aligned}
 \tag{П.1}$$

где все индексы  $i, j, k, \dots$  принимают только различные значения, а во всех суммах по  $n$  сомножителей.

Из (П.1) видно, что произвольно взятый коэффициент  $a_\rho(\rho = \overline{1, n})$  полинома (3.5) представима линейной зависимостью

от любого из  $a_{ij}$  ( $i, j=1, \dots, n$ ) при фиксированных значениях всех остальных элементов  $a_{ij}$ , т.е.

$$a_{\rho} = ca_{ij} + d, \quad (\text{П.2})$$

где  $c, d$  -некоторые действительные постоянные. При всевозможных значениях элементов, коэффициенты  $c$  и  $d$  есть интервальные величины.

Допустим, при некоторых  $c$  и  $d$  достигнуты угловые (экстремальные) значения  $a_{\rho}$  равные  $\underline{a}_{\rho}$  и  $\bar{a}_{\rho}$

$$\underline{a}_{\rho} = c_1 a_{ij} + d_1, \quad \bar{a}_{\rho} = c_2 a_{ij} + d_2 \quad (\text{П.3})$$

где  $c_1, c_2 \neq 0$ .

Тогда, в силу линейности зависимостей (П.3) очевидно, что  $\underline{a}_{\rho}$  и  $\bar{a}_{\rho}$  достижимы только при угловых значениях  $a_{ij}$  (см. Рис. П.1).

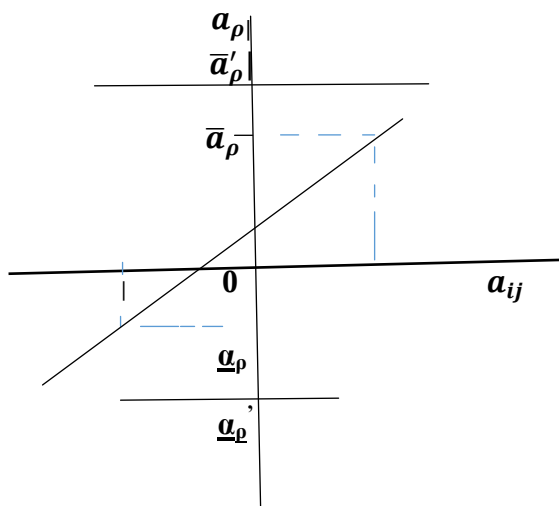


Рис. П.1

Если же  $c_1$  или  $c_2$  равны нулю, что возможно при равенстве нулю одного из остальных элементов, то  $\underline{a}_\rho$  и (или)  $\bar{a}_\rho$  не зависят, от  $a_{ij}$ , что эквивалентно достижимости угловых значений  $\underline{a}_\rho, \bar{a}_\rho$  при нулевом  $a_{ij}$ . Лемма доказана.

### *Доказательство теоремы 3.1.*

Пусть для устойчивой системы (3.4). каким-либо оптимизационным методом (дискретного программирования с  $n^2$  элементами с возможными двумя  $(\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij})$  или тремя  $(\underline{a}_{ij}, 0, \bar{a}_{ij})$  значениями для каждого из них) по выражениям (П.1) получены угловые значения *сепаратных* коэффициентов  $a_i (i = \overline{1, n}), a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ .

Обозначим матрицы с соответствующими элементами через  $\underline{A}_i, \bar{A}_i, i = \overline{1, n}$ .

Тогда характеристические полиномы  $\underline{A}_i$  и  $\bar{A}_i$ , соответственно примут вид

$$f_{\bar{A}_i}(\lambda) = \lambda^n + \tilde{a}_1 \lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_i \lambda^{n-1} + \dots + \tilde{a}_n, \quad (\text{П.4})$$

$$f_{\underline{A}_i}(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + \underline{a}_i \lambda^{n-1} + \dots + a_n,$$

где  $a_j, \tilde{a}_j, j = \overline{1, n}, j \neq i$  удовлетворяют неравенствам

$$\underline{a}_j \leq a_j \leq \bar{a}_j, \underline{a}_j \leq \tilde{a}_j \leq \bar{a}_j. \quad (\text{П.5})$$

При этом относительно отношения порядка  $a_j$  и  $\tilde{a}_j$  ограничений нет, т.е. могут быть, как равными, так и большими. (меньшими) друг друга.

Нетрудно видеть, что множество полиномов (П.4), образованное для всех  $i=\overline{1, n}$  составляет семейство всех угловых полиномов Харитонова.

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n, \quad (\text{П.6})$$

где  $a_i \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i]$ ,  $i=\overline{1, n}$ . Следовательно, согласно сильной (второй) теореме Харитонова [45] устойчивость четырех угловых полиномов Харитонова из семейства (П.6) определяют необходимые и достаточные условия устойчивости положения равновесия (особой точки)  $x = 0$  системы (3.4). Теорема доказана.

*Доказательство теоремы 3.2.*

*Необходимость.* Представим множество (3.12) в виде

$$P = \{P_s = P_{s1} + P_{s2}: P_{s1} = \sum_1^m s_{1i} P_i, P_{s2} = \sum_1^m s_{2i} P_i, \quad (\text{П.7})$$

$$s_{1i} + s_{2i} = s_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \sum_1^m s_i = 1\}.$$

Очевидно  $s_{1i}$  и  $s_{2i}$  можно представить как  $s_{1i} \in [-1, 0]$ ,  $s_{2i} \in [0, 1]$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Но тогда, если многогранник матриц  $P$  устойчив, то устойчивы и  $P_{s1}$ ,  $P_{s2}$  в отдельности

$$P_{s1} = \sum_1^m s_{1i} P_i, P_{s2} = \sum_1^m s_{2i} P_i, \quad (\text{П.8})$$

при  $s_{1i} \in [-1, 0]$ ,  $s_{2i} \in [0, 1]$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Следовательно, устойчивы и любая пара  $s_{1i} P_i$ ,  $s_{2i} P_j$  в отдельности и в сумме

$$s_{1i}P_i + s_{2i}P_j, \text{ где } s_{1i} \in [-1, 0], s_{2j} \in [0, 1], i, j = \overline{1, m}. \quad (\text{П.9})$$

*Достаточность.* Пусть все выпуклые ребра (которые соответствуют выпуклой оболочке множества матриц  $P$

$$s_{1i}P_i + s_{2i}P_j, \quad (\text{П.10})$$

при  $s_{1i} \in [-1, 0], s_{2j} \in [0, 1], i, j = \overline{1, m}$  устойчивы.

Тогда, поскольку  $s_{1i}$  и  $s_{2j}$  независимы и  $i, j$  принимают любые значения от 1 до  $m$ , то будут устойчивы и отражения (3.10), т.е.

$$s_{2i}P_i + s_{1j}P_j, \quad (\text{П.11})$$

где  $s_{2i} \in [0, 1], s_{1j} \in [-1, 0], i, j = \overline{1, m}$ .

Следовательно, суммируя (3.19) и (3.20) по всем  $i, j = \overline{1, m}$  будем иметь, что

$$P_{s1} + P_{s2} = \sum_1^m s_{1i}P_i + \sum_1^m s_{2i}P_i \quad (\text{П.12})$$

будет устойчива. Теорема 3.2 доказана.

Заметим, что в формулировке теоремы 3.2 в силу независимости  $s_1$  и  $s_2$  дополнительные индексы  $i, j$  опущены.

*Доказательство теоремы 3.6.* Запишем полином (3.16) в развернутом виде

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n, \quad (\text{П.13})$$

где  $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i], i = \overline{0, n}$ . Положим  $a_0 = 1$ .

Для определения условий устойчивости (П.13) воспользуемся теоремой Шура [50], которая приводит к проверке условий (3.18) для последовательности  $n$  полиномов (3.19). Определим эту последовательность:

$$\begin{aligned}
 f_1(z) &= (1-a_n^2)z^{n-1} + (a_1 - a_n a_{n-1})z^{n-2} + \dots + (a_{n-1} - a_n a_1), \\
 f_2(z) &= [(1-a_n^2)^2 - (a_{n-1} - a_n a_1)^2]z^{n-2} + [(1-a_n^2)(a_1 - a_n a_{n-1}) - \\
 &\quad - (a_{n-1} - a_n a_1)(a_{n-2} - a_n a_2)]z^{n-3} + \dots + \\
 &\quad + [(1-a_n^2)(a_{n-2} - a_n a_2) - (a_{n-1} - a_n a_1)(a_1 - a_n a_{n-1})], \\
 &\dots\dots\dots \\
 f_i(z) &= [a_{0,i-1}^2 - a_{n,i-1}^2]z^{n-i} + \dots + [a_{0,i-1}a_{n-1,i-1} - a_{n,i-1}a_{1,i-1}],
 \end{aligned} \tag{П.14}$$

где  $a_{0,i-1}$ ,  $a_{1,i-1}$ ,  $a_{n-1,i-1}$ ,  $a_{n,i-1}$  — соответственно коэффициенты  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_{n-1}$ ,  $a_n$  при  $z^{n-i+1}$ ,  $z^{n-i}$ ,  $z$  и свободный член предыдущего полинома  $f_{i-1}(z)$ .

Из (П.13), (П.14) получаем систему  $n$  неравенств

$$\begin{aligned}
 1 &> |a_n|, \\
 |1-a_n^2| &> |a_{n-1} - a_n a_1|, \\
 |(1-a_n^2)^2 - (a_{n-1} - a_n a_1)^2| &> |(1-a_n^2) - (a_{n-2} - a_n a_2) - \\
 &\quad - (a_{n-1} - a_n a_1)(a_1 - a_n a_{n-1})|, \\
 &\dots\dots\dots \\
 |a_{0,n-1}^2 - a_{n,n-1}^2| &> |a_{0,n-1}a_{n-1,n-1} - a_{n,n-1}a_{1,n-1}|.
 \end{aligned} \tag{П.15}$$

Из (П.14) и (П.15) нетрудно видеть, что наивысшая степень многочлена от  $a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , при фиксированных значениях

остальных коэффициентов в (П.15), будет равна  $2^{n-i-1}$ . В следующем  $n-1$ -ом неравенстве (П.15) степень  $a_i$  будет  $2^{n-i-2}$  и т.д. до первой степени. В итоге, если предположить наихудший случай, когда все корни, удовлетворяющие равенствам вида

$$F_j(a_i)=0, j = \overline{0, n}, \quad (\text{П.16})$$

полученным из неравенств (П.15) (где  $F_j$  некоторые полиномиальные функции, приведенных левых частей (П.15)), действительны и различны, то всего для  $i$ -го коэффициента  $a_i$  будет

$$N_2=2(2^{n-1}-1), i = \overline{0, [n/2]}, ([n/2] - \text{целая часть } n/2) \quad (\text{П.17})$$

точек перемежаемости на действительной оси (сомножитель 2 перед скобкой в (П.17) обусловлен тем, что неравенства (П.15) в абсолютных величинах).

Как видно из (П.14), количества точек  $N_1$  для  $a_i$  и  $a_{n-i}$  совпадают. Отметим, что при конкретно заданных ограниченных интервалах для коэффициентов  $a_i, i = \overline{0, n}$  величина  $N_1$  будет существенно меньшей, но их количество зависит от соотношений коэффициентов и точная оценка трудно определима.

*Доказательство теоремы 3.7.* Очевидность доказательства вытекает из выводов леммы.

Действительно, если составить пары  $a_i, a_{n-i}, i = \overline{0, n}$ , то в случае  $n=2m$  будем иметь максимальное количество полиномов (или интервалов перемежаемости)

$$N_2 = 2^{n+1} [(2^{n-1} - 1)^2 (2^{n-2} - 1)^2 \dots (2^{n-m} - 1)^2 (2^{n-m-1} - 1)^2]. \quad (\text{П.18})$$

Если же  $n=2m+1$  (нечетно), то максимальное число полиномов равно

$$N_2 = 2^{n+1} [(2^{n-1} - 1)^2 (2^{n-2} - 1)^2 \dots (2^{n-m-1} - 1)^2] \quad (\text{П.19})$$

Следовательно, в общем случае, необходимо и достаточно проверка всех полиномов в количестве  $N_2$ , определяемой по (П.18), (П.19). Теорема доказана.

Заметим, что чем больше порядок полинома  $n$  и больше число интервальных коэффициентов, тем мельче становятся интервалы перемежаемости, удовлетворяющие системе (П.15).

*Доказательство теоремы 3.8* проведем от противного.

Пусть теорема неверна, т.е. при изменении некоторого коэффициента  $a_k$  монотонность изменения рассматриваемого действительного корня  $z_m$  или действительной части  $\alpha_m$  комплексно-сопряженных корней  $\alpha_m \pm j\beta_m$  полинома (3.16) нарушается. Для определенности положим изменения  $a_k$  в возрастающем порядке.

Допустим значение  $z_m$  или  $\alpha_m$ , при котором нарушается монотонность, равно  $\alpha_{m0}$ , а соответствующее значение  $a_k$  равно  $a_{k0}$ .

Тогда, вводя новую переменную  $\underline{z} = z - (\alpha_{m0} - \varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 0$  – малая величина, из (3.16) получим новый полином

$$f(\underline{z}) = \sum a_i \underline{z}^{n-1}. \quad (\text{П.20})$$

Пусть (П.20) имеет корни  $\underline{z}_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , а рассматриваемое значение

$$\underline{z}_m = \underline{\alpha}_m = 0.$$

Тогда, при дальнейшем возрастании  $a_k$  значение  $\underline{z}_m$  или  $\underline{\alpha}_m$  в точке  $a_{k0}$  достигнет  $\alpha_{m0}$ , а при некотором значении  $a_k = a_{ki} > a_{k0}$  вследствие смены монотонности полином (П.20) снова будет иметь  $\underline{z}_{mi} = \underline{\alpha}_{mi} = 0$ , т.е. получим, что на оси  $a_k \in R$  происходит вторая смена устойчивости (П.20), что по известным теоремам Харитонов [45] невозможно. Но в случае комплексно-сопряженных корней указанное противоречие с теоремами Харитонов не имеет места, если смена монотонности одного из таких корней происходит при переходе в действительную область, поскольку другой действительный корень сохраняет свою монотонность относительно действительной части этих корней. Таким образом, теорема 3.8 справедлива.

*Доказательства теорем 3.9 и 3.10.* Необходимость очевидна. Достаточность вытекает из теоремы 3.8.

Действительно, пусть имеем некоторое уравнение порядка  $l = \overline{1, n}$ , для определения точек перемежаемости коэффициента  $a_i$ :

$$[a_{0,l-i}^2 - a_{n,l-i}^2] = \pm [a_{0,l-i} a_{i-1,l-i} - a_{n,l-i} a_{i,l-i}],$$

или, далее

$$F_i^+(a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = 0, \quad F_i^-(a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = 0, \quad (\text{П.21})$$

Согласно теореме 3.8, действительные решения (П.21) относительно  $a_i$  имеют монотонные изменения при вариациях любого из остальных коэффициентов, но тогда к ним применимы слабая и сильная теоремы Харитонова.

Следовательно, непринадлежность точек перемежаемости коэффициента  $a_i$ , которые найдены по полиномам Харитонова, заданным интервалам  $[\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ , гарантирует устойчивость интервального полинома (3.16). Теоремы 3.9 и 3.10 доказаны.

*Доказательства теорем 3.11 и 3.12 нетрудно провести, пользуясь результатами [21].*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акунов Т.А., Ушаков А.В.* Синтез систем гарантированной модальной стабильности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 4. – С. 9–16.
2. *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы // Докл. АН СССР, 1937. Т.14. № 5. – С. 247–250.
3. *Аносов Д.В.* Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сб. обзорных статей. 2. К 50-летию института (Труды МИАН СССР. Т.169). – М.: Наука. 1985. – С. 59–93.
4. *Арнольд В.И.* Теория катастроф // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНТИ, 1986. Т.5. – С. 219–277. (Итоги науки и техники).
5. *Бесекерский В.А., Небылов А.В.* Робастные системы управления. – М.: Наука, 1983. – 240 с.
6. *Воронов К.В., Королева О.И., Никифоров В.О.* Робастное управление нелинейными объектами с функциональными неопределенностями // Автоматика и телемеханика. 2001. № 2. – С. 112–121.
7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
8. *Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г. и др.* Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I. Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991 № 1. – С. 3–23.

9. *Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г. и др.* Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). II. Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. 1991. № 2. – С. 3–30.
10. *Джури Э.И.* Робастность дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 5. – С.4–28.
11. Дискуссия по проблеме робастности в системах управления // Автоматика и телемеханика. 1992. № 1. – С. 165–176.
12. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. – Киев: Наук. думка, 2006. – 264 с.
13. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат. 1950. – 472 с.
14. *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем. – Л.: ЛКВВИА, 1949.
15. *Неймарк Ю.И.* Робастная устойчивость и D-разбиение // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7 – С. 10-18.
16. *Несенчук А.А., Федорович С.М.* Метод параметрического синтеза интервальных систем на основе корневых годографов полиномов Харитонова // Автоматика и телемеханика, № 7. 2008. – С. 37–46.
17. *Никифоров В.О.* Робастное управление линейным объектом по выходу // Автоматика и телемеханика. 1998. № 9. – С. 87–99.

18. *Оморов Р.О.* Разработка и исследование фотоэлектрических следящих систем малой параметрической чувствительности // Автореферат диссертации канд. техн. наук / – Л.: ЛИТМО, 1985. – 21 с.
19. *Оморов Р.О.* Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1991. № 8. – С. 36–45.
20. *Оморов Р.О.* Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления // Автореферат диссертации доктора технических наук / – Л.: ЛИТМО, 1993. – 38 с.
21. *Оморов Р.О.* Робастность интервальных динамических систем. I. Робастность непрерывных линейных интервальных динамических систем // Теория и системы управления. 1995. № 1. – С. 22–27.
22. *Оморов Р.О.* Робастность интервальных динамических систем. II. Робастность дискретных линейных интервальных динамических систем // Теория и системы управления. 1995. №3. – С. 3–7.
23. *Оморов Р.О.* О дискретном аналоге теоремы Харитонова // Наука и новые технологии, 2002, № 3. С. 5–10.
24. *Оморов Р.О.* Робастная грубость интервальных динамических систем: Алгебраический метод // Доклады НАН КР. 2014. №2. – С. 7–11.

25. *Пелевин А.Е.* Синтез робастного закона управления при неопределенностях параметров модели объекта // Гироскопия и навигация. 1999. № 2 (25). – С. 63–74.
26. *Пелевин А.Е.* Робастная стабилизация линейного объекта при неопределенных параметрах модели // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 1. – С. 40–46.
27. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 9. – С. 45–54.
28. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастная устойчивость при комплексных возмущениях параметров // Автоматика и телемеханика. 1991. №8. – С. 45–55.
29. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. Т. 32. М.: ВИНТИ. 1991. – Т.32. – С. 3–31.
30. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастный критерий Найквиста // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. – С. 25-31.
31. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 384 с.
32. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // Автоматика и телемеханика, 2002, № 8. – С. 37–53.
33. *Пуанкаре А.* Избранные труды. В 3-х т. / Пер. с франц. Под ред. Н.Н. Боголюбова. Т.1., 1971. – 771 с. Т.2. 1972. – 999 с. Т.3. 1974. – 771 с.

34. *Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М.* Чувствительность систем управления. – М.: Наука, 1981. – 464 с.
35. *Смейл С.* Грубые системы не плотны / Сб. пер. Математика, 1967. Т.11. № 4. – С.107–112.
36. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч.I. Теория линейных систем автоматического управления / Н.А. Бабаков, А.А. Воронов, А.А. Воронова и др.; Под ред. А.А. Воронова. -2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 367 с., ил.
37. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
38. *Томович Р., Вукобратович М.* Общая теория чувствительности. – М.: Сов. радио, 1972. – 240 с.
39. *Удерман Э.Г.* Метод корневого годографа в теории автоматических систем. – М.: Наука, 1972. – 448 с.
40. *Ушаков А.В., Оморев Р.О.* Оценка потенциальной параметрической чувствительности желаемой динамической модели в задаче модального управления // Изв. вузов. Электромеханика, 1982. № 7. – С. 300–305.
41. *Ушаков А.В., Оморев Р.О.* Оценка параметрической чувствительности линейных объектов управления по степени их управляемости и наблюдаемости // Изв. вузов. Электромеханика, 1984, № 6. – С. 53–58.
42. *Ушаков А.В., Оморев Р.О.* Синтез регуляторов модально-робастных систем автоматического управления // Структуры

- сложных систем и алгоритмы управления / Под ред. Ю.А. Борцова, В.Б. Яковлева (Вопросы теории систем автоматического управления, Вып.8). – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1990. – С. 92–103.
43. *Ушаков А.В., Оморев Р.О.* Оценки модальной робастности и синтез семейств линейных многомерных стохастических систем управления / – В кн.: Международная конференция по интервальным и стохастическим методам в науке и технике. Сб.трудов (Москва, сентябрь 1992). – М.: 1992. Т.1. – С. 180–183.
44. *Хакен Г.* Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 423 с.
45. *Харитонов В.Л.* Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений //Дифференц. уравнения. 1978. Т.14. № 11. – С. 2086–2088.
46. *Харитонов В.Л.* Об одном обобщении критерия устойчивости // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1978. № 1. – С. 53–55.
47. *Харитонов В.Л.* К проблеме Рауса – Гурвица для семейства полиномов // Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением. – Новосибирск: Наука, 1979. – С. 105–111.
48. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование / Пер.с англ. – М.: Мир. 1975. – 534 с.

49. *Хьюбер П.* Робастность в статистике / Пер. с англ. Под ред. Н.Г. Журбенко. – М.: Мир, 1984. – 304 с.
50. *Цыпкин Я.З.* Теория импульсных систем. – М.: Физматгиз, 1958. – 724 с.
51. *Шашихин В.Н.* Методы интервального анализа в синтезе робастного управления // Вычислительные технологии. 2001. Т.6. № 6. – С. 118–123.
52. *Шашихин В.Н.* Робастная стабилизация линейных интервальных систем. // Прикладная математика и механика. Т.66. Вып. 3, 2002. – С. 402–409.
53. *Юсупбеков Н.Р., Цацкин М.Л.* Робастность многосвязных систем управления. – М.: Наука, 1990. – 149 с.
54. *Ackermann J.D.* Sampled-data control systems. Analysis and Synthesis, robust system design ( Lecture notes in control and information sciences). Springer-verlag Berlin, Heidelberg. 1985.
55. *Barmish B.R., Hollot C.V.* Counter-example to a recent result on the stability by S. Bialas // Int. J. Control. 1984. V.39. № 5. – P. 1103–1104.
56. *Barmish B.R., Fu M., Saleh S.*// Stability of a polytope of matrices:. Counterexamples // IEEE Trans. Automatic. Control. 1988.V.AC-33. № 6. – P. 569–572.
57. *Bartlett A.C., Hollot C.V.* Lin H. Root location of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges // Math. Contr., Signals, Syst. 1987. V. 1. № 1. – P. 61–71.

58. *Bhattacharyya S.P.* Robust stabilization against structural Perturbation (Lecture notes in control and information sciences). Springer-verlag Berlin, Heidelberg. 1987. – 172 p.
59. *Bialas S.* A necessary and sufficient condition for stability of internal matrices // *Int. J. Control* 1983. V.37. № 4. – P. 717–722.
60. *Bose N.K., Zeheb E.* Kharitonov's theorem and stability test of multidimensional digital filters // *IEEE Proc. Pt. G.* 1986. V. 133. № 4. – P. 187–190.
61. *Cieslik J.* On possibilities of the extension for Kharitonov's stability test for interval polynomials to the discrete case // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1987. V. AC-32. № 3. – P. 237–238.
62. *Dorato P.A.* Historical review of robust control // *IEEE Contr. Syst. Magazine.* V.7. № 2. – P. 44–47.
63. *Faedo S.* Un nuova problema di stabilita per le equazioni algebriche a coefficienti reali // *Ann. Sc. Norm. Sup. Piza, Sci. Fiz. Mat.* 1953. V. 7. № 1–2. – P. 53–63.
64. *Fan K.* On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations II. / *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1950. V.36. P.31–35.
65. *Glad S.T.* Robust of nonlinear feedback systems on state // *Automatica.* V.23. № 4. 1987. – P. 425–435.
66. *Karl W.C., Greshak J.P., Verghese G.C.* Comments of the necessary and sufficient condition for the stability of interval matrices // *Int. J. Control.* 1984. V. 39. № 4. – P. 849.

67. *Khorosani K.* Robust stabilization of a non-linear systems with unmodelled dynamics // *Int.J.Control.* 1989. V.50. №3. – P. 827–844.
68. *Kraus F.J., Anderson B.D.O., Jury E.I., Mansour M.* On the robustness of low order Shur polynomials // *IEEE Trans. Circ. Systems.* 1988. – V. CAS-35, № 5. – P. 570–577.
69. *Kraus F.J., Anderson B.D.O., Mansour M.* Robust Shur polynomial stability and Kharitonov's theorem // *Int. J. Control.* 1988. V. 47. № 5. – P. 1213–1225.
70. *Mansour M., Kraus F.J.* On robust stability of Shur polynomials // Report N 87-05, Inst. Autom. Cont. Ind. Electronics, Swiss, Fed. Inst. Tech. (ETH). Zurich, 1987.
71. *Omorov R.O.* Robustness of Interval Dynamic Systems. I. Robustness in Continuous Linear Interval Dynamic Systems // *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 1996. T. 34. №3. – P. 69–74.
72. *Omorov R.O.* Robustness of Interval Dynamic Systems. II. Robustness of Discrete Linear Interval Dynamical Systems // *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 1996. T. 34. №4. – P. 1–5.
73. *Omorov R.* Algebraic Method of the Robust Stability of Interval Dynamic Systems // *Journal of Mathematics and Statistical Science / SSPub.* Vol 3, Issue 5, May 2017. – PP. 139 – 148.
74. *Rohn J.* Regularity of Interval Matrices and Theorems of Alternatives // *Reliable Computing* (2006) 12. – P. 99–105.

75. *Romanishin I.M., Sinitskii L.A.* HD – SYSTEMS // J. of Automat. and Inform. Sciences. 1998. V. 30. № 1. – P. 82–95.
76. *Soh C.B., Berger C.S., Dabke K.P.* On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients // IEEE Trans. Automat. Control. 1985. V. AC-30. № 10. – P. 1033–1036.
77. *Soh C.B.* Parameter space approach to control problems, Ph.D. Dissertation. Ch.5. Dept. Elect. Engineering. Monash Univ., Clayton, Victoria, Australia, 1986.
78. *Tan N., Atherton D.P.* Describing Function Analysis of Nonlinear Discrete Interval Systems / In coll.: European Control Conference, ECC 1999 – Conference Proceedings 1999. – P. 2835–2840.



**Р.О. ОМОРОВ**

**РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ  
ИНТЕРВАЛЬНЫХ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Редактор *Р.Дунганаева*  
Верстка и дизайн *А. Абдыкалыкова*

Сдано в печать 24.12.2018 г.  
Формат бумаги 60x84/16.  
Объем 6,5 п.л. Тираж 100.

Информационно-издательский центр «Илим» НАН КР,  
720071, г. Бишкек, пр. Чуй, 265а

