УДК 517.97

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ ФРЕДГОЛЬМОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ, С ПОДВИЖНЫМ ТОЧЕЧНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

***У.Э. Дуйшеналиева***

Исследована задача оптимального управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда колебания происходят под действием точечного подвижного источника.

*Ключевые слова:* функционал; оптимальное управление; нелинейное интегральное уравнение; принцип сжимающих отображений; оптимальный процесс.

# SOLUTION OF THE NONLINEAR OPTIMIZATION TASK OF ELASTIC OSCILLATIONS DESCRIBED BY FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE MOVABLE POINT CONTROL

***U.E. Duyshenalieva***

It was investigated the problem of optimal control of elastic oscillations, described by integro-differential equations when oscillations occur under the movable point control.

*Keywords:* functional; optimal control; nonlinear integral equation; contraction mapping principle; optimal process.

Постановка нелинейной задачи оптимального управления. Рассмотрим задачу минимизации обобщенного квадратичного функционала

$$I[u]=\int_0^1\left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T p^2\left[t,u(t)\right]dt,\quad \beta>0. \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи

$$v_{tt}=v_{xx}+\lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau+\delta\left(x-x_0(t)\right)f\left[t,u(t)\right],\qquad (t,x)\in Q \tag{2}$$

$$v(0,x)=\psi_1(x),\quad v_t(0,x)=\psi_2(x),\quad 0<x<1, \tag{3}$$

$$v_x(t,0)=0,\quad v_x(t,1)+\alpha v(t,1)=0,\quad 0<t\le T, \tag{4}$$

где $K(t,\tau)$ – заданная функция, которая определена в области $D=\{0\le t\le 1, 0\le\tau\le 1\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)d\tau dt=K_0<\infty, \tag{5}$$

т. е. $K(t,\tau)\in H(D)$; $\xi(x)\in H(0,1)$, $\psi(x)\in H(0,1)$ – заданные функции; $f[t,u(t)]\in H(0,T)$ – заданная функция внешнего источника, которая нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(0,T)$ и удовлетворяет условию

$$f_u[t,u(t)]\ne 0,\quad \forall t\in(0,T); \tag{6}$$

$\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; $x_0(t)$ – заданная функция, которая описывает закон движения точки приложения внешней силы и принимает значения от 0 до 1; λ – параметр; $T$ – фиксированный момент времени, постоянная $\alpha>0$; $H(Y)$ – гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве $Y$.

Эта работа является продолжением статьи [1]. Поэтому здесь сохранены те же обозначения.

В [1] было установлено, что оптимальное управление определяется из соотношения

$$2\beta\frac{p\left[t,u(t)\right]\cdot p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]}=\omega\left(t,x_0(t)\right).$$

Подставляя сюда выражение для $\omega(t,x_0(t))$ из работы [1], имеем равенство

$$\beta\frac{p\left[t,u(t)\right]p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]}=\sum_{n=1}^{\infty}G_n\left(T,t,\lambda\right)\left[h_n-\int_0^T E_n\left(T,\tau,\lambda\right)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right],\tag{7}$$

которое является нелинейным интегральным уравнением относительно оптимального управления $u(t)$.

Однозначную разрешимость уравнения (7) исследуем согласно методике, разработанной проф. А. Керимбековым [2]. Положим:

$$\beta\frac{p\left[t,u(t)\right]p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]}=q(t).\tag{8}$$

Это равенство, в силу условия [1]

$$f_u\left[t,u(t)\right]\left(\frac{p\left[t,u(t)\right]p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]}\right)_u>0$$

однозначно разрешается относительно $u(t)$ (см. теорему о неявно заданной функции [3]), т. е. существует функция $\varphi$, такая, что

$$u(t)=\varphi[t,q(t),\beta].\tag{9}$$

Уравнение (7) с учетом (8), (9) перепишем в виде

$$q(t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n\left(T,t,\lambda\right)\left[h_n-\int_0^T E_n\left(T,\tau,\lambda\right)f\left[\tau,\varphi\left(\tau,q(\tau),\beta\right)\right]d\tau\right]\tag{10}$$

или в операторной форме

$$q=G[q(t)]=h-G_0[q],\tag{11}$$

где

$$h=h(t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n\left(T,t,\lambda\right)h_n,\tag{12}$$

$$G_0[q]=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,\tau,\lambda)\int_0^T E_n\left(T,\tau,\lambda\right)f\left[\tau,\varphi\left(\tau,q(\tau),\beta\right)\right]d\tau\tag{13}$$

*Лемма 1*. Пусть для функций $f(t,u(t))$ и $p(t,u(t))$ выполнено условие

$$\mu_0=\sup_{t\in(0,T)}\left(\frac{p_u\left(t,u(t)\right)}{f_u\left(t,u(t)\right)}\right).$$

Тогда функция $q(t)$ является элементом гильбертова пространства $H(0,T)$, т. е. $q(t)\in H(0,T)$.

*Доказательство*. Утверждение леммы следует из неравенства

$$\int_0^T q^2(t)dt=\beta^2\int_0^T\left(\frac{p[t,u(t)]p_u[t,u(t)]}{f_u[t,u(t)]}\right)^2dt=$$

$$=\beta^2\int_0^T\frac{1}{f_u^2[t,u(t)]}p_u^2[t,u(t)]p^2[t,u(t)]dt=\beta\mu_0^2\int_0^T p^2\left[t,u[t]\right]dt<\beta\mu_0^2\left\|p[t,u(t)]\right\|_{H(0,T)}^2<\infty.$$

*Лемма 2*. Функция $h(t)$ является элементом гильбертова пространства $H(0,T)$, т. е. $h(t)\in H(0,T)$.

*Доказательство*. Утверждение леммы следует из неравенства:

$$\int_0^T h^2(t)dt=\int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty}G_n\left(T,t,\lambda\right)h_n\right)^2dt\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}G_n^2\left(T,t,\lambda\right)\sum_{n=1}^{\infty}h_n^2dt\le$$

$$\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z_n(x_0)}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n(T-t)+\lambda\int_0^T p_n(s,t,\lambda)\sin\lambda_n(T-s)ds\right]\right)^2\times\sum_{n=1}^{\infty}\left(\xi_n-\psi_{1n}\left[\cos\lambda_nT+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\cos\lambda_nsds\right]-\right.$$

$$-\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n T+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n sds\right]\Bigg)^2 dt\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\lambda_n^2}\cdot 2\left[1+\lambda^2\int_0^T p_n^2(s,t,\lambda)ds\cdot\int_0^T\sin^2\lambda_n(T-s)ds\right]\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\xi_n^2+2\psi_{1n}^2\left[1+\lambda^2\int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds\cdot\int_0^T\cos^2\lambda_n sds\right]+2\frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2}\left[1+\lambda^2\int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds\cdot\int_0^T\sin^2\lambda_n sds\right]\right)dt\le$$

$$\le T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\lambda_n^2}\left[1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]\cdot\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\xi_n^2+2\psi_n^2\left[1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]+2\frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2}\left[1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]\right)\le$$

$$\le 12T\left[1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_1-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\left\{\|\xi(x)\|_{H(0,1)}^2+2\left[1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_1-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]\times\left(\|\psi_1(x)\|_{H(0,1)}^2+\frac{1}{\lambda_1^2}\|\psi_2(x)\|_{H(0,1)}^2\right)\right\},$$

которое установлено непосредственным вычислением.

*Лемма 3*. Оператор $G_0[q]$ переводит пространство $H(0,T)$ в себя.

*Доказательство*. Непосредственным вычислением имеем соотношение

$$\int_0^T G_0^2[q(t)]dt=\int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)\int_0^T E_n(T,\tau,\lambda)f\left(\tau,\varphi[\tau,q(\tau),\beta]\right)d\tau\right)^2dt\le$$

$$\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}G_n^2(T,t,\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T E_n^2(T,\tau,\lambda)d\tau\cdot\int_0^T f^2\left(\tau,\varphi[\tau,q(\tau),\beta]\right)d\tau dt\le$$

$$\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\lambda_n^2}\left[1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\frac{z_n^2(x_0(\tau))}{\lambda_n^2}\varepsilon_n^2(T,\tau,\lambda)d\tau\times\left\|f\left(\tau,\varphi[\tau,q(\tau),\beta]\right)\right\|_{H(0,T)}^2dt\le$$

$$\le 4T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\left[1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]\times\left\|f\left(\tau,\varphi[\tau,q(\tau),\beta]\right)\right\|_{H(0,T)}^2dt\le 4T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\left[1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\lambda_n^2}\left[\sin\lambda_n(T-\tau)+\lambda\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\tau)ds\right]^2d\tau\|f[t,u(t)]\|_{H(0,T)}^2\le$$

$$\le 8T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\left[1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\lambda_n^2}\left[1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]\|f[t,u(t)]\|_{H(0,T)}^2\le$$

$$\le 16T\left[1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_1-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)^2\|f[t,u(t)]\|_{H(0,T)}^2<\infty$$

из которого следует утвеждение леммы.

*Лемма 4*. Пусть выполнены условия

$$\left\|f[t,u(t)]-f[t,\bar{u}(t)]\right\|_{H(0,T)}\le f_0\left\|u(t)-\bar{u}(t)\right\|_{H(0,T)},\qquad f_0>0$$

$$\left\|\varphi[\tau,q(t),\beta]-\varphi[\tau,\bar{q}(t),\beta]\right\|_{H(0,T)}\le\varphi_0(\beta)\left\|[q(t)-\bar{q}(t)]\right\|_{H(0,T)},\quad \varphi_0(\beta)>0\cdot$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = 4\sqrt{T}\left[1+\frac{\lambda^2 K_0 T^2}{\left(\lambda_1-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)f_0\varphi_0(\beta)<1$$

оператор $G[q]$ является сжимающим.

*Доказательство.* Поскольку

$$\left\|G[q]-G[\bar{q}]\right\|_{H(0,T)}=\left\|h-G_0[q]-h+G_0[\bar{q}]\right\|_{H(0,T)}=\left\|G_0[q]-G_0[\bar{q}]\right\|_{H(0,T)},$$

то утверждение леммы следует из неравенства

$$\left\|G_0[q]-G_0[\bar{q}]\right\|_{H(0,T)}\le\left\{4\sqrt{T}\left[1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_1-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)f_0\varphi_0(\beta)\right\}\left\|q(t)-\bar{q}(t)\right\|_{H(0,T)},$$

которое доказывается непосредственными вычислениями (см. доказательство леммы 3).

ТЕОРЕМА. При выполнении условий Лемм 1–4 операторное уравнение (11) имеет единственное решение в гильбертовом пространстве квадратично суммируемых функций $H(0,T)$.

*Доказательство*. При выполнении условий лемм 1–4 имеет место принцип сжимающих отображений, т. е. оператор $G[\cdot]$ переводит полное метрическое пространство $H(0,T)$ в себя, и является сжимающим. Поэтому оператор $G[\cdot]$, согласно известной теореме [3] о принципе сжимающих отображений, имеет единственную неподвижную точку, которая является решением операторного уравнения (11).

Решение операторного уравнения (11) строится методом последовательных приближений по следующей схеме:

$$q_n=G[q_{n-1}]=h-G_0[q_{n-1}]\quad n=1,2,3,\ldots,$$

и точное решение определяется по формуле

$$q^0(t)=\lim_{n\to\infty}q_n(t).$$

Имеет место оценка

$$\left\|q^0(t)-q_n(t)\right\|_{H(0,T)}=\left\|G\left[q^0(t)\right]-G[q_n(t)]\right\|_{H(0,T)}=\left\|h-G_0\left[q^0(t)\right]-h+G_0[q_n(t)]\right\|=$$

$$=\left\|G_0\left[q^0(t)\right]-G_0[q_n(t)]\right\|_{H(0,T)}\le\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|G[q_0(t)]-q_0(t)\right\|_{H(0,T)}=\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|h-G_0[q_0(t)]-q_0(t)\right\|_{H(0,T)},$$

которая позволяет определить номер приближения, обеспечивающего заданную точность σ, т. е. номер приближения может быть определен из неравенства

$$\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|h-G_0[q_0]-q_0\right\|_{H(0,T)}\le\sigma.$$

Заметим, что в силу произвольности функции $q_0(t)$ можно положить $q_0(t)=h(t)$. Тогда имеет место оценка

$$\left\|q^0(t)-q_n(t)\right\|_{H(0,T)}\le\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|G_0\left[h(t)\right]\right\|_{H(0,T)},\tag{14}$$

которая чаще применяется на практике.

Подставляя найденное решение $q^0(t)$ в (9), находим оптимальное управление

$$u^0(t)=\varphi\left[t,q^0(t),\beta\right],\tag{15}$$

которое является решением нелинейного интегрального уравнения (7).

Построение решения нелинейной задачи оптимизации. После определения оптимального управления, соответствующее оптимальному управлению $u^0(t)$, решение краевой задачи находим по формуле (см. [1])

$$v^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds+a_n^0(t)\right)z_n(x),\tag{16}$$

где

$$a_n^0(t)=\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n(t-\tau)z_n(x_0(\tau))f\left[\tau,u^0(\tau)\right]d\tau.$$

Это решение называется *оптимальным процессом.*

Зная оптимальное управление и оптимальный процесс, минимальное значение функционала (1) вычислим по формуле

$$I\left[u^0(t)\right]=\int_0^1\left[v^0(T,x)-\xi(x)\right]^2+\beta\int_0^T p^2\left[t,u^0(t)\right]dt.$$

Найденная тройка $\left(u^0(t),v^0(t,x),I\left(u^0\right)\right)$ определяет полное решение задачи нелинейной оптимизации (1)–(6).

***Литература***


1. *Керимбеков А.* Задача подвижного точечного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями / А. Керимбеков, У. Дуйшеналиева // Вестник КРСУ. 2016. Том 16. № 5.
2. *Керимбеков А.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: автореф. дис.… д-ра физ.-мат. наук / А. Керимбеков. Бишкек, 2003. 21 с.
3. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Люстерник Л.А., Соболев В.И. М.: Наука, 1965. 520 с.