

УДК 517.968.72

**ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА**

Е.А. Комарцова

Устанавливаются достаточные признаки асимптотической устойчивости решений линейного интегро-дифференциального уравнения пятого порядка типа Вольтерра на полусоси. Для этого развивается метод частичного срезывания. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра; асимптотическая устойчивость решений; метод частичного срезывания; лемма Люстерника–Соболева.

**ВОЛЬТЕРРАНЫН БЕШИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ИНТЕГРАЛДЫК-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК
СЫЗЫКТУУ ТЕНДЕМЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАЛЫК
ТУРУКТУУЛУГУНУН ЖЕТИШТҮҮ ШАРТТАРЫ**

Е.А. Комарцова

Бул макалада Вольтерра тибиндеги бешинчи тартиптеги интегралдык-дифференциалдык теңдеменин чыгарылышынын асимптотикалык туруктуулук белгилери белгиленет. Бул үчүн жарым-жартылай кесүү методу өнүктүрүлөт. Иллюстративдик мисал келтирет.

Түйүндүү сөздөр: Вольтерра тибиндеги интегралдык-дифференциалдык теңдеме; чыгарылыштардын асимптотикалык туруктуулугу; жарым-жартылай кесүү методу; Люстерник – Соболевдин леммасы.

**SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE ASYMPTOTIC STABILITY OF THE FIFTH
ORDER LINEAR VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION SOLUTIONS**

Е.А. Komartsova

The sufficient signs for the asymptotic stability on the half-axis of solutions of the linear integro-differential equation of the fifth order like Volterra type are established. For this purpose, a partial cutting method is developed. The illustrative example is given.

Keywords: integro-differential equation of Volterra type; asymptotic stability of solutions; partial cutting method; Lyusternik-Sobolev lemma.

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; ДУ – дифференциальное уравнение; под асимптотической устойчивостью решений линейного ИДУ пятого порядка понимается стремление к нулю при $t \rightarrow \infty$ всех его решений и их производных до четвертого порядка включительно.

ЗАДАЧА. Получить достаточные условия асимптотической устойчивости решений ИДУ пятого порядка типа Вольтерра следующего вида:

$$x^{(5)}(t) + \sum_{k=0}^4 \left[a_k(t)x^{(k)}(t) + \int_{t_0}^t Q_k(t, \tau)x^{(k)}(\tau)d\tau \right] = f(t), \quad t \geq t_0. \quad (1)$$

Отметим, что в [1] такая задача решена развитием метода весовых и срезающих функций [2]. В настоящей работе развивается метод частичного срезаивания [3] в сочетании с другими хорошо известными методами.

Для решения этой задачи аналогично [1] применяется следующая нестандартная замена:

$$x^{(4)}(t) + p_3x'''(t) + p_2x''(t) + p_1x'(t) + p_0x(t) = W(t)y(t), \quad (2)$$

где p_k – некоторые вспомогательные параметры, причем $p_k > 0$ ($k = 0, 1, 2, 3$); $0 < W(t)$ – некоторая весовая функция; $y(t)$ – новая неизвестная функция.

Введем обозначения [1]:

$$b_4(t) \equiv a_4(t) - p_3 + W'(t)(W(t))^{-1} \quad (\text{коэффициент } y(t)),$$

$$b_3(t) \equiv [a_3(t) - p_3a_4(t) + p_3^2 - p_2](W(t))^{-1} \quad (\text{коэффициент } x'''(t)),$$

$$b_2(t) \equiv [a_2(t) - p_2a_4(t) + p_2p_3 - p_1](W(t))^{-1} \quad (\text{коэффициент } x''(t)),$$

$$b_1(t) \equiv [a_1(t) - p_1a_4(t) + p_1p_3 - p_0](W(t))^{-1} \quad (\text{коэффициент } x'(t)),$$

$$b_0(t) \equiv [a_0(t) - p_0a_4(t) + p_0p_3](W(t))^{-1} \quad (\text{коэффициент } x(t)),$$

$$P_0(t, \tau) \equiv (W(t))^{-1} [Q_0(t, \tau) - p_0Q_4(t, \tau)] \quad (\text{ядро с } x(\tau)),$$

$$P_1(t, \tau) \equiv (W(t))^{-1} [Q_1(t, \tau) - p_1Q_4(t, \tau)] \quad (\text{ядро с } x'(\tau)),$$

$$P_2(t, \tau) \equiv (W(t))^{-1} [Q_2(t, \tau) - p_2Q_4(t, \tau)] \quad (\text{ядро с } x''(\tau)),$$

$$P_3(t, \tau) \equiv (W(t))^{-1} [Q_3(t, \tau) - p_3Q_4(t, \tau)] \quad (\text{ядро с } x'''(\tau)),$$

$$K(t, \tau) = (W(t))^{-1} Q_4(t, \tau)W(\tau) \quad (\text{ядро с } y(\tau)),$$

$$F(t) \equiv (W(t))^{-1} f(t) \quad - \text{новый свободный член.}$$

Тогда из ИДУ (1) приходим к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x^{(4)}(t) + p_3x'''(t) + p_2x''(t) + p_1x'(t) + p_0x(t) = W(t)y(t), \\ y'(t) + b_4(t)y(t) + b_3(t)x'''(t) + b_2(t)x''(t) + b_1(t)x'(t) + b_0(t)x(t) + \\ + \int_{t_0}^t [P_0(t, \tau)x(\tau) + P_1(t, \tau)x'(\tau) + P_2(t, \tau)x''(\tau) + P_3(t, \tau)x'''(\tau) + \\ + K(t, \tau)y(\tau)]d\tau = F(t), \quad t \geq t_0. \end{cases} \quad (3)$$

В дальнейшем также поступаем аналогично, как в [1], т. е. проведем отдельно преобразования для первого и второго уравнений системы (3), после чего сложим полученные тождества и проведем дальнейшие преобразования.

Для произвольно фиксированного решения $(x(t), y(t))$ первое уравнение системы (3), т. е. замену (2), возводим в квадрат, интегрируем в пределах от t_0 до t , в том числе по частям, и получаем тождество:

$$\begin{aligned} V(t) \equiv \int_{t_0}^t \left[(x^{(4)}(s))^2 + \sum_{k=0}^3 D_k (x^{(k)}(s))^2 \right] ds + p_0p_1(x(t))^2 + (p_1p_2 - p_0p_3)(x'(t))^2 + \\ + (p_2p_3 - p_1)(x''(t))^2 + p_3(x'''(t))^2 + 2p_0p_2x(t)x'(t) + 2p_0p_3x(t)x''(t) + \\ + 2p_0x(t)x'''(t) + 2(p_1p_3 - p_0)x'(t)x''(t) + 2p_1x'(t)x'''(t) + 2p_2x''(t)x'''(t) \equiv \\ \equiv V(t_0) + \int_{t_0}^t (W(s))^2 (y(s))^2 ds, \end{aligned} \quad (4)$$

где $D_0 = p_0^2$, $D_1 = p_1^2 - 2p_0p_2$, $D_2 = p_2^2 + 2p_0 - 2p_1p_3$, $D_3 = p_3^2 - 2p_2$.

Преобразуем второе уравнение системы (3). Для этого как в [2, с. 42–58; 3] введем следующие предположения и обозначения:

$$K(t, \tau) \equiv \sum_{i=0}^n K_i(t, \tau), \tag{K}$$

$$F(t) \equiv \sum_{i=0}^n F_i(t), \tag{F}$$

$\psi_i(t)$ ($i=1..n$) – некоторые срезывающие функции,

$$P_i(t) \equiv K_i(t, t)(\psi_i(t))^{-2}, \quad T_i(t, \tau) \equiv K_i(t, \tau)(\psi_i(\tau))^{-1}, \quad E_i(t) \equiv F_i(t)(\psi_i(t))^{-1} \\ P_i(t) \equiv A_i(t) + B_i(t) \quad (i=1..n), \tag{P}$$

$c_i(t)$ ($i=1..n$) – некоторые функции, т. е. применяем метод частичного срезывания.

Заметим, что ядра $T_i(t, \tau)$ ($i=1..n$) называются частично срезанными [3].

Для произвольно фиксированного решения $(x(t), y(t))$ второе уравнение системы (3), т. е. ИДУ первого порядка типа Вольтерра, умножаем на $y(t)$, интегрируем в пределах от t_0 до t , в том числе по частям, вводим условия (K), (F), функции $\psi_i(t)$, $P_i(t)$, $T_i(t, \tau)$, $E_i(t)$, используем лемму 1.4, 1.5 [4], вводим условие (P), вводим функции $c_i(t)$ ($i=1..n$). После чего приходим к следующему тождеству:

$$(y(t))^2 + 2 \int_{t_0}^t b_4(s)(y(s))^2 ds + \sum_{i=1}^n \{A_i(t)(Y_i(t, t_0))^2 - \int_{t_0}^t A_i'(s)(Y_i(s, t_0))^2 ds + \\ + B_i(t)(Y_i(t, t_0))^2 - 2E_i(t)Y_i(t, t_0) + c_i(t) - \int_{t_0}^t [B_i'(s)(Y_i(s, t_0))^2 - 2E_i'(s)Y_i(s, t_0) + \\ + c_i'(s)] ds - 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s T_{ir}'(s, \tau) Y_i(\tau, t_0) y(s) d\tau ds\} + \\ + 2 \int_{t_0}^t y(s) \sum_{k=0}^3 \left[b_k(s)x^{(k)}(s) + \int_{t_0}^s P_k(s, \tau)x^{(k)}(\tau) d\tau \right] ds \equiv c_* + 2 \int_{t_0}^t y(s)[F_0(s) - \\ - \int_{t_0}^s K_0(s, \tau)y(\tau) d\tau] ds, \tag{5}$$

где $Y_i(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^t \psi_i(\eta)y(\eta)d\eta$ ($i=1..n$), $c_* = (y(t_0))^2 + \sum_{i=1}^n c_i(t_0)$.

Теперь сложим тождества (4) и (5) и будем иметь следующее окончательное энергетическое тождество:

$$\int_{t_0}^t [(x^{(4)}(s))^2 + \sum_{k=0}^3 D_k(x^{(k)}(s))^2] ds + p_0 p_1 (x(t))^2 + (p_1 p_2 - p_0 p_3)(x'(t))^2 + \\ + (p_2 p_3 - p_1)(x''(t))^2 + p_3 (x'''(t))^2 + 2p_0 p_2 x(t)x'(t) + 2p_0 p_3 x(t)x''(t) + \\ + 2p_0 x(t)x'''(t) + 2(p_1 p_3 - p_0)x'(t)x''(t) + 2p_1 x'(t)x'''(t) + 2p_2 x''(t)x'''(t) + \\ + (y(t))^2 + 2 \int_{t_0}^t b_4(s)(y(s))^2 ds + \sum_{i=1}^n \{A_i(t)(Y_i(t, t_0))^2 - \int_{t_0}^t A_i'(s)(Y_i(s, t_0))^2 ds + \\ + B_i(t)(Y_i(t, t_0))^2 - 2E_i(t)Y_i(t, t_0) + c_i(t) - \int_{t_0}^t [B_i'(s)(Y_i(s, t_0))^2 - 2E_i'(s)Y_i(s, t_0) + \\ + c_i'(s)] ds - 2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s T_{ir}'(s, \tau) Y_i(\tau, t_0) y(s) d\tau ds + 2 \int_{t_0}^t y(s) \sum_{k=0}^3 [b_k(s)x^{(k)}(s) + \int_{t_0}^s P_k(s, \tau)x^{(k)}(\tau) d\tau] ds \equiv \\ \equiv c_{**} + \int_{t_0}^t (W(s))^2 (y(s))^2 ds + 2 \int_{t_0}^t y(s)[F_0(s) - \int_{t_0}^s K_0(s, \tau)y(\tau) d\tau] ds, \tag{6}$$

где $c_{**} \equiv V(t_0) + c_*$.

Переходя от тождества (6) к интегральному неравенству, применяя обобщенный критерий Сильвестра [5], неравенства $2u_1u_2 \leq \varepsilon u_1^2 + \frac{1}{\varepsilon}u_2^2$ ($\varepsilon > 0, \forall u_1, u_2 \in R$) и Коши–Буняковского, лемму 1 [6] и лемму Люстерника–Соболева [7, с. 393–394; 8] (если $x^{(k)}(t) \in L^2(J, R)$ ($k = 0, 1$), $x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$), аналогично теореме из [1] доказывается

ТЕОРЕМА. Пусть 1) $p_k > 0$ ($k = 0, 1, 2, 3$), $W(t) > 0$, выполняются условия (K), (F), (P); 2) $D_k(t) > 0$ ($k = 0, 1, 2, 3$); 3) все главные миноры матрицы A положительны:

$$A = \begin{pmatrix} p_0 p_1 & p_0 p_2 & p_0 p_3 & p_0 \\ p_0 p_2 & p_1 p_2 - p_0 p_3 & p_1 p_3 - p_0 & p_1 \\ p_0 p_3 & p_1 p_3 - p_0 & p_2 p_3 - p_1 & p_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix};$$

4) $b_4(t) \geq 0$; 5) $A_i(t) \geq 0, B_i(t) \geq 0, B'_i(t) \leq 0$, существуют функции $A_i^*(t) \in L^1(J, R_+), c_i(t), R_i^*(t) \in L^1(J, R_+)$ такие, что $A'_i(t) \leq A_i^*(t)A_i(t), (E_i^{(k)}(t))^2 \leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)$ ($i = 1..n; k = 0, 1$);

$$6) (W(t))^2 + (b_k(t))^2 + \left[\int_{t_0}^t (P_k(t, \tau))^2 d\tau \right]^2 + |F_0(t)| + \int_{t_0}^t |K_0(t, \tau)| d\tau + \int_{t_0}^t |T'_{ir}(t, \tau)| (A_i(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\}) \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (3) справедливы следующие утверждения:

$$x^{(k)}(t) \in L^2(J, R) \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4), \tag{7}$$

$$y(t) = O(1). \tag{8}$$

Пусть дополнительно, 7) $W(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. Тогда все решения ИДУ (1) и их производные до четвертого порядка включительно стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, т. е. любое решение ИДУ пятого порядка (1) асимптотически устойчиво.

ПРИМЕР. Для ИДУ пятого порядка

$$\begin{aligned} x^{(5)}(t) + [5 + A(t)]x^{(4)}(t) + \left[11 + 4A(t) - \frac{e^{-t}}{t+1} \right] x'''(t) + [13 + 7A(t) + \sin e^{-2t}] x''(t) + \\ + \left[8 + 6A(t) + \frac{e^{-t}}{t^2+1} \right] x'(t) + \left[2 + 2A(t) + \frac{e^{-t}}{t^3+1} \right] x(t) + \int_0^t \{ [2Q_4(t, \tau) + e^{-2t-\tau}] x(\tau) + \\ + [6Q_4(t, \tau) + \frac{e^{-t}}{(t+\tau+1)^4}] x'(\tau) + [7Q_4(t, \tau) + \frac{e^{-t}}{e^t + e^\tau + 1}] x''(\tau) + \\ + [4Q_4(t, \tau) + \frac{e^{-t-\tau}}{(t+1)^2}] x'''(\tau) + Q_4(t, \tau)x^{(4)}(\tau) \} d\tau = e^{-t+\sqrt{t}} - \frac{e^{-t}}{t^2+1}, t \geq 0, \end{aligned}$$

где $A(t) \equiv \exp\left(t(\sin t)^{\frac{1}{3}}\right), Q_4(t, \tau) \equiv e^{\sqrt{t+\sqrt{\tau-t+\tau}}}(e^{-5t-2\tau} - e^{-7t} + 8)^{\frac{1}{3}} - \frac{e^{-t+\tau}}{(t^2 + \tau^2 + 1)^2}$, справедливы все условия теоремы

при $p_3 = 4, p_2 = 7, p_1 = 6, p_0 = 2, W(t) \equiv e^{-t}$, здесь $t_0 = 0, D_0 = 4, D_1 = 8, D_2 = 5, D_3 = 2$,

матрица $A = \begin{pmatrix} 12 & 14 & 8 & 2 \\ 14 & 34 & 22 & 6 \\ 8 & 22 & 22 & 7 \\ 2 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, ее главные миноры $\Delta_1 = 12, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & 14 \\ 14 & 34 \end{vmatrix} = 212, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 12 & 14 & 8 \\ 14 & 34 & 22 \\ 8 & 22 & 22 \end{vmatrix} = 1206,$

$$\Delta_4 = \det A = 2716.$$

$$b_4(t) \equiv A(t), \quad b_3(t) \equiv -\frac{1}{t+1}, \quad b_2(t) \equiv e^t \sin e^{-2t}, \quad b_1(t) \equiv \frac{1}{t^2+1}, \quad b_0(t) \equiv \frac{1}{t^3+1}, \quad n=1, \quad \psi_1(t) \equiv e^{\sqrt{t}}, \quad P_1(t) = 2,$$

$$T_1(t, \tau) \equiv e^{\sqrt{t}}(e^{-5t-2\tau} - e^{-7t} + 8)^{\frac{1}{3}}, \quad E_1(t) \equiv 1, \quad K_0(t, \tau) \equiv \frac{1}{(t^2 - \tau^2 + 1)^2}, \quad f_0(t) = -\frac{1}{t^2+1}, \quad P_0(t, \tau) \equiv e^{-t-\tau}, \quad P_1(t, \tau) \equiv -\frac{1}{(t+\tau+1)^4},$$

$P_2(t, \tau) \equiv \frac{1}{e^t + e^\tau + 1}$, $P_3(t, \tau) \equiv \frac{e^{-\tau}}{(t+1)^2}$. Поэтому все решения и их производные до четвертого порядка вклю-

чительно стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, т. е. любое решение этого ИДУ асимптотически устойчиво.

Отметим, что при построении приведенного иллюстративного примера использован пример из [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из теоремы при $Q_k(t, \tau) \equiv 0$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$), $f(t) \equiv f_0(t)$ вытекают достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного неоднородного ДУ пятого порядка:

$$x^{(5)}(t) + \sum_{k=0}^4 a_k(t)x^{(k)}(t) = f_0(t), t \geq t_0. \quad (1_0)$$

Насколько нам известно, эти результаты для ДУ (1₀) будут новыми и не содержатся, например в [9, 10].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Подбирая вспомогательные параметры $p_k > 0$ ($k = 0, 1, 2, 3$) весовую функцию $W(t)$, срезывающие функции $\psi_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$), функции $c_i(t)$ ($i = 1..n$), можно получить коэффициентные условия для асимптотической устойчивости решений ИДУ пятого порядка (1).

Таким образом, нами исследована асимптотическая устойчивость решений ИДУ пятого порядка (1) методом, основанным на нестандартном методе сведения к системе (2), на применении метода частичного срезывания, метода интегральных неравенств и леммы Люстерника–Соболева.

В заключение подчеркнем, что в работе [11] рассмотрена задача об устойчивости решений ИДУ пятого порядка [1]. Настоящая статья дополняет результаты работы [11].

Литература

1. Искандаров С. О методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2014. Вып. 46. С. 41–48.
2. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра / С. Искандаров. Бишкек: Илим, 2002. 216 с.
3. Искандаров С. Метод частичного срезывания и ограниченность решений неявного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка / С. Искандаров, Д.Н. Шабданов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2004. Вып. 33. С. 67–71.
4. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук / С. Искандаров. Бишкек, 2003. 34 с.
5. Зубов В.И. Теория уравнений управляемого движения: учеб. пособие / В.И. Зубов. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 288 с.
6. Веды Ю.А. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений / Ю.А. Веды, З. Пахыров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1973. Вып. 9. С. 68–103.
7. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.
8. Искандаров С. Об одном нестандартном методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2012. Вып. 44. С. 44–51.
9. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. М.: Мир, 1964. 477 с.
10. Кигурадзе И.Т. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия. М.: Наука, 1990. 432 с.
11. Комарцова Е.А. Достаточные условия устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка на полуоси / Е.А. Комарцова // Вестник КРСУ. 2018. Т. 18. № 12. С. 8–14.