

АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ НА БАЗЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПОЛИНОМА НЬЮТОНА

КОШОЕВА Б.Б.

Московский энергетический институт (технический университет)

bibigul200472@mail.ru

ALGORITHMS OF NUMERICAL DIFFERENTIATION OF REAL TIME ON THE BASIS OF INTERPOLATION POLYNOMIALS NEWTON

KOSHOEVA B.B.

Moscow Power Institute (technical university), Russia, Moscow

bibigul200472@mail.ru

Аннотация

В докладе рассматривается процедура применения алгоритмов численного дифференцирования, основанных на первой производной интерполяционного полинома Ньютона для задач управления в реальном времени.

С ростом быстродействия управляющих микропроцессоров реализуемые в них алгоритмы управления по своим свойствам приближаются к непрерывным. Это приводит к известным эффектам подчеркивания высокочастотных помех в тракте передачи сигнала при наличии операций численного дифференцирования в алгоритмах цифрового управления.

Операции численного дифференцирования в алгоритмах управления современных технических систем используются достаточно широко в связи с активным внедрением технических средств, использующих цифровую технику для целей управления. Операции численного дифференцирования применяются как в традиционных ПД- и ПИД - регуляторах, так и при реализации сложных законов, например, в системах с переменной структурой, при отыскании требуемых законов управления методами обратной фильтрации, реализации оптимальных и адаптивных законов управления и т.д.

Существует мнение, что вопросы численного дифференцирования в справочной математической литературе представлены достаточно широко и полно [1,2], и поэтому при разработке дискретных алгоритмов управления реализация алгоритмов дифференцирования осуществляется достаточно надежно при использовании стандартных, рекомендуемых в справочниках процедур.

С другой стороны, известно, что операция численного дифференцирования является самой нежелательной при синтезе алгоритмов управления, поскольку при дифференцировании подчеркиваются шумовые составляющие в обрабатываемом сигнале. Алгоритмы численного дифференцирования так же чувствительны к высокочастотным помехам и выбору интервала дискретизации. Кроме того, в отличие от идеального дифференцирования при применении алгоритмов численного дифференцирования для обработки сигналов динамических объектов результаты оказываются зависимым от начальных условий работы самого объекта. Следовательно, при использовании алгоритмов численного дифференцирования для реализации алгоритмов управления требуется более детальное изучение данных вопросов с учетом специфики решаемых задач в автоматическом управлении, используемых методов анализа и синтеза наиболее распространенных в инженерной практике.

В связи с развитием цифровых управляющих устройств реального времени, помимо стандартных законов регулирования, реализуемых в цифровых ПД и ПИД-регуляторах, появляется и расширяется круг новых практических задач обработки информации и автоматического управления, где возникает необходимость корректного применения алгоритмов численного дифференцирования.

Например, для решения задачи уменьшения времени готовности, увеличения точности и быстродействия инерционных приборов можно предложить использование дополнительной цифровой обработки информации с выхода прибора, позволяющей частично или полностью скомпенсировать априори известную его инерционность и даже колебательность. Дополнительная цифровая обработка позволяет увеличить полосу пропускания прибора и уменьшить погрешность, вносимую прибором из-за его динамических свойств и начальных условий на выходе. Дополнительная цифровая обработка требует разработки и реализации

алгоритмического и программного обеспечения, учитывающего динамические свойства прибора, что не связано с изменением конструкции прибора и заменой его базовых элементов. Такая модернизация может значительно продлить жизнь существующим и выпускаемым измерительным приборам и системам при значительно меньших затратах.

Указанная цифровая обработка решает задачу восстановления входного (измеряемого) сигнала прибора $x(t)$ по наблюдаемому в дискретные моменты времени выходному сигналу (показанию) $y(t)$ и известному математическому описанию прибора при неконтролируемых начальных условиях $(y(+0), y'(+0), \dots, y^{(m-1)}(+0))$. Математически - такая постановка означает отыскание численными методами правой части линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при известном решении его [3].

Хорошо известные оценки точности алгоритмов численного дифференцирования, которые приводятся в справочной математической литературе [1], оказываются недостаточными при разработке названных алгоритмов обработки информации и управления.

Анализ точности алгоритмов численного дифференцирования при использовании их для задач управления целесообразно проводить в частотной области, так как в этом случае легко увязать понятие "точности" с понятием "полосы пропускания", которое широко используется при проектировании систем управления. В пользу такого подхода говорит и то обстоятельство, что существующие методы анализа и синтеза систем управления базируются по большей части на частотных методах и представлениях. Это относится как к непрерывным, так и к дискретным системам. В частотной области эти системы анализируются с единых позиций. В связи с этим интерес представляет исследование частотных свойств известных алгоритмов численного дифференцирования и выработка рекомендаций по их применению.

В литературе по численным методам [1,2] для оценки производных таблично заданной функции $y = f(t)$ предлагается произвести замену ее значений: $y_0, y_1, y_2 \dots y_k$, которые она имеет при значениях аргумента: $t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots, t_0 + k\Delta t$, интерполяционным полиномом (простым алгебраическим или специальным – Стирлинга, Ньютона или Бесселя) k -ой степени, принимающим те же значения, что и $f(t)$ при тех же значениях аргумента. Для получения производной i -го порядка необходимо продифференцировать интерполяционный полином i раз. Использование специальных полиномов позволяет получить как простейшие (легко интерпретируемые геометрически [1]) алгоритмы численного дифференцирования, так и более сложные, входящие в таблицы наиболее употребляемых алгоритмов [2].

Для построения интерполяционных полиномов используются конечные разности:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f[t_0 + (i+1)\Delta t] - f[t_0 + i\Delta t] - \text{первая разность для значения } t = t_0 + i\Delta t \text{ аргумента};$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i - \text{разность второго порядка для значения аргумента } t_0 + i\Delta t;$$

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i - \text{разность } k\text{-го порядка.}$$

Для получения оценки первой производной необходимо продифференцировать полиномы Стирлинга, Ньютона, Бесселя [3] по переменной t при значении аргумента $t = t_0$.

Соотношения из таблицы 1 составляют основу таблиц наиболее употребляемых алгоритмов численного дифференцирования [2].

Таблица 1

Полином	По 1 слагаемому	По 2 слагаемым	По 3 слагаемым
Стирлинга	$\hat{y}'(t_0) = \frac{y_1 - y_{-1}}{2\Delta t}$	$\hat{y}'(t_0) = \frac{-y_2 + 8y_1 - 8y_0 + y_{-2}}{4\Delta t}$	$\hat{y}'(t_0) = \frac{y_3 - 9y_2 + 45y_1 - 45y_0 + 9y_{-2} - y_{-3}}{60\Delta t}$
Бесселя	$\hat{y}'(t_0) = \frac{y_1 - y_0}{\Delta t}$	$\hat{y}'(t_0) = \frac{-y_2 + 5y_1 - 3y_0 - y_{-1}}{4\Delta t}$	$\hat{y}'(t_0) = \frac{-y_2 + 6y_1 - 3y_0 - 2y_{-1}}{6\Delta t}$
Ньютона	$\hat{y}'(t_0) = \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta t}$	$\hat{y}'(t_0) = \frac{3y_0 - 4y_{-1} + y_{-2}}{2\Delta t}$	$\hat{y}'(t_0) = \frac{11y_0 - 18y_{-1} + 9y_{-2} - 2y_{-3}}{6\Delta t}$

Анализ этих соотношений показывает, что для целей управления в режиме “on-line” подходят алгоритмы взятия производной на основе полинома Ньютона, так как в них используются только предыдущие отсчеты. Остальные алгоритмы целесообразно применять для обработки имеющихся функций в режиме “off-line”.

Поэтому подробнее остановимся на полиноме Ньютона по переменной $u = \frac{t-t_0}{\Delta t}$ для функции $f(t)$:

$$\hat{y}(u) = y_0 + u\Delta y_{-1} + \frac{1}{2!}u(u+1)\Delta^2 y_{-2} + \frac{1}{3!}u(u+1)(u+2)\Delta^3 y_{-3} + \dots \quad (1)$$

При $t=t_0$ ($u=0$)

первая производная интерполяционного полинома Ньютона:

$$\hat{y}'(t_0) = \frac{1}{\Delta t}(\Delta y_{-1} + \frac{1}{2}\Delta^2 y_{-2} + \frac{1}{3}\Delta^3 y_{-3} + \frac{1}{4}\Delta^4 y_{-4} + \frac{1}{5}\Delta^5 y_{-5} + \frac{1}{6}\Delta^6 y_{-6} + \frac{1}{7}\Delta^7 y_{-7} + \frac{1}{8}\Delta^8 y_{-8} + \frac{1}{9}\Delta^9 y_{-9}).$$

Вычисление коэффициентов членов ряда производится по формуле сочетания:

$$C_k^r = \frac{k!}{r!(k-r)!}.$$

Первые 6 членов ряда имеют вид:

$$\Delta y_{-1} = y_0 - y_{-1} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}\Delta^2 y_{-2} = \frac{1}{2}(y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}) \quad (3)$$

$$\frac{1}{3}\Delta^3 y_{-3} = \frac{1}{3}(y_0 - 3y_{-1} + 3y_{-2} - y_{-3}) \quad (4)$$

$$\frac{1}{4}\Delta^4 y_{-4} = \frac{1}{4}(y_0 - 4y_{-1} + 6y_{-2} - 4y_{-3} + y_{-4}) \quad (5)$$

$$\frac{1}{5}\Delta^5 y_{-5} = \frac{1}{5}(y_0 - 5y_{-1} + 10y_{-2} - 10y_{-3} + 5y_{-4} - y_{-5}) \quad (6)$$

$$\frac{1}{6}\Delta^6 y_{-6} = \frac{1}{6}(y_0 - 6y_{-1} + 15y_{-2} - 20y_{-3} + 15y_{-4} - 6y_{-5} + y_{-6}) \text{ и т.д.} \quad (7)$$

Ключевым понятием при исследовании систем в частотной области является частота среза на амплитудно-частотной характеристике разомкнутой системы, которая практически определяет полосу пропускания замкнутой системы. Именно в этой полосе частот необходимо обеспечить требуемую точность работы алгоритма численного дифференцирования [4]. Это обстоятельство приводит к необходимости введения понятия полосы пропускания алгоритма, то есть такой области частот, где свойства алгоритма с определенной точностью воспроизводят свойства идеального дифференцирования. Речь идет об оценке верхней границы частоты в области низких частот, до которой частотные свойства идеального дифференцирующего звена и звена, реализующего операцию численного дифференцирования, совпадают с определенной точностью. Комплексный коэффициент передачи $W(j\omega)$ идеального дифференцирующего звена, его модуль $|W(j\omega)|$ и фаза $\varphi(\omega)$, как известно, имеют вид:

$$W(j\omega) = K_d \cdot j\omega; |W(j\omega)| = K_d \cdot \omega; \varphi(\omega) = +\frac{\pi}{2}, \quad (8)$$

где K_d – коэффициент передачи дифференцирующего звена.

Для сокращения записей примем $K_d = 1$.

Большое значение имеет помехозащищенность алгоритма численного дифференцирования, определяемая частотными свойствами алгоритма в области высоких частот в сравнении с идеальным дифференцированием.

Проведем сравнительный анализ частотных свойств идеального дифференцирующего звена и звена, реализующего алгоритм численного дифференцирования на базе интерполяционного полинома Ньютона (1) с использованием логарифмических амплитудно-частотных (ЛАЧХ) и фазочастотных характеристик (ФЧХ). С помощью ЛАЧХ и ФЧХ можно

оценить не только точность дифференцирования в полосе пропускания, но и установить влияние интервала дискретизации на точность оценки производной. Частотные характеристики вычисляются путем последовательного применения преобразований Лапласа и Фурье к алгоритму.

Рассмотрим алгоритм численного дифференцирования с использованием первого слагаемого производной интерполяционного полинома Ньютона (2):

$$\hat{y}'[n\Delta t] = \frac{y[n\Delta t] - y[(n-1)\Delta t]}{\Delta t} = f[n\Delta t]. \quad (9)$$

Комплексный коэффициент усиления преобразования (9) будет иметь вид:

$$W^*(j\omega\Delta t) = \frac{F^*(j\omega)}{Y^*(j\omega)} = \frac{(1 - e^{-j\omega\Delta t})}{\Delta t},$$

$$W^*(j\omega\Delta t) = \frac{1 - \cos(\omega\Delta t) + j \sin(\omega\Delta t)}{\Delta t}. \quad (10)$$

Тогда модуль оценки $|W^*(j\omega\Delta t)|$ производной по одному слагаемому от производной интерполяционного полинома Ньютона будет:

$$|W^*(\omega\Delta t)| = \frac{1}{\Delta t} \sqrt{(1 - \cos \omega\Delta t)^2 + \sin^2 \omega\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} 2 \sin \frac{\omega\Delta t}{2} \approx \omega \quad (\text{для } \frac{\omega\Delta t}{2} \leq \frac{\pi}{6}).$$

Последнее условие позволяет оценить верхнюю границу частоты, до которой модуль частотной характеристики (ЧХ) оценки производной совпадает с модулем ЧХ идеального дифференцирующего звена. Несколько усилив это условие, приходим к простому соотношению:

$$\omega \leq \frac{1}{\Delta t}. \quad (11)$$

Фазочастотная характеристика (10), определяемая как

$$\varphi(\omega\Delta t) = \arctg\left(\frac{\sin \omega\Delta t}{1 - \cos \omega\Delta t}\right) = \arctg\left(\ctg \frac{\omega\Delta t}{2}\right),$$

будет близка к $+\frac{\pi}{2}$, если еще усилить условие (11):

$$\omega \leq \frac{0.1}{\Delta t}. \quad (12)$$

Количественные величины погрешностей в оценке значений модуля и фазы по отношению к характеристикам идеального дифференцирующего звена для граничных условий (11) и (12) приводятся далее при расчетах ЛАЧХ и ФЧХ алгоритмов численного дифференцирования с учетом большего числа в полиноме (1).

Для расчетов частотных характеристик действительную и мнимую части числителя комплексного коэффициента усиления (10) обозначим как:

$$\text{Re} = 1 - \cos(\omega\Delta t); \text{Im} = \sin(\omega\Delta t).$$

Тогда вычислить частотные характеристики алгоритма (10) можно по формулам:

$$L(\omega) = 20 \lg \left(\frac{\sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}}{\Delta t} \right), \varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right).$$

Аналогично определяются частотные характеристики алгоритма численного дифференцирования на базе двух слагаемых производной интерполяционного полинома Ньютона:

$$\hat{y}'[n\Delta t] = \frac{3y[n\Delta t] - 4y[(n-1)\Delta t] + y[(n-2)\Delta t]}{2\Delta t} = f[n\Delta t]. \quad (13)$$

Применив к выражению (13) последовательно преобразования Лапласа и Фурье, вычислим комплексный коэффициент усиления:

$$W^*(j\omega) = \frac{F^*(j\omega)}{Y^*(j\omega)} = \frac{(3 - 4e^{-j\omega\Delta t} + e^{-2j\omega\Delta t})}{2\Delta t},$$

$$W^*(j\omega) = \frac{(3 - 4\cos(\omega\Delta t) + \cos(2\omega\Delta t)) + j(4\sin(\omega\Delta t) - \sin(2\omega\Delta t))}{2\Delta t}. \quad (14)$$

Действительная и мнимая части числителя комплексного коэффициента усиления (14) можно записать так:

$$\text{Re} = 3 - 4\cos(\omega\Delta t) + \cos(2\omega\Delta t); \text{Im} = 4\sin(\omega\Delta t) - \sin(2\omega\Delta t).$$

Тогда частотные характеристики алгоритма (14) найдем следующим образом:

$$L(\omega) = 20 \lg \left(\frac{\sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}}{2\Delta t} \right), \varphi(\omega) = \text{arctg} \left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right).$$

Таким же образом определены частотные характеристики для алгоритмов, основанных на первой производной полинома Ньютона по 3, 4, 5, 6 слагаемым (таб2).

Таблица2

Количество слагаемых	Алгоритм Ньютона $\hat{y}'(t_0)$	$W^*(p)$
3	$\frac{11y_0 - 18y_{-1} + 9y_{-2} - 2y_{-3}}{6\Delta t}$	$\frac{11 - 18e^{-p\Delta t} + 9e^{-2p\Delta t} - 2e^{-3p\Delta t}}{6\Delta t}$
4	$\frac{25y_0 - 48y_{-1} + 36y_{-2} - 16y_{-3} + 3y_{-4}}{12\Delta t}$	$\frac{25 - 48e^{-p\Delta t} + 36e^{-2p\Delta t} - 16e^{-3p\Delta t} + 3e^{-4p\Delta t}}{12\Delta t}$
5	$\frac{137y_0 - 300y_{-1} + 300y_{-2} - 200y_{-3} + 75y_{-4} - 12y_{-5}}{60\Delta t}$	$\frac{137 - 300e^{-p\Delta t} + 300e^{-2p\Delta t} - 200e^{-3p\Delta t} + 75e^{-4p\Delta t} - 12e^{-5p\Delta t}}{60\Delta t}$
6	$\frac{147y_0 - 360y_{-1} + 450y_{-2} - 400y_{-3} + 225y_{-4} - 72y_{-5} + 10y_{-6}}{60\Delta t}$	$\frac{147 - 360e^{-p\Delta t} + 450e^{-2p\Delta t} - 400e^{-3p\Delta t} + 225e^{-4p\Delta t} - 72e^{-5p\Delta t} + 10e^{-6p\Delta t}}{60\Delta t}$

На рис.1 и рис.2 представлены частотные характеристики алгоритма Ньютона с разным числом слагаемых при $\Delta t = 0.1$

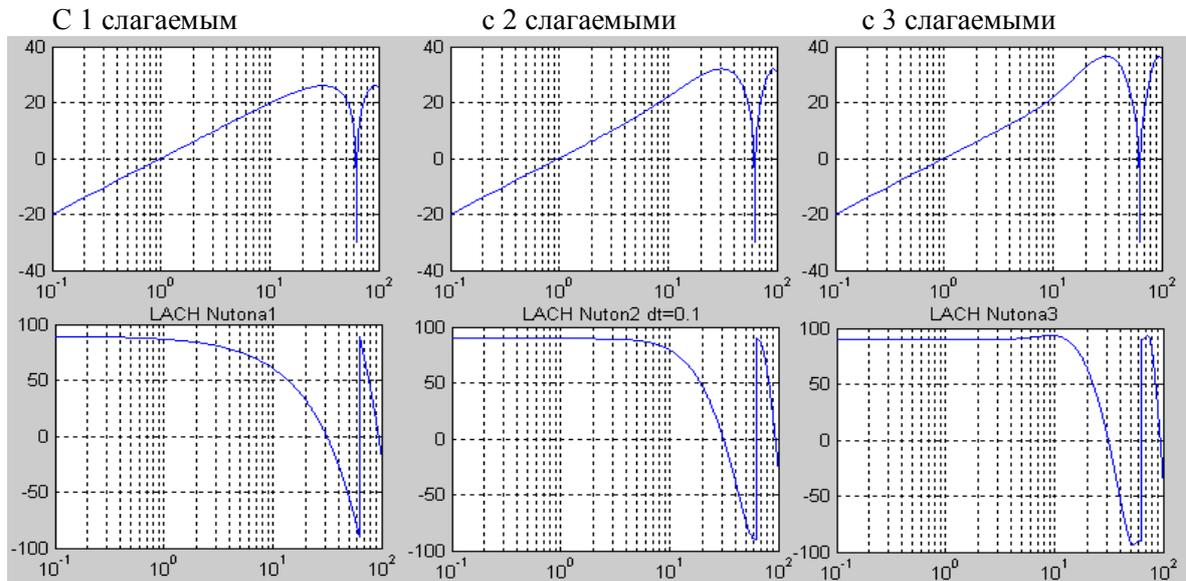


Рис.1. ЛАЧХ и ФЧХ для алгоритма Ньютона с 1-, 2-, 3- слагаемыми.

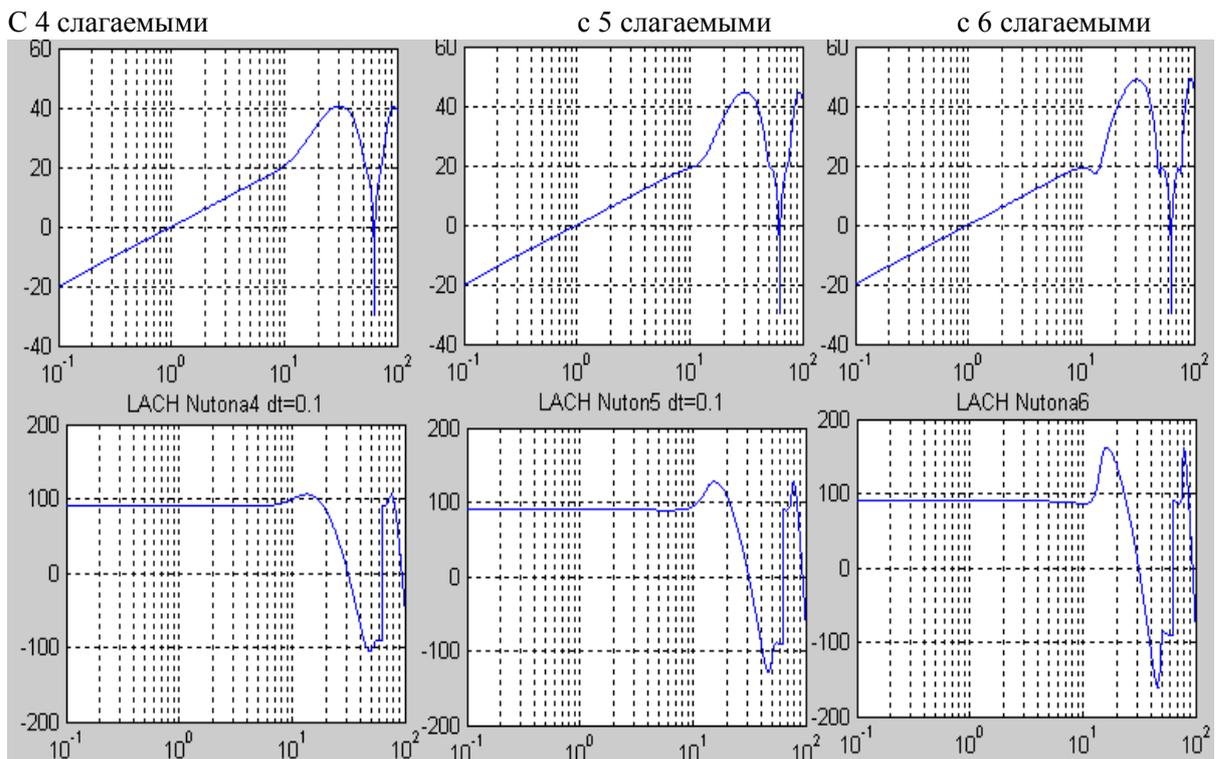


Рис.2. ЛАЧХ и ФЧХ для алгоритма Ньютона с 4-, 5-, 6- слагаемыми.

Анализ полученных частотных характеристик показывает, что в полосе частот $0 < \omega < 1/\Delta t$ реализуемые логарифмические характеристики достаточно точно повторяют ЛАЧХ и ФЧХ идеального дифференцирующего звена. Эту полосу будем считать полосой пропускания алгоритма. Понятие близости ЛАЧХ и ФЧХ алгоритма к идеальным характеристикам определяется величиной их отклонения от аналогичных характеристик идеального дифференцирующего звена на частоте $\omega = 1/\Delta t$. Очевидно, что ширина полосы пропускания обратно пропорциональна величине интервала дискретизации по времени (Δt). Величины относительных погрешностей в оценке модуля и фазы алгоритмов по отношению к идеальному дифференцирующему звену представлены в таблицах 3 и 4. На рис.3 и рис.4 показаны зависимости изменения относительной погрешности в оценках модуля и фазы от числа слагаемых в алгоритме численного дифференцирования.

Относительная погрешность по модулю определяется следующим образом:

$$\delta_{AЧХ} \% = \frac{A_{ид}(1/\Delta t) - A_{Алг}(1/\Delta t)}{A_{ид}(1/\Delta t)} * 100\%,$$

где $A_{ид}(1/\Delta t)$ – значение, которое принимает амплитудно-частотная характеристика идеального дифференцирующего звена на частотах $\omega = 1/\Delta t$, $\omega = 0,1*1/\Delta t$;

$A_{Алг}(1/\Delta t)$ – значение АЧХ алгоритма на частотах $\omega = 1/\Delta t$, $\omega = 0,1*1/\Delta t$.

Рассмотрим АЧХ и ФЧХ для двух случаев: 1) $\omega = 10(1/c)$, $\Delta t = 0,1$ и 2) $\omega = 1(1/c)$, $\Delta t = 0,1$

Таблица 3

w=10, dt=0,1			
slag	Аалг	Аид	%
1	6,32	10,00	37
2	8,32	10,00	17
3	9,16	10,00	8
4	9,56	10,00	4
5	9,76	10,00	2
6	9,87	10,00	1

w=1, dt=0,1			
slag	Аалг	Аид	%
1	0,95	1,00	4,84
2	1,00	1,00	0
3	1,000	1,00	0
4	1,000	1,00	0
5	1,00	1,00	0
6	1,00	1,00	0

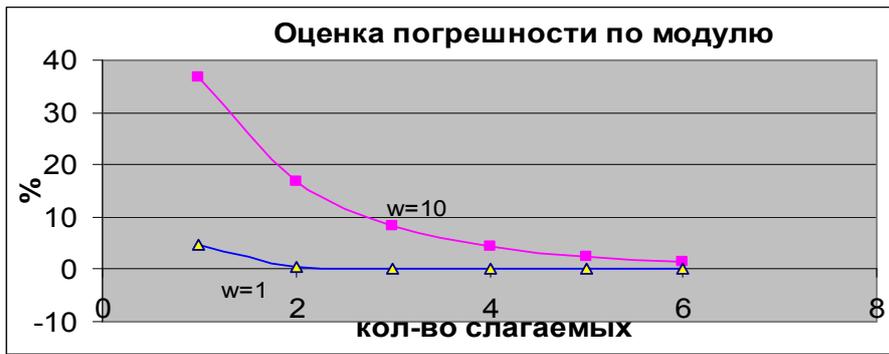


Рис.3 Оценка погрешности по модулю.

Погрешность ФЧХ алгоритмов рассчитаем так:

$$\delta_{\text{ФЧХ}} \% = (\varphi_{\text{ид}}(1/\Delta t) - \varphi_{\text{алг}}(1/\Delta t)) / \varphi_{\text{ид}}(1/\Delta t) * 100\% = \frac{90^{\circ} - \varphi_{\text{алг}}(1/\Delta t)}{90^{\circ}},$$

где $\varphi_{\text{ид}} = 90^{\circ}$ – значение ФЧХ идеального дифференцирующего звена на частотах $\omega = 1/\Delta t$, $\omega = 0,1 * 1/\Delta t$; $\varphi_{\text{алг}}$ – значение ФЧХ алгоритма на частотах $\omega = 1/\Delta t$, $\omega = 0,1 * 1/\Delta t$.

Таблица 4

w=10, dt=0,1			
slag	фалг	фид	%
1	61,10	90,00	32
2	79,82	90,00	11
3	93,39	90,00	-4
4	98,97	90,00	-10
5	94,20	90,00	-5
6	89,03	90,00	1

w=1, dt=0,1			
slag	фалг	фид	%
1	86,68	90,00	3,69
2	89,52	90,00	1
3	89,540	90,00	1
4	89,530	90,00	1
5	89,53	90,00	1
6	89,53	90,00	1

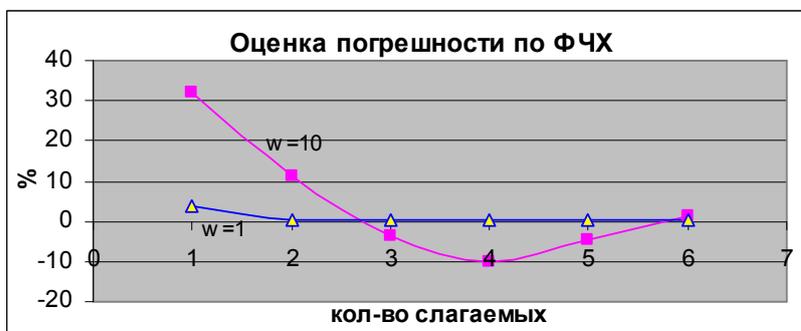


Рис.4. Оценка погрешности по ФЧХ.

Анализ представленных таблиц и графиков показывает, что простой (на базе одного слагаемого полинома Ньютона) алгоритм дифференцирования с большим шагом Δt дает большие погрешности на границе своей полосы пропускания. Уменьшение Δt приводит к усилению высокочастотных помех. Реализация более сложного алгоритма на базе двух или трех слагаемых позволяет уменьшить усиление в области высоких частот за счет увеличения Δt и повысить точность дифференцирования на границе полосы пропускания. Дальнейшее увеличение числа слагаемых в алгоритме не целесообразно, так как приводит к усложнению алгоритма, но не дает существенного выигрыша в точности воспроизведения частотных свойств алгоритма в рассматриваемой полосе частот.

Таким образом, полосу пропускания алгоритма численного дифференцирования на базе одного слагаемого производной интерполяционного полинома Ньютона следует оценивать по соотношению (12), а на базе двух или трех слагаемых – по соотношению (11).

Другим важным положительным свойством дискретного дифференцирования является то, что за пределами полосы пропускания максимальный коэффициент передачи не превышает величины $10/\Delta t$. Поэтому высокочастотная помеха имеет ограниченное усиление. Кроме

этого, в окрестности частот $\omega = \frac{2n\pi}{\Delta t}$ коэффициент передачи алгоритма существенно понижается, что также позволяет уменьшить влияния помех. В связи с этим при реализации алгоритма управления целесообразно взять Δt , по возможности, большим. Как правило, для замкнутых систем эта величина должна выбираться относительно частоты среза разомкнутой системы из соотношения: $\omega_{cp} \leq 1/10\Delta t$ (в случае дифференцирования с использованием одного слагаемого в полиноме) и увеличить правую часть этого неравенства в случае реализации дифференцирования по двум или трем слагаемым в полиноме.

Литература

1. *Андре Анго*. Математика для электро- и радиоинженеров/С предисловием Луи Де Бройля//перевод с французского под общей редакцией К.С. Шифрина//2-е издание. –М.: Наука. Гл. физ.-мат. лит.,1967. – 627 с.
2. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. - М.: Наука, 1986. – 487 с.
3. *Колосов О.С.* Алгоритмы численного дифференцирования в задачах управления / О.С. Колосов, И.Е. Подольская, С.А. Кульмамиров, Фон Чжаньлинь. – М.: Издательский дом МЭИ, 2009. –144 с.
4. *Колосов О.С., Кошоева Б.* Выбор шага дискретизации в цифровых алгоритмах управления с дифференцированием. // Материалы 6-й научной конференции «Управление и информационные технологии» (УИТ-2010). – СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2010. –С. 210 – 214