КАНЕТОВ Б.Э., КУБАНЫЧБЕК КЫЗЫ К.
КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Ж. БАЛАСАГЫНА
УДК - 515.12

О СЕКВЕНЦИАЛЬНОЙ ПОЛНОТЕ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В настоящей статье исследуются важные свойства секвенциально полных равномерно непрерывных отображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. [2] Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется секвенциально полным, если всякий фильтр Коши F, имеющий счетную базу B, для которого fF сходится в (Y,V), сходится в (X,U).

Напомним [1], что равномерное пространство (X,U) называется секвенциально полным, если всякий фильтр Коши F, имеющий счетную базу B сходится.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Всякое полное отображение является секвенциально полным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - полное равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) и F фильтр Коши, имеющий счетную базу B, для которого fF сходится в (Y,V). Тогда в силу полноты отображения f сходится фильтр Коши F в (X,U).

Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется метризуемым, если оно имеет счетную базу.

ТЕОРЕМА 1. Всякое секвенциально полное метризуемое равномерно непрерывное отображение является полным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - секвенциально полное равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V). Покажем, что оно является полным отображением. Пусть F такой фильтр Коши пространства (X,U), что fF сходится в (Y,V). Тогда $\alpha\cap F\neq\varnothing$ для любого $\alpha\in U$. Так как отображение f является метризуемым, то оно имеет счетную базу B_f, т.е. для любого $\alpha\in U$ существует такое равномерное покрытие $\beta\in V$ и номер $n\in N$, что $f^{-1}\beta\wedge\gamma_n\succ\alpha$. Следовательно, F тоже имеет счетную базу $B=\{B_n\}_{n\in N}$. Так как равномерное пространство (X,U) секвенциально полно, то F сходится к некоторой точке $x\in X$. Итак, равномерное пространство (X,U) полно. Следовательно, f полное отображение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение секвенциально полного равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V), то отображение f секвенциально полно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение секвенциально полного равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V). Пусть F фильтр Коши, имеющий счетную базу B, для которого fF сходится в (Y,V). Так как равномерное пространство (X,U) полно, то он сходится к некоторой точке в (X,U). Итак, отображение f является секвенциально полным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если отображение f равномерного пространства (X,U) в одноточечное равномерное пространство $Y=\{y\}$ секвенциально полно, то равномерное пространство (X,U) является секвенциально полным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f - секвенциально полное отображение равномерного пространства (X,U) в одноточечное равномерное пространство $Y=\{y\}$ и F фильтр Коши, имеющий счетную базу B. Тогда fB является базой некоторого фильтра Коши в (Y,V). Последний сходится к некоторой точке в (Y,V). Тогда в силу секвенциальной полноты отображения сходится и фильтр Коши F. Следовательно, равномерное пространство (X,U) является секвенциально полным.

ТЕОРЕМА 2. Если равномерно непрерывное отображение f и равномерное пространство (Y,V) являются секвенциально полными, то равномерное пространство (X,U) также является секвенциально полным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - секвенциально полное равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) на секвенциально полное равномерное пространство (Y,V). Пусть F - произвольный фильтр Коши в (X,U), имеющий счетную базу B. Тогда fB является счетной базой фильтра Коши fF в (Y,V). Так как равномерное пространство (Y,V) по условию является секвенциально полным, то фильтр Коши fF сходится к некоторой точке в (Y,V). Следовательно, в силу секвенциальной полноты отображения сходится и фильтр Коши F. Значит, равномерное пространство (X,U) является секвенциально полным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. [2] Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V). Равномерно непрерывное отображение $\hat{f}_\mu:(\hat{X}_\mu,\hat{U}_\mu)\to(Y,V)$ равномерного пространства $(\hat{X}_\mu,\hat{U}_\mu)$ в равномерное пространство (Y,V) называется секвенциальным пополнением отображения f, если выполняются следующие условия:

1) Равномерное пространство (X,U) - всюду плотное равномерное подпространство равномерного пространства $(\hat{X}_{\aleph_0},\hat{U}_{\aleph_0})$.

2) $f=\hat{f}_{\aleph_0}|_X$.

3) Отображение $\hat{f}_{\aleph_0}$ является секвенциально полным.

ТЕОРЕМА 3. Всякое равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) имеет единственное, с точностью до равномерного изоморфизма, секвенциальное пополнение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\tilde{X}_{\aleph_0},\tilde{U}_{\aleph_0})$ и $(\tilde{Y}_{\aleph_0},\tilde{V}_{\aleph_0})$ - секвенциальные пополнения равномерных пространств (X,U) и (Y,V). Пусть $\tilde{f}_{\aleph_0}:(\tilde{X}_{\aleph_0},\tilde{U}_{\aleph_0})\to(Y,V)$ - единственное равномерно непрерывное продолжение отображения f. Положим $\hat{X}_{\aleph_0}=\tilde{f}^{-1}Y$ и $\hat{f}_{\aleph_0}=\tilde{f}_{\aleph_0}|_{\hat{X}_{\aleph_0}}$. Тогда $X\subset\hat{X}_{\aleph_0}$ и $\hat{f}_{\aleph_0}|_X=f$. Пусть $\hat{U}_{\aleph_0}$ - равномерность, индуцированная равномерностью $\tilde{U}_{\aleph_0}$. Тогда отображение $\hat{f}_{\aleph_0}:(\hat{X}_{\aleph_0},\hat{U}_{\aleph_0})\to(Y,V)$ равномерно непрерывно. Равномерное пространство $(\tilde{X}_{\aleph_0},\tilde{U}_{\aleph_0})$ является секвенциальным пополнением равномерного пространства $(\hat{X}_{\aleph_0},\hat{U}_{\aleph_0})$ и $\hat{f}_{\aleph_0}$ - единственное равномерно непрерывное продолжение отображения f, так как $\tilde{f}_{\aleph_0}$ единственно. Заметим, что

$\tilde{f}_{\aleph_0}(\tilde{X}_{\aleph_0} \setminus X) \subset \tilde{Y}_{\aleph_0} \setminus Y$. Легко видеть, что отображение $\tilde{f}_{\aleph_0}$ является секвенциально полным.

ТЕОРЕМА 4. Для равномерно непрерывного отображения $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) следующие условия равносильны:

1) отображение f является τ-ограниченным;
2) секвенциальное пополнение $\tilde{f}_{\aleph_0}$ отображения f является τ-ограниченным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1)\Rightarrow 2)$. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - τ-ограниченное отображение, а $\tilde{f}_{\aleph_0}:(\tilde{X}_{\aleph_0},\tilde{U}_{\aleph_0})\to(Y,V)$ - секвенциальное пополнение отображения f. Пусть $\tilde{\alpha}\in\tilde{U}_{\aleph_0}$ - произвольное равномерное покрытие. Тогда найдется такое равномерное покрытие $\tilde{\beta}\in\tilde{U}_{\aleph_0}$ сильно звездно вписанное в покрытие $\tilde{\alpha}$. Положим $\beta=\tilde{\beta}\wedge\{X\}$. Так как отображение f является τ-ограниченным, то найдутся такие равномерное покрытие $\lambda\in V$ и равномерное покрытие $\gamma\in U$ мощности $\le\tau$, что $f^{-1}\lambda\wedge\gamma\succ\beta$. Существует равномерное покрытие $\tilde{\gamma}\in\tilde{U}_{\aleph_0}$ мощности $\le\tau$ такое, что $\gamma=\tilde{\gamma}\wedge\{X\}$. Легко видеть, что $\tilde{f}_{\aleph_0}^{-1}\lambda\wedge\tilde{\gamma}\succ\tilde{\alpha}$. Следовательно, отображение $\tilde{f}_{\aleph_0}$ является τ-ограниченным.

$2)\Rightarrow 1)$ следует из того факта, что ограничение τ-ограниченного отображения на подпространство является τ-ограниченным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ секвенциально полное отображение равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) и (M,U_M) - замкнутое подпространство пространства (X,U). Тогда ограничение $f|_M:(M,U_M)\to(Y,V)$ также является секвенциально полным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение f секвенциально полно и (M,U_M) - замкнутое подпространство пространства (X,U). Пусть F_M такой фильтр Коши пространства (M,U_M), который имеет счетную базу. Тогда существует такой фильтр Коши F пространства (X,U), имеющий счетную базу, что $F_M=F\wedge\{M\}$. Образ fF фильтра Коши F сходится в (Y,V) в силу секвенциальной полноты отображения f. Тогда сходится и фильтр Коши $f|_M F_M$ в (Y,V). Отсюда следует сходимость фильтра Коши F_M в (X,U). Так как (M,U_M) замкнутое подпространство, то предел фильтра Коши F_M принадлежит в (M,U_M). Следовательно, отображение $f|_M$ является секвенциально полным.

Равномерное пространство $(\tilde{X}_{\aleph_0},\tilde{U}_{\aleph_0})$ называется секвенциальным пополнением равномерного пространства (X,U), если: 1) $X\subset\tilde{X}_{\aleph_0}$; 2) (X,τ_U) всюду плотно в $(\tilde{X}_{\aleph_0},\tau_{\tilde{U}_{\aleph_0}})$; 3) $(\tilde{X}_{\aleph_0},\tilde{U}_{\aleph_0})$ - секвенциально полное равномерное пространство.

Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) называется локально секвенциально полным [2] в точке $x\in X$, если существуют открытое множество O и замкнутое подпространство (M,U_M) равномерного пространства (X,U) такие, что $x\in O\subset M$ и сужение $f|_M$ секвенциально полно.

Множество всех точек (X,U) локальной секвенциальной полноты отображения f обозначается через $D_{\aleph_0}(f)$. Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ называется локально секвенциально полным, если $D_{\aleph_0}(f)=X$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если равномерное пространство (X,U) локально секвенциально полно, то равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ является локально секвенциально полным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть равномерное пространство (X,U) локально секвенциально полно, $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение и x - произвольная точка равномерного пространства (X,U). Пусть B - открытое подмножество и (M,U_M) - замкнутое подпространство пространства (X,U) такие, что $x\in B\subset M$. Тогда легко видеть, что ограничение $f|_M$ отображения f является локально секвенциально полным отображением.

ТЕОРЕМА 5. Равномерно непрерывное отображение f является локально секвенциально полным отображением тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U) является открытым подпространством равномерного пространства $(\tilde{X}_{\aleph_0},\tilde{U}_{\aleph_0})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть f - локально секвенциально полное отображение и $\tilde{f}_{\aleph_0}$ - его секвенциальное пополнение. Пусть $x\in X$ - произвольная точка. Тогда существуют такие открытое подмножество B и замкнутое подпространство (M,U_M), что $x\in B\subset M$ и $f|_M$ секвенциально полно. Заметим, что M замкнуто в равномерном пространстве $(\tilde{X}_{\aleph_0},\tilde{U}_{\aleph_0})$. Отсюда следует, что $[B]_{\tilde{X}_{\aleph_0}}\subset[M]_{\tilde{X}_{\aleph_0}}=M\subset X$. Пусть $\tilde{B}_{\aleph_0}=\tilde{X}_{\aleph_0}\setminus[X\setminus B]_{\tilde{X}_{\aleph_0}}$. Тогда $\tilde{X}_{\aleph_0}\setminus X\subset[\tilde{X}_{\aleph_0}\setminus B]_{\tilde{X}_{\aleph_0}}$ и $\tilde{O}\setminus[O]_{\tilde{X}_{\aleph_0}}=\varnothing$. Следовательно, $\tilde{O}=O$. Итак, (X,U) является открытым в $(\tilde{X}_{\aleph_0},\tilde{U}_{\aleph_0})$.

Достаточность. Пусть выполнено условие теоремы и $x\in X$ - произвольная точка. Тогда существует такая открытая окрестность O точки $x\in X$, что $[O]_{\tilde{X}_{\aleph_0}}\subset X$. Легко видеть, что сужение отображения f на $[O]_{\tilde{X}_{\aleph_0}}$ секвенциально полно.

Литература:

1. Борубаев А.А. Равномерная топология. Бишкек: Илим, 2013. – 337 с.
2. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. Бишкек: Изд. дизайн эстет центр, 2013. – 160 с.