

УДК 517.977.5 (575.2) (04)

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ПОДВИЖНОМ ТОЧЕЧНОМ УПРАВЛЕНИИ

А.К. Керимбеков, К.Р. Карабакиров

Исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи оптимального управления упругими колебаниями струны в случае, когда точка приложения внешнего воздействия, нелинейно зависящая от функции управления, меняется по заданному закону, т.е. является подвижной.

Ключевые слова: оптимальное управление; упругие колебания; функция управления; нелинейная оптимизация.

1. Обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса. Рассмотрим упругие колебания струны конечной длины, описываемые функцией $V(t, x)$, которая в области $Q = (0, 1) \times (0, T)$ удовлетворяет уравнению [1]

$$V_{tt} = V_{xx} + \delta[x - x_0(t)]f[t, u(t)], \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

а на границе области Q – начальным условиям

$$V(0, x) = \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

и граничным условиям

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; x_0 точка приложения функции внешнего воздействия $f[t, u(t)] \in H(0, T)$, является функцией от времени $t \in [0, T]$ и удовлетворяет ограничению

$$0 \leq x_0(t) \leq 1; \quad (4)$$

функция внешнего воздействия нелинейно зависит от функции управления $u(t) \in H(0, T)$ и удовлетворяет условию монотонности, т.е.

$$\frac{\partial f[t, u]}{\partial u} \equiv f_u[t, u(t)] \neq 0, \quad \forall t \in [0, T]; \quad (5)$$

$\psi_1(x) \in H(0, 1)$, $\psi_2(x) \in H(0, 1)$ – функции начального состояния струны; H – пространство Гильберта; постоянная $\alpha > 0$; T – фиксированный момент времени.

Определение 1. Обобщенным решением краевой задачи (1)–(3) называется любая функция $V(t, x) \in H(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (V_t \Phi)_t dx = \\ & = \int_0^1 [V_t \Phi_t - V_x \Phi_x + \delta(x - x_0(t))f[u(t)]\Phi] dx dt - \\ & - \alpha \int_0^1 \Phi(t, 1)V(t, 1) dt \end{aligned} \quad (6)$$

для любых моментов времени t_1 и t_2 ($0 \leq t_1 < t_2 \leq T$), и для любой функции $\Phi(t, x) \in C^{1,1}[Q]$ и начальным условиям (2) в слабом смысле, т.е. соотношения

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 [V(t, x) - \psi_1(x)]\Phi_0(x) dx = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 [V_t(t, x) - \psi_2(x)]\Phi_1(x) dx = 0,$$

выполняются для любых функций $\Phi_0(x) \in H(0, 1)$, $\Phi_1(x) \in H(0, 1)$.

Решение краевой задачи (1)–(3) ищем в виде

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x), \quad (8)$$

где $V_n(t) = \int_0^1 V(t, x) z_n(x) dx = \langle V(t, x), z_n(x) \rangle$ – коэффициенты Фурье; функция $z_n(x) = \sqrt{\frac{2(\lambda_n^2 + \lambda^2)}{\lambda_n^2 + \lambda^2 + \lambda}} \cos \lambda_n x$,

$n=1, 2, 3, \dots$ – решение краевой задачи

$$z''(x) + \lambda^2 z(x) = 0, \quad z(0) = 0,$$

$$z'(1) + \alpha z(1) = 0$$

и система функций $\{z_n(x)\}$ является ортонормированной в пространстве $H(0, 1)$; λ_n – корни трансцендентного уравнения $\lambda \operatorname{tg} \lambda = \alpha$, удовлетворяющие условиям

$$\lambda_n < \lambda_{n+1} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty,$$

$$(n-1)\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n-1), \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Согласно методике работы [2], полагая в тождестве (6) $\Phi(t, x) \equiv z_n(x)$ относительно коэффициента Фурье $V_n(t)$ получим задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 \langle V, z_n \rangle}{\partial t^2} + \lambda_n^2 \langle V, z_n \rangle = z_n [x_0(t)] f[t, u(t)],$$

$$\langle V, z_n \rangle_{t=t_1} = \langle V(t_1, x), z_n(x) \rangle, \langle V_t, z_n \rangle_{t=t_1} =$$

$$= \langle V_t(t_1, x), z_n(x) \rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

Решение задачи Коши (9) находим по формуле:

$$\langle V(t, x), z_n(x) \rangle = \langle V(t_1, x), z_n(x) \rangle \cos \lambda_n(t - t_1) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n} \langle V_t(t_1, x), z_n(x) \rangle \sin \lambda_n(t - t_1) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n} \int_{t_1}^t \sin \lambda_n(t - \tau) z_n[x_0(\tau)] f[\tau, u(\tau)] d\tau.$$

Отсюда при $t_1 \rightarrow 0$, учитывая соотношения (7), коэффициенты Фурье $V_n(t)$ находим по формуле

$$V_n(t) = \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) z_n[x_0(\tau)] f[\tau, u(\tau)] d\tau,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

где ψ_{1n}, ψ_{2n} – коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$.

Согласно (8) формальное решение краевой задачи (1) – (3) имеет вид:

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} \sin \lambda_n t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) z_n[x_0(\tau)] f[\tau, u(\tau)] d\tau \right] z_n(x). \quad (11)$$

Непосредственным вычислением можно показать, что

$$\int_0^T \int_0^1 V^2(t, x) dx dt = \int_0^T \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x) \right)^2$$

$$dx dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2(t) \leq$$

$$\leq 3T \left[\|\psi_1(x)\|_H^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} \|\psi_2(x)\|_H^2 + 2T \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \|f[t, u(t)]\|_H^2 \right] < \infty \quad (12)$$

где символом $\|\cdot\|_H$ обозначена норма элемента гильбертова пространства H , т.е. $V(t, x) \in H(Q)$.

Аналогичным образом можно показать, что $\int_0^T \int_0^1 V_x^2(t, x) dx dt < \infty$.

II. Задача нелинейной оптимизации и условия оптимальности. Управление $u(t) \in H(0, T)$, для которого краевая задача (1) – (3) имеет единственное обобщенное решение назовем допустимым.

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать интегральный квадратичный функционал

$$J[u] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx +$$

$$+ \beta \int_0^T u^2(t) dt, \quad \beta > 0, \quad (13)$$

на множестве допустимых управлений $H(0, T)$, где $\xi(x) \in H(0, 1)$ – заданная функция.

Управление $u^0(t) \in H(0, T)$, на котором функционал (13) достигает минимального значения, называется оптимальным, а соответствующее ему решение краевой задачи (1) – (3) $V^0(t, x)$ – оптимальным процессом.

Пусть $u^0(t)$ – оптимальное управление. Тогда имеет место неравенство

$$\Delta J[u^0(t)] = J[u^0(t) + \Delta u(t)] - J[u^0(t)] \geq 0,$$

где $u^0(t) + \Delta u(t) \in H(0, T)$ при любом приращении $\Delta u(t) \in H(0, T)$. Согласно методике работы [3], нетрудно показать, что при соответствующем выборе функции $\omega(t, x)$ имеет место соотношение

$$\Delta J[u^0(t)] = - \int_0^T \Delta \Pi[t, \omega(t, x),$$

$$V(t, x), u^0(t)] dt + \int_0^1 V^2(T, x) dx,$$

где $\Delta V(t, x)$ – приращение функции $V(t, x)$, соответствующее приращению $\Delta u(t)$ управления $u(t)$;

$$\Pi[t, \omega(t, x), V(t, x), u(t)] = J[t, u(t)] \omega[t, x_0(t)] - \beta u^2(t)$$

$$\text{и } \Delta \Pi[\cdot, u(t)] = \Pi[\cdot, u(t) + \Delta u(t)] - \Pi[\cdot, u(t)].$$

Функция $\omega(t, x)$ определяется как решение сопряженной краевой задачи

$$\omega_t = \omega_{xx}, \quad (t, x) \in Q,$$

$$\omega(T, x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$\omega_t(T, x) + 2[V(T, x) - \xi(x)] = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$\omega_x(t, 0) = 0, \quad \omega_x(t, 1) + \alpha \omega(t, 1) = 0$$

и является единственным обобщенным решением, имеющим вид:

$$\omega(t, x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \left[h_n - \int_0^T G_n(t) f[\tau, u(\tau)] d\tau \right] z_n(x), \quad (14)$$

$$\text{где } G_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} z_n[\mu_k(t)] \sin \lambda_n(T - t),$$

$$h_n = \xi_n - \psi_{1n} \cos \lambda_n T - \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n T.$$

На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами [3] легко установить, что оптимальное управление должно удовлетворять следующим соотношениям:

$$2\beta u(t)f_u^{-1}[t, u(t)] = \omega[t, x_0(t)], \quad (15)$$

$$f_u[t, u(t)](u(t)f_u^{-1}[t, u(t)])_u > 0, \quad (16)$$

которые называются условиями оптимальности.

III. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления. Согласно (12) и (14) равенство (15) перепишем в виде

$$\beta u(t)f_u^{-1}[t, u(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \int_0^T G_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) h_n, \quad (17)$$

которое представляет собой нелинейное интегральное уравнение относительно оптимального управления $u^0(t)$. С учетом (16) мы получаем новую задачу, т.е. задачу, где требуется найти решение нелинейного интегрального уравнения (17), удовлетворяющее дополнительному условию в виде дифференциального неравенства (16).

Предположим, что эта задача имеет решение. Чтобы найти это решение, согласно методике работы [4] преобразуем уравнение (17). Положим:

$$\beta u(t)f_u^{-1}[t, u(t)] = p(t). \quad (18)$$

В силу условия (16), это равенство однозначно разрешается относительно $u(t)$, т.е. существует единственная функция $\varphi(\cdot)$ такая, что

$$u(t) = \varphi[t, p(t), \beta]. \quad (19)$$

С учетом (18) и (19) уравнение (17) перепишем в виде

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) [h_n - \int_0^T G_n(\tau) f[\tau, \varphi[\tau, p(\tau), \beta]] d\tau] \equiv G[p]. \quad (20)$$

Лемма 1. Оператор $G[\cdot]$ отображает пространство H в себя.

Лемма 2. Пусть функции $f[t, u(t)]$ и $\varphi[t, p(t), \beta]$ удовлетворяют условию Липшица по функциональной переменной, т.е.

$$\|f[t, u(t)] - f[t, \bar{u}(t)]\|_H \leq f_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_H, \quad (21)$$

$$\|\varphi[t, p(t), \beta] - \varphi[t, \bar{p}(t), \beta]\|_H \leq \varphi_0(\beta) \|p(t) - \bar{p}(t)\|_H \quad (22)$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = 2T \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1 \quad (23)$$

оператор $G[\cdot]$ является сжимающим.

Доказательства лемм проводятся непосредственной проверкой и не составляют труда.

Теорема 1. При выполнении условий (5), (21) – (23) операторное уравнение (20) в пространстве $H(0, T)$ имеет единственное решение.

Доказательство следует из лемм 1–2 и из известной теоремы [5] о принципе сжимающих отображений.

Решение операторного уравнения (20) может быть найдено методом последовательных приближений

$p_n(t) = G[p_{n-1}(t)]$, $n=1, 2, 3, \dots$,
причем, имеет место оценка

$$\|p^0(t) - p_n(t)\|_H \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H, \quad (24)$$

где $p_0(t) \in H(0, T)$ – произвольный элемент.

Далее, подставляя найденное $p^0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t)$ в (19), находим оптимальное управление

$$u^0(t) = \varphi[t, p^0(t), \beta]. \quad (25)$$

Подставляя оптимальное управление $u^0(t)$ в (11), находим оптимальный процесс

$$V^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t-\tau) z_n[x_0(\tau)] f[\tau, u^0(\tau)] d\tau \right] z_n(x)$$

и вычислим минимальное значение функционала

$$J[u^0] = \int_0^T [V^0(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T [u^0(t)]^2 dt. \quad (27)$$

Таким образом, найденная тройка $(u^0(t), V^0(t, x), J[u^0])$ определяет решение нелинейной задачи оптимизации.

IV. Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации. На практике построить точное решение интегрального уравнения (20) не всегда удастся. Поэтому в большинстве случаев ограничиваются нахождением приближенного решения $p_k(t)$, удовлетворяющего оценке (24). Подставляя найденное $p_k(t)$, в (25), находим k -е приближение оптимального управления

$$u_k(t) = \varphi[t, p_k(t), \beta],$$

которое удовлетворяет оценке:

$$\|u^0(t) - u_k(t)\|_H \leq \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H \quad (28)$$

По найденному $u_k(t)$, согласно формуле (11), находим k -е приближение оптимального процесса

$$V_k(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t-\tau) z_n[x_0(\tau)] f[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right] z_n(x),$$

которое удовлетворяет оценке:

$$\|V^0(t, x) - V_k(t, x)\|_H \leq T \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0 \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H \quad (29)$$

После определения $u_k(t)$ и $V_k(t, x)$, согласно формуле (13), вычислим k -е приближение минимального значения функционала

$$J[u_k] = \int_0^1 [V_k(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u_k^2(t) dt, \quad \beta > 0,$$

которое удовлетворяет оценке

$$|J[u^0] - J[u_k]| \leq \left[c_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) + \beta c_2 \right]$$

$$\varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H, \quad (30)$$

где c_1 и c_2 положительные постоянные.

Как следует из оценок (28)–(30) приближенное решение $(u_k(t), V_k(t, x), J[u_k])$ задачи нелинейной оптимизации сходится при $k \rightarrow \infty$ к точному решению $(u^0(t), V^0(t, x), J[u^0])$.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
2. Плотников В.И. Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т.32. № 4. С.743–755.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.
4. Керимбеков А. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: Автореф. дис... докт. физ.-мат. наук. Бишкек, 2003. 21 с.
5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.