УДК 622.83/85(575.2)(04)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ РОТАЦИОННОГО УДАРНОГО МЕХАНИЗМА

В.В. Воронкин

Приведена методика определения динамических реакций ротационного ударного механизма с шарнирно-подвешенным ударником.

Ключевые слова: ротационный ударный механизм; динамические реакции; теорема о движении центра масс механической системы.

При проектировании ротационных ударных механизмов [1] необходимо определять динамические реакции в их шарнирах. Особенно это важно в предударный период времени.

Ротационный ударный механизм (РУМ) с шарнирно-связанным ударником можно представить в виде двойного маятника, состоящего из двух подвижных звеньев ротора (звена $OO_1 = l$) (см. рисунок) и ударника (звена $O_1M = l$). Центр масс ударника находится в точке C. Расстояние от точки O_1 до C равно l_C. При выходе ударника на ударную позицию ротор вращается с угловой скоростью $\dot{\varphi}_i = \omega_{1i}$ относительно точки O, а ударник с угловой скоростью $\dot{\psi}_i$ относительно точки O_1. Система обладает двумя степенями свободы. Выберем в качестве обобщенных координат независимые параметры: φ_i – угол поворота ротора относительно точки O и ψ_i – угол поворота ударника относительно точки O_1.

Положение точки M ударника относительно неподвижной системы координат XOY описывается уравнениями:

$$X_M = l\cos\phi_i - l\cos(\phi_i + \psi_i);\ Y_M = l\sin\phi_i - l\sin(\phi_i + \psi_i). \tag{1}$$

Соответственно для центра масс ударника (точка C):

$$X_C = l\cos\phi_i - l_C\cos(\phi_i + \psi_i);\ Y_C = l\sin\phi_i - l_C\sin(\phi_i + \psi_i). \tag{2}$$

Дифференцируя уравнения (1) и (2) по времени, получаем проекции скоростей:

$$\dot{X}_{Mi} = -l\sin\phi_i\dot{\phi}_i + l\sin(\phi_i + \psi_i)(\dot{\phi}_i + \dot{\psi}_i); \quad \dot{Y}_{Mi} = l\cos\phi_i - l\cos(\phi_i + \psi_i)(\dot{\phi}_i + \dot{\psi}_i);$$

$$\dot{X}_{Ci} = -l\sin\phi_i\dot{\phi}_i + l_C\sin(\phi_i + \psi_i)(\dot{\phi}_i + \dot{\psi}_i); \quad \dot{Y}_{Ci} = l\cos\phi_i\dot{\phi}_i - l_C\cos(\phi_i + \psi_i)(\dot{\phi}_i + \dot{\psi}_i). \tag{3}$$

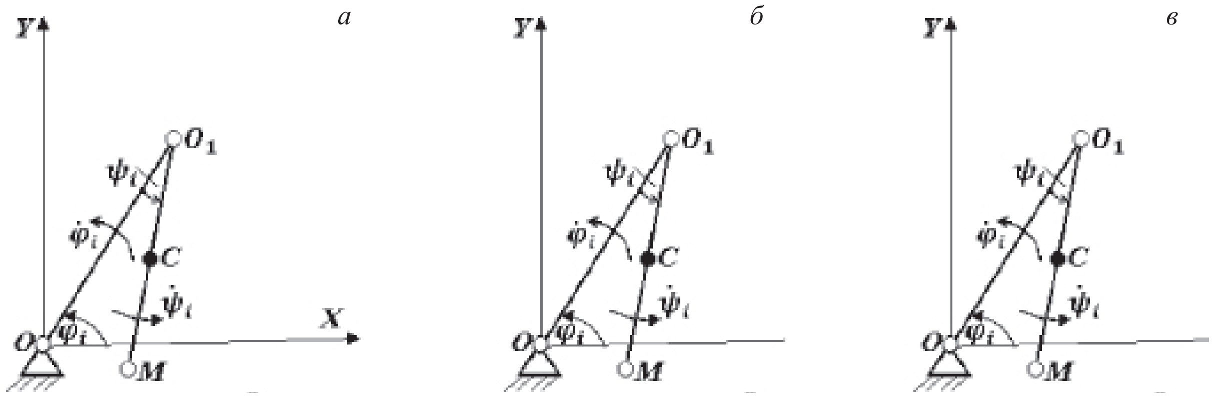

Схема ротационного ударного механизма

Скорости соответственно центра масс ударника (C) и точки M в абсолютном движении равны:

$$V_{Ci}=\sqrt{\dot{\phi}_i^2 l^2+l_C^2\left(\dot{\phi}_i+\dot{\psi}_i\right)^2-2\dot{\phi}_i l l_C\left(\dot{\phi}_i+\dot{\psi}_i\right)\cos\psi_i};\quad V_{Mi}=\sqrt{l^2\left[\dot{\phi}_i^2+\left(\dot{\phi}_i-\dot{\psi}_i\right)^2-2\dot{\phi}_i\left(\dot{\phi}_i-\dot{\psi}_i\right)\cos\psi_i\right]}. \quad (4)$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы определяется следующим образом:

$$T=\frac{1}{2}\left[J_1\dot{\phi}_i^2+J_2\left(\dot{\phi}_i+\dot{\psi}_i\right)^2+mV_{Ci}^2\right], \quad (5)$$

где J_1 и J_2 – моменты инерции ротора и ударника относительно их центров масс; m – масса ударника.

Подставляя значение скорости, получим:

$$T=\frac{1}{2}\left(J_1+ml^2\right)\dot{\phi}_i^2+\frac{1}{2}\left(J_2+ml_C^2\right)\left(\dot{\phi}_i+\dot{\psi}_i\right)^2-mll_C\left(\dot{\phi}_i+\dot{\psi}_i\right)\dot{\phi}_i\cos\psi_i. \quad (6)$$

Движение системы можно описать дифференциальными уравнениями Лагранжа 2-го рода [1]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta T}{\delta\dot{\phi}}\right)-\frac{\delta T}{\delta\phi}=Q_\phi;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta T}{\delta\dot{\psi}}\right)-\frac{\delta T}{\delta\psi}=Q_\psi. \quad (7)$$

где Q_φ и Q_ψ – обобщенные силы, действующие на систему.

При горизонтальном движении звеньев OO_1 и O_1M без учета их сил тяжести принимаем .

Тогда дифференциальные уравнения, описывающие движение звеньев механизма, исходя из уравнений (7) следующие [1]:

$$\left[J_1+ml^2+J_2+ml_C^2-2mll_C\cos\psi_i\right]\ddot{\phi}_i+\left[J_2+ml_C^2-mll_C\cos\psi_i\right]\ddot{\psi}_i+mll_C\sin\psi_i\dot{\psi}_i\left(2\dot{\phi}_i+\dot{\psi}_i\right)=0;$$

$$\left[J_2+ml_C^2-mll_C\cos\psi_i\right]\ddot{\varphi}_i+\left(J_2+ml_C^2\right)\ddot{\psi}_i-mll_C\sin\psi_i\dot{\varphi}_i^2=0. \quad (8)$$

Для упрощения системы уравнений (8) введем обозначения:

$$A=J_2+ml_C^2+J_1+ml^2+2mll_C\cos\psi_i;\quad B=mll_C\sin\psi_i;\quad C=J_2+ml_C^2-mll_C\cos\psi_i;\quad D=J_2+ml_C^2.$$

С учетом принятых обозначений уравнения (8) примут следующий вид:

$$A\ddot{\phi}_i+C\ddot{\psi}_i+B\dot{\psi}_i\left(2\dot{\phi}_i+\dot{\psi}_i\right)=0;\quad C\ddot{\phi}_i+D\ddot{\psi}_i-B\dot{\phi}_i^2=0. \quad (9)$$

Решим эти уравнения относительно обобщенных ускорений $\ddot{\varphi}_i$ и $\ddot{\psi}_i$:

$$\ddot{\phi}_i=-\frac{1}{A}\left(C\ddot{\phi}_i+B\dot{\psi}_i^2+2B\dot{\phi}_i\right);\quad \ddot{\psi}_i=-\frac{1}{A}\left(C\ddot{\phi}_i+B\dot{\phi}_i^2\right). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), имеем:

$$\ddot{\phi}_i=\frac{B}{DA-C^2}\left(C\dot{\phi}_i^2-B\dot{\psi}_i^2-2B\dot{\phi}_i\right);\quad \ddot{\psi}_i=\frac{B}{DA-C^2}\left(C\dot{\phi}_i^2-A\dot{\phi}_i^2+2C\dot{\phi}_i\right). \quad (11)$$

Для определения динамических реакций в шарнире O_1 отделим мысленно звено O_1M в шарнире O_1 и сообщим точке M звена перемещение; в результате центр инерции звена O_1M также переместится.

Составим уравнение движения центра инерции звена O_1M, применяя теорему о движении центра масс механической системы. Относительно системы координат XOY имеет вид [2]:

$$m\ddot{X}_C=\sum X_k;\quad m\ddot{Y}_C=\sum Y_k. \quad (12)$$

Ординаты центра инерции звена O_1M (X_C и Y_C) описаны уравнениями (2):

$$X_C = l\cos\phi_i - l_C\cos\left(\phi_i+\psi_i\right);\quad Y_C = l\sin\phi_i - l_C\sin\left(\phi_i+\psi_i\right).$$

Скорость центра инерции звена O_1M описана уравнениями (3):

$$\dot{X}_{Ci} = -l\sin\phi_i\dot{\phi}_i + l_C\sin\left(\phi_i+\psi_i\right)\left(\dot{\phi}_i+\dot{\psi}_i\right);\quad \dot{Y} \ \ = l\cos\phi\dot{\phi} - l \ \ \cos\left(\phi+\psi\ \right)\left(\dot{\phi}+\dot{\psi}\ \right).$$

Ускорение центра инерции звена O_1M запишем следующим образом:

$$\ddot{X}_C = -l\cos\phi_i\dot{\phi}_i^2 - l\ddot{\phi}_i\sin\phi_i + l_C\cos\left(\phi_i+\psi_i\right)\left(\dot{\phi}_i+\dot{\psi}_i\right)^2 + l_C\sin\left(\phi_i+\psi_i\right)\left(\ddot{\phi}_i+\ddot{\psi}_i\right);$$

$$\ddot{Y}_C = -l\sin\phi_i\dot{\phi}_i^2 - l\ddot{\phi}_i\cos\phi_i + l_C\sin\left(\phi_i+\psi_i\right)\left(\dot{\phi}_i+\dot{\psi}_i\right)^2 - l_C\cos\left(\phi_i+\psi_i\right)\left(\ddot{\phi}_i+\ddot{\psi}_i\right).$$

Подставляя и в уравнения (12), имеем:

$$X_{01} = m\left\{\ddot{\phi}_i\left[l_C\sin\left(\phi_i+\phi_i\right)-l\sin\phi_i\right]+\ddot{\psi}_i l_C\sin\left(\phi_i+\psi_i\right)+\phi_i^2\left[l_C\cos\left(\phi_i+\psi_i\right)-l\cos\phi_i\right]+\right.$$
$$\left.+\psi_i^2 l_C\cos\left(\phi_i+\psi_i\right)+2\dot{\phi}_i\dot{\psi}_i l_C\cos\left(\phi_i+\psi_i\right)\right\}; \qquad (13)$$

$$Y_{01} = m\left\{\ddot{\phi}_i\left[l\cos\phi_i-l_C\cos\left(\phi_i+\phi_i\right)\right]-\ddot{\psi}_i l_C\cos\left(\phi_i+\psi_i\right)+\phi_i^2\left[l_C\sin\left(\phi_i+\psi_i\right)-l\sin\phi_i\right]+\right.$$
$$\left.+\psi_i^2 l_C\sin\left(\phi_i+\psi_i\right)+2\dot{\phi}_i\dot{\psi}_i l_C\sin\left(\phi_i+\psi_i\right)\right\}. \qquad (14)$$

Подставляя в (13) и (14) выражения (11), получим:

$$X_{01} = m\left\{\frac{B}{DA-C^2}\left(C\dot{\phi}_i^2{}_C - B\dot{\psi}_i^2{}_i - 2B\dot{\phi}_i\right)\left[l \ \ \sin\left(\phi+\psi\ \right)-l\sin\phi_i\right]+\frac{B}{DA-C^2}\left(C\dot{\psi}_C^2 - A\dot{\phi}_i^2 + 2C\dot{\phi}\right)l \ \ \sin\left(\phi+\psi\ \right)+\right.$$
$$\left.+\phi_i^2\left[l_C\cos\left(\phi_i+\psi_i\right)-l\cos\phi_i\right]+\psi_i^2 l_C\cos\left(\phi_i+\psi_i\right)+2\dot{\phi}_i\dot{\psi}_i l_C\cos\left(\phi_i+\psi_i\right)\right\};$$

$$Y_{01} = m\left\{\frac{B}{DA-C^2}\left(C\dot{\phi}_i^2{}_C - B\dot{\psi}_{ii}^2 - 2B\dot{\phi}_i\right)\left[l_i \ \ \cos\phi - l \ \ \cos\left(\phi+\psi\ \right)\right]-\frac{B}{DA-C^2}\left(C\dot{\psi}_C^2 - A\dot{\phi}_i^2 + 2C\dot{\phi}\right)l \ \ \cos\left(\phi+\psi\ \right)+\right.$$
$$\left.+\phi_i^2\left[l_C\sin\left(\phi_i+\psi_i\right)-l\sin\phi_i\right]+\psi_i^2 l_C\sin\left(\phi_i+\psi_i\right)+2\dot{\phi}_i\dot{\psi}_i l_C\sin\left(\phi_i+\psi_i\right)\right\}.$$

После преобразования имеем:

$$X_{01} = \alpha\dot{\phi}_i^2 + \beta\dot{\psi}_i^2 + \gamma\dot{\phi}_i + \varepsilon\dot{\phi}_i\dot{\psi}_i;\quad Y_{01} = \alpha_1\dot{\phi}_i^2 + \beta_1\dot{\psi}_i^2 + \gamma_1\dot{\phi}_i + \varepsilon_1\dot{\phi}_i\dot{\psi}_i, \qquad (15)$$

где $\alpha = \dfrac{mBC}{DA-C^2}\left[l_C\sin\left(\phi_i+\psi_i\right)-l\sin\phi_i\right]-\dfrac{mBA}{DA-C^2}l_C\sin\left(\phi_i+\psi_i\right)+\left[l_C\cos\left(\phi_i+\psi_i\right)-l\cos\phi_i\right];$

$$\beta = \frac{mBC}{DA-C^2}\left[l_C\sin\left(\phi_i+\psi_i\right)+l_C\cos\left(\phi_i+\psi_i\right)\right]-\frac{mB^2}{DA-C^2}\left[l_C\sin\left(\phi_i+\psi_i\right)-l\sin\phi_i\right];$$

$$\gamma = \frac{2mBC}{DA-C^2}l_C\sin(\varphi_i+\psi_i)-\frac{2mB^2}{DA-C^2}\left[l_C\sin(\varphi_i+\psi_i)-l\sin\varphi_i\right];$$

$$\varepsilon = 2l_C\cos(\varphi_i+\psi_i);$$

$$\alpha_1 = \frac{mBC}{DA-C^2}\left[l_C\cos\left(\phi_i+\psi_i\right)-l\cos\phi_i\right]+\frac{mBA}{DA-C^2}l_C\cos\left(\phi_i+\psi_i\right)+\left[l_C\sin\left(\phi_i+\psi_i\right)-l\sin\phi_i\right];$$

$$\beta_1 = l_C\sin(\varphi_i+\psi_i)-\frac{mB^2}{DA-C^2}\left[\left[l_C\cos(\varphi_i+\psi_i)-l\cos\varphi_i\right]-\frac{mB^2}{DA-C^2}l_C\cos(\varphi_i+\psi_i);\right.$$

$$\gamma_1 = \frac{2mBC}{DA-C^2}\left[l_C\cos(\varphi_i+\psi_i)-l\cos\varphi_i\right]-\frac{2mBC}{DA-C^2}l_C\cos(\varphi_i+\psi_i);$$

$$\varepsilon_1 = 2l_C\sin(\varphi_i+\psi_i).$$

Для определения динамических реакций в опоре O рассмотрим звено OO_1 (см. рисунок, *в*). Определим координаты центра инерции:

$$X_{C0} = \frac{l}{2}\cos\phi_i;\quad Y_{C0} = \frac{l}{2}\sin\phi_i.$$

Скорость центра инерции

$$\dot{X}_{C0} = -\frac{l}{2}\sin\phi_i\dot{\phi}_i;\quad \dot{Y}_{C0} = \frac{l}{2}\cos\phi_i\dot{\phi}_i.$$

Определим ускорения центра инерции звена OO_1:

$$\dot{X}_{C0} = -\frac{l}{2}\cos\phi_i\dot{\phi}_i^2 - \frac{l}{2}\sin\phi_i\ddot{\phi}_i; \quad \dot{Y}_{C0} = -\frac{l}{2}\sin\phi_i\dot{\phi}_i^2 + \frac{l}{2}\cos\phi_i\ddot{\phi}_i.$$

Применив теорему о движении центра масс для определения динамических реакций в опоре O, имеем:

$$m\ddot{X}_{C0} = X_0 - X_{01}; \quad m\ddot{Y}_{C0} = Y_0 - Y_{01}, \tag{16}$$

где X_0 и Y_0 – проекции динамической реакции опоры O.

Из уравнений (16) находим:

$$X_0 = m\ddot{X}_{C0} + X_{01}; \quad Y_0 = m\ddot{Y}_{C0} + Y_{01}. \tag{17}$$

Подставляя в (17) выражения ускорений $\ddot{X}_{C0}$ и $\ddot{Y}_{C0}$, а также X_{01} и Y_{01} получим:

$$X_0 = m\left(-\frac{l}{2}\cos\phi_i\dot{\phi}_i^2 - \frac{l}{2}\sin\phi_i\ddot{\phi}_i\right) + \alpha\dot{\phi}_i^2 + \beta\dot{\psi}_i^{\,2} + \gamma\dot{\phi}_i + \varepsilon\dot{\phi}_i\dot{\psi}_i\,;$$

$$Y_0 = m\left(-\frac{l}{2}\sin\phi_i\dot{\phi}_i^2 + \frac{l}{2}\cos\phi_i\ddot{\phi}_i\right) + \alpha_1\dot{\phi}_i^2 + \beta_1\dot{\psi}_i^{\,2} + \gamma_1\dot{\phi}_i + \varepsilon_1\dot{\phi}_i\dot{\psi}_i\,.$$

Используя уравнения (11), запишем:

$$X_0 = m\left[-\frac{l}{2}\cos\phi_i\dot{\phi}_i^2 - \frac{l}{2}\sin\phi_i\,\frac{B}{DA - C^2}\left(C\dot{\phi}_i^2 - B\dot{\psi}_i^{\,2} - 2B\dot{\phi}_i\right)\right] + \alpha\dot{\phi}_i^2 + \beta\dot{\psi}_i^{\,2} + \gamma\dot{\phi}_i + \varepsilon\dot{\phi}_i\dot{\psi}_i\,;$$

$$Y_0 = m\left[\frac{l}{2}\cos\phi_i\,\frac{B}{DA - C^2}\left(C\dot{\phi}_i^2 - B\dot{\psi}_i^{\,2} - 2B\dot{\phi}_i\right) - \frac{l}{2}\sin\phi_i\dot{\phi}_i^2\right] + \alpha_1\dot{\phi}_i^2 + \beta_1\dot{\psi}_i^{\,2} + \gamma_1\dot{\phi}_i + \varepsilon_1\dot{\phi}_i\dot{\psi}_i\,.$$

Полные реакции в точках O_1 и O можно определить по известным формулам:

$$R_{01} = \sqrt{X_{01}^{\;2} + Y_{01}^{\;2}}; \quad R_0 = \sqrt{X_0^{\;2} + Y_0^{\;2}}.$$

Таким образом, применение уравнений Лагранжа 2-го рода и теоремы о движении центра масс механической системы, позволило получить аналитические выражения для динамических реакций в шарнирах РУМ в предударный период.

Литература

1. *Воронкин В.В., Горбачев С.Г.* Методика расчета основных параметров электромеханического дюбелезабивателя // Машиноведение: Сб. научн. трудов. Вып. 3. Бишкек: Илим, 2002. С. 45–55.
2. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Изд-во АН СССР, 1961.