

**ПРИМЕНЕНИЕ КАВИТАЦИОННОЙ СХЕМЫ КОКСА – КЛЕЙДЕНА К
ИССЛЕДОВАНИЮ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ УСТУП**

*Абдылдаев М. Ю. – д.т.н, профессор. КГУ им. И. Арабаева, Кыргызская Республика, г.Бишкек,
ул. Раззакова, 43, 720040;*

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА. МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

265

Аннотация. В данной статье рассматривается применение кавитационной схемы Кокса-Клейдена к исследованию течения жидкости через уступ. Выводится общее решение задачи в параметрической форме.

Ключевые слова: кавитационная схема Кокса-Клейдена, течение жидкости через уступ, число кавитации, поток жидкости с кавитацией.

APPLICATION OF THE COX-CLAYDEN CAVITATION SCHEME FOR THE STUDY OF FLUID FLOW THROUGH THE LEDGE

Abdyldaev M. Yu. - Doctor of Technical Sciences, professor. KSU named after I. Arabaev, Kyrgyz Republic, Bishkek, Razzakova str., 43, 720040;

Volik N.N., KSU named after I. Arabaev; Kyrgyz Republic, Bishkek, Razzakova str., 43, 720040;

Dzhamankulov A.A., KSU named after I. Arabaev, Kyrgyz Republic, Bishkek, Razzakova str., 43, 720040.

Abstract. This article discusses the use of the Cox-Clayden cavitation scheme for the study of fluid flow through a ledge. Displays the general solution of the problem in parametric form.

Keywords: Cox-Clayden cavitation circuit, fluid flow through a ledge, number of cavitation, fluid flow with cavitation.

Рассмотрим кавитационное течение жидкости через уступ (рис.1). В. И. Степановой [2] установлена связь между кавитационным течением и

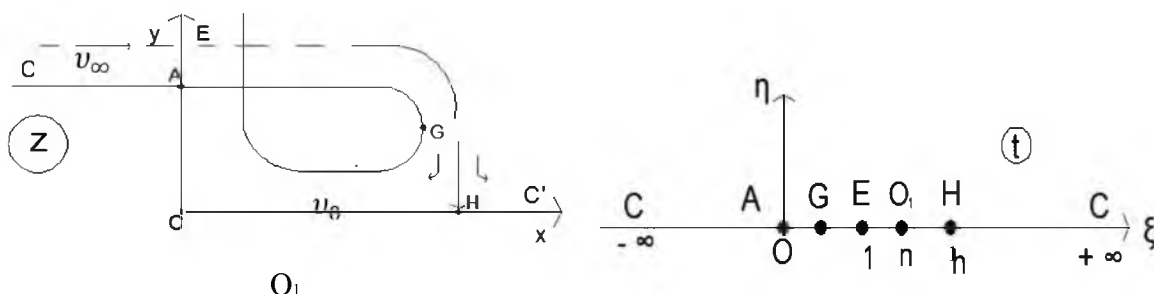


Рис. 1. Течение в физической плоскости $z = x + iy$ Рис. 2. Параметрическая плоскость $t = \xi + i\eta$

течением по дну с уступом. Схема рассмотренного нами течения в предположении, что за уступом образуется зона разряжения, аналогична каверне за обтекаемым препятствием, изображенного на рисунке 1. Скорость течения на участке СА возрастает с v_∞ в бесконечной точке С до v_0 в начале уступа А. На границе AGE каверны позади уступа скорость имеет постоянный модуль v_0 . Струя AGE бесконечно продолжается вверх (кавитационная схема Кокса – Клейдена) и уходит на второй лист римановой плоскости. Точки Н и О являются критическими точками течения (скорость в них равна нулю). На HC' скорость снова возрастает с нуля в точке Н до v_∞ в точке C' . Задача решается методом Н. Е. Жуковского [1].

$$\omega = \ln \zeta = -\ln \frac{dw}{v_0 dz} = -\ln \frac{v}{v_0} + i\theta \quad (1)$$

где θ – угол скорости с осью абсцисс ОХ. Для решения задачи отобразим области изменения $\frac{dw}{v_0 dz}$ и $w = \varphi + i\theta$ (комплексного потенциала) на верхнюю полуплоскость вспомогательного параметрического переменного t ($I_m t \geq 0$, рис. 2).

Пусть на одной граничной линии тока САGE функции тока $\psi = 0$, а на другой граничной линии тока EO₁H $\psi = q_E$ (расход струи в точке E), на линии HC'C $\psi = +\infty$ (расход течения потока). При движении вдоль линии тока потенциал скорости φ , очевидно, меняется от $-\infty$ до $+\infty$ (рис. 3).

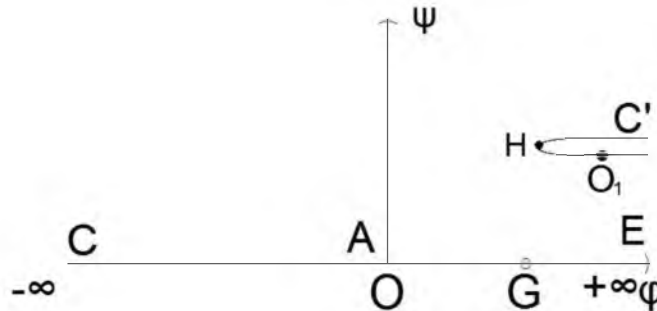


Рис. 3. Область изменения комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$

Таким образом, областью изменения w является треугольник с вершинами в точках E ($\alpha_E = 0$), H ($\alpha_H = 2\pi$) и CC' ($\alpha_C = -\pi$). Для получения отображения треугольника EHC(C') (рис. 3) на верхнюю полуплоскость t (рис. 2) можно воспользоваться формулой Кристоффеля – Шварца [1]. Отображение осуществляется с помощью функции:

$$w(t) = \frac{q}{\pi(h-1)} \{t + (1-h)[\ln(t-1) + i\pi]\} \quad (2)$$

Для установления правильности формулы (2) достаточно, очевидно, проверить выполнение граничных условий. В промежутке САGE ($-\infty < t < 0$; $0 < t < 1$) имеем:

$$I_m w(t) = I_m \left\{ \frac{q}{\pi(h-1)} \{t + (1-h)[\ln(t-1) + i\pi]\} \right\} = 0.$$

Re w меняется от $-\infty$ в точке $t = -\infty$ (точка C) до $+\infty$ в точке $t = 1$ (точка E). В промежутке EO₁H ($1 < t < h$)

$$I_m w(t) = I_m \left\{ \frac{q}{\pi(h-1)} \{t + (n-1)[\ln(t-1) + i\pi]\} \right\} = q.$$

Дифференцируя формулу (2) имеем:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{q}{\pi} \cdot \frac{t-h}{(h-1)(t-1)} \quad (3)$$

Найдем теперь функцию $\omega = -\ln \frac{v}{v_0} + i\theta$. При отображении области течения на плоскость Жуковского имеем двулистную римановую поверхность. Ввиду сложности отображения этой области в верхнюю полуплоскость параметрического переменного t , $I_m \geq 0$ применим интеграл Шварца для верхней полуплоскости [3]:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi) \frac{d\xi}{\xi - z} + iC_1^* \quad (4)$$

где $U(\xi)$ – заданные значения вещественной части функции на действительной ось t ($t = \xi$), C_1^* – действительная постоянная. Введем связанную с функцией Жуковского новую вспомогательную функцию $F(t)$

$$F(t) = \frac{\omega(t)}{i\sqrt{t(t-1)}} = \frac{\theta}{\sqrt{t(t-1)}} + i \frac{\ln \frac{v}{v_0}}{\sqrt{t(t-1)}} \quad (5)$$

$C_1^* = 0$, так как при $t \rightarrow 0$ $|\omega| = 0$. Для рассматриваемой задачи

$$Re F(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0, & CA \\ 0, & 0 < t < 1, & AGE(v = v_0) \\ \frac{\pi}{2\sqrt{t(t-1)}}, & 1 < t < n, & EO_1' \\ -\frac{\pi}{\sqrt{t(t-1)}}, & n < t < h, & O_1'H \\ 0, & h < t < +\infty, & HC' \end{cases}$$

Подставляя эти значения в (5) и интегрируя в указанных пределах имеем:

$$\frac{\omega(t)}{i\sqrt{t(t-1)}} = \frac{1}{i\sqrt{t(t-1)}} \ln \left\{ \left[\frac{\sqrt{n(t-1)} - \sqrt{t(n-1)}}{\sqrt{n(t-1)} + \sqrt{t(n-1)}} \right]^{3/2} \times \left(\frac{\sqrt{h(t-1)} + \sqrt{t(n-1)}}{\sqrt{h(t-1)} - \sqrt{t(n-1)}} \right) \right\}$$

Так как $\omega = \ln \zeta$ и $\frac{d\omega}{v_0 dz} = \frac{1}{\zeta} = \zeta^*$.

$$\zeta(t) = \left\{ \left[\frac{\sqrt{n(t-1)} - \sqrt{t(n-1)}}{\sqrt{n(t-1)} + \sqrt{t(n-1)}} \right]^{3/2} \times \left(\frac{\sqrt{h(t-1)} + \sqrt{t(n-1)}}{\sqrt{h(t-1)} - \sqrt{t(n-1)}} \right) \right\}, \quad (6)$$

$$\zeta^* = \left\{ \left[\frac{\sqrt{n(t-1)} + \sqrt{t(n-1)}}{\sqrt{n(t-1)} - \sqrt{t(n-1)}} \right]^{3/2} \times \left(\frac{\sqrt{h(t-1)} - \sqrt{t(n-1)}}{\sqrt{h(t-1)} + \sqrt{t(n-1)}} \right) \right\} \quad (7)$$

Формулу(7) не трудно проверить непосредственно. В формуле (7) обеспечено нужное соответствие характерных точек:

$$\zeta^*(1) = \left\{ \begin{matrix} v = v_0; \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right\}; \quad \zeta^*(h) = v = 0; \quad \zeta^*(n) = \{v = 0\}; \quad \zeta^*(0) = \left\{ \begin{matrix} v = v_0; \\ \theta = 0 \end{matrix} \right\}.$$

Так как определенная формулой (7) функция $\zeta^* = \frac{dw}{v_0 dz}$ удовлетворяет заданным условиям и очевидно, голоморфна в любой точке верхней полуплоскости, то формула (7) решает задачу о конформном отображении $\frac{dw}{v_0 dz}$ на верхнюю полуплоскость t .

С помощью формул (3) и (7) можно рассчитать все характеристики течения, а именно найти наиболее интересную для данной задачи величину –число кавитации:

$$\Lambda = \frac{v_0^2}{v_\infty^2} - 1, \quad (8)$$

где v_∞ - скорость набегающего потока (точка С). Скорость набегающего потока можно определить полагая в (7) $t = +\infty$,

$$\frac{v_\infty}{v_0} = \left[\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} \right]^{3/2} \cdot \left(\frac{\sqrt{h} - \sqrt{h-1}}{\sqrt{h} + \sqrt{h-1}} \right). \quad (9)$$

Таким образом, формулы (8) и (9) дают число кавитации. Для вычисления геометрических элементов течения: l – высоты уступа и уравнения линии AGE нужно найти функцию $z(t)$. Из (7) и (10) следует, что

$$z(t) = \frac{q}{\pi(h-1)} \int \left\{ \left[\frac{\sqrt{n(t-1)} + \sqrt{t(n-1)}}{\sqrt{n(t-1)} - \sqrt{t(n-1)}} \right]^{3/2} \times \left(\frac{\sqrt{h(t-1)} - \sqrt{t(n-1)}}{\sqrt{h(t-1)} + \sqrt{t(n-1)}} \right) \right\} \frac{t-h}{t-1} dt \quad (10)$$

Из формул (8) и (9) получим выражение для числа кавитации:

$$\Lambda = \left[\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \right]^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{h} + \sqrt{h-1}}{\sqrt{h} - \sqrt{h-1}} \right)^2 - 1. \quad (11)$$

Согласно схеме Бетца [4], коэффициент сопротивления уступа можно брать соответствующим уступу числу кавитации:

$$C_x = \Lambda \quad (12)$$

Таким образом, связь между C_x и Λ устанавливается в параметрической форме.

Список литературы:

1. М. И. Гуревич. Теория струй идеальной жидкости. Гос.издат. физико – математической литературы. Москва 1961.
2. Степанова В. И. Применение кавитационной схемы Эфроса – Гилбарга к исследованию течения жидкости через уступ. – В кн.: Математическая физика и гидродинамика. – М.: МОИП, 1972 г. с. 100 – 104.
3. Б. А. Фукс и Б. Ф. Шабат. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. Москва. Наука 1964 г
4. М. Ю. Абдылдаев. Плоские задачи теории струй идеальной жидкости. НАН КР. Институт автоматики. Бишкек, Илим. 1999 г.