

**ИЗГИБ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ВИНКЛЕРОВСКОМ
УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ УСИЛИЙ И
НЕПОЛНОГО КОНТАКТА С ОСНОВАНИЕМ**

**BENDING INFINITE PLATE ON WINKLER ELASTIC FOUNDATION WITH THE
INFLUENCE OF AXIAL FORCE AND INCOMPLETE CONTACT WITH THE
GROUND**

Макалада плитанын орто тегиздигине коюлган узунунан кеткен күчтөрдүн таасири бир мезгилде эске алынган, түп негизи менен толук эмес байланышта болгон серпилгич түп негизге жайгашкан чексиз плитанын ийилүү маселеси каралган, коюлган маселенин аналитикалык так чечими чыгарылган. Маселени чыгаруу Фурьенин интегралдык кайра өзгөртүүсүн колдонуп, жалпыланган чечимдер ыкмасы менен аныкталган.

Ачкыч сөздөр: контакт, негиз, күч, ийилүү, чексиз плита.

В статье рассматривается задача изгиба бесконечной плиты на упругом основании при одновременном учете влияния продольных усилий, приложенных в срединной плоскости плиты и неполного контакта с основанием, получено точное аналитическое решение поставленной задачи. Решение получено методом обобщенных решений с использованием интегральных преобразований Фурье.

Ключевые слова: изгиб, бесконечная плита, усилие, контакт, основание

The article discusses the problem of bending of infinite plate on an elastic foundation while taking into account the influence of longitudinal forces applied to the median plane of the plate and incomplete contact with the ground an exact analytical solution of the problem. The solution obtained by the method of generalized solutions using the Fourier integral.

Keywords: bend, infinite plate, reinforcement, contact, foundation

Введение. При проектировании различных фундаментов на грунтах в виде лессовых отложений следует учитывать, что под фундаментом при замачивании просадочных грунтов может образоваться провал. Следовательно на этих участках происходит неполный контакт фундамента с грунтом. Подобный провал может произойти в известняках при больших откачках из них воды. С этими проблемами проектировщики сталкиваются и при проектировании в условиях вечной мерзлоты при прохождении под фундаментами зданий и сооружений всевозможных инженерных сооружений и инженерных коммуникаций в виде метро и различных тоннелей и дюкеров. Расположение их и действующей на фундаменты нагрузки может быть в различных местах под фундаментом: в центре, вблизи края или угла и тогда их расчетная схема может быть рассматриваться соответственно как бесконечная, полубесконечная и четвертьбесконечная плита на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием.

Цель исследования. Кроме вышеперечисленных проблем существует также проблема учета влияния продольных усилий – сжимающих или растягивающих, приложенных в срединной плоскости, которые могут быть вызваны предварительным натяжением арматуры плиты или температурным воздействием. Эти задачи в отдельности были разработаны в работах [1,2,3].

Одновременный учет вышеперечисленных факторов рассматривается впервые и представляет большой научный интерес, так как учитывает реальные условия работы фундаментов зданий и сооружений.

Метод исследования. Для получения аналитического решения использован метод обобщенных решений с применением интегральных преобразований Фурье. Рассмотрим задачу изгиба бесконечной плиты, лежащей на Винклеровском упругом основании при действии кроме внешней поперечной нагрузки, продольных усилий – сжимающих и растягивающих, приложенных в срединной плоскости и учета неполного контакта плиты с основанием (Рис. 1.). В этом случае прогибы плиты $\omega(x, y)$ определяются из решения дифференциального уравнения вида:

$$D\nabla\nabla\omega(x, y) + \kappa\theta(x-a)\omega(x, y) - N_x \frac{d^2\omega(x, y)}{dx^2} - N_y \frac{d^2\omega(x, y)}{dy^2} - 2N_{xy} \frac{d^2\omega(x, y)}{dxdy} = q_0(x, y) \quad (1)$$

Здесь D – цилиндрическая жесткость плиты;

K – коэффициент постели основания;

$\theta(a)$ – функция Хевисайда, введение которой позволяет учесть отсутствие основания под частью плиты;

$2a$ – ширина траншеи (неполного контакта с основанием) в основании;

$$\nabla \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \text{оператор Лапласа};$$

N_x, N_y – интенсивность растягивающих (сжимающих) усилий вдоль осей x и y , считаются положительными в случае растяжения;

N_{xy} – интенсивность касательных усилий в срединной плоскости.

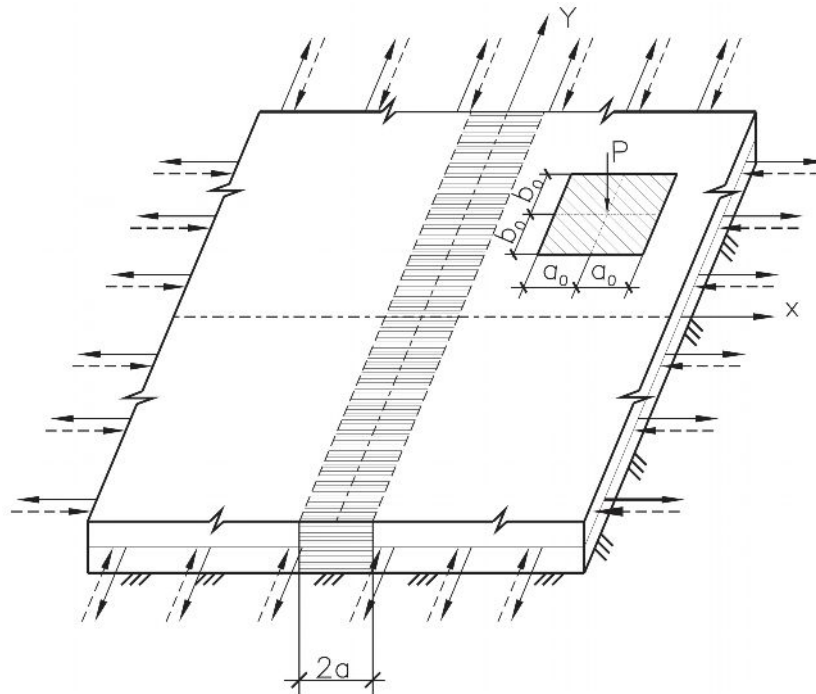


Рис. 1. Изгиб бесконечной плиты

В дальнейшем в связи с малой интенсивностью касательных усилий, приложенных в срединной плоскости, не снижая общности задачи, положим $N_{xy}=0$.

Перейдя к безразмерным координатам $x_l = xl^{-1}$; $y_l = yl^{-1}$; $a_l = al^{-1}$; $q_l(x, y) = q(x, y)k^{-1}$; $l = \frac{D^{1/4}}{K^{1/4}}$, получим, опуская индекс 1, следующее уравнение относительно прогиба плиты:

$$\left[\nabla \nabla + \theta(x-a) - 2\alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \omega(x, y) = q_0(x, y) \quad (2)$$

где

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \nabla^2 = \xi^2 + \eta^2;$$

$$2\alpha_1 = \frac{N_x l^2}{D}; \quad 2\alpha_2 = \frac{N_y l^2}{D};$$

$\omega(x, y)$ – функция прогиба;

$q(x, y)$ – заданная нагрузка.

Положим для определенности, что нагрузка симметрична относительно обеих осей.

Применив к выражению (2) обратное двумерное cos-преобразование Фурье, получим [4,5]:

$$\omega(x, y) - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \times \frac{2}{\pi} \int_0^a \omega(t, \eta) \cos \xi t \cdot \cos \eta y \cdot dt \cdot d\xi \cdot d\eta = \omega_\infty(x, y) \quad (3)$$

где $\omega_\infty(x, y)$ – представляет с собой функцию прогибов в бесконечной плите на упругом основании при полном контакте с основанием:

$$\omega_\infty(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{q_0(\xi, \eta) \cos \xi x \cdot \cos \eta y \cdot d\xi d\eta}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \quad (4)$$

Рассмотрим двойной интеграл в выражении (9)

$$\frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \int_0^a \omega(t, \eta) \cos \xi t \cdot dt \cdot d\xi \cdot d\eta - \int_0^a \omega(t, \eta) \cdot K(x, y, t) dt;$$

где

$$K(x, y, t) dt = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos \xi x \cdot \cos \eta y \cdot \cos \xi t}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} d\xi dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K(x, \eta, t) \cos \eta y d\eta \quad (5)$$

где $K(x, \eta, t)$ – преобразованное ядро по координате y имеет вид:

$$K(x, \eta, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \xi x \cdot \cos \xi t}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} d\xi \cdot \frac{1}{2\sqrt{\eta^4 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1}} \times \\ \times \{ e^{-A|U|} (B \cos|U| B + A \sin|U| B) + e^{-AV} (B \cos|V| B + A \sin|V| B) \} \quad (6)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$U = x - t; \quad \forall \quad x + t; \quad A = \sqrt{\frac{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1} + \eta^2}{2}}; \quad B = \sqrt{\frac{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1} - \eta^2}{2}}$$

С учетом изложенного выражения (9) примет вид:

$$\omega(x, y) = \omega_\infty(x, y) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \omega(x, \eta) \int_0^a K(x, \eta, t) \cos \eta y d\eta dt \quad (7)$$

Применив к интегральному уравнению (13) cos-преобразование Фурье по переменной y , получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно $\omega(x, \eta)$ – трансформанты Фурье функции прогибов:

$$\omega(x, \eta) = \omega_{\infty}(x, \eta) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \omega(t, \eta) \int_0^{\infty} K(x, \eta, t) \cos \eta y d\eta dt \quad (8)$$

где

$$\omega_{\infty}(x, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q_0(\xi, \eta) \cos \xi x}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} d\xi \quad (9)$$

Следует рассмотреть два случая решения интегрального уравнения (8). В первом случае, если $x \leq a$, т.е. прогиб ищется в зоне отсутствия основания, то функция прогиба находится из зависимости:

$$\begin{aligned} \omega(x, \eta) = \omega_{\infty}(x, \eta) + \int_0^a \omega(t, \eta) K(x, \eta, t) dt = \omega_{\infty}(x, \eta) + \int_0^x \omega(t, \eta) K(x, \eta, t) dt + \\ + \int_0^a \omega(t, \eta) K(x, \eta, t) dt - \omega_{\infty}(x, \eta) + \frac{\varphi_1(\eta, x)}{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1}} \int_0^x \psi_1(\eta, x) \omega(t, \eta) dt + \\ + \frac{\varphi_2(\eta, x)}{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1}} \int_0^x \psi_2(\eta, x) \omega(t, \eta) dt + \frac{\psi_1(\eta, x)}{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1}} \times \\ \times \int_0^x \varphi_1(\eta, t) \omega(t, \eta) dt + \frac{\psi_2(\eta, x)}{\sqrt{\eta^4 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1}} \int_0^x \varphi_2(\eta, t) \omega(t, \eta) dt \end{aligned} \quad (10)$$

Давая x различные значения, находим значения прогибов
Решая систему, находим

$$\omega(0, \eta); \omega(x_1, \eta); \omega(x_2, \eta); \omega(x_3, \eta); \omega(x_4, \eta)$$

Используя выражения для функции прогибов $\omega(x, y)$ (3), продифференцировав, определим формулы для вычисления значений изгибающих моментов и приведенных поперечных сил:

$$\left\{ \begin{aligned} M_x(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\xi^2 + v\eta^2) \cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \omega(t, \eta) \cos \xi t dt \cdot d\xi \cdot d\eta + M_{\text{ок}}(x, y); \\ M_y(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(v\xi^2 + \eta^2) \cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \omega(t, \eta) \cos \xi t dt \cdot d\xi \cdot d\eta + M_{\text{ок}}(x, y); \\ Q_x(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{[\xi^3 + (2-v)\xi\eta^2] \cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \omega(t, \eta) \cos \xi t dt \cdot d\xi \cdot d\eta + Q_{\text{ок}}(x, y); \\ Q_y(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{[\eta^3 + (2-v)\xi^2\eta] \cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \omega(t, \eta) \cos \xi t dt \cdot d\xi \cdot d\eta + Q_{\text{ок}}(x, y); \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Вывод. Таким образом получено точное аналитическое решение задачи об изгибе бесконечной плиты, лежащей на винклеровском упругом основании с учетом влияния продольных усилий и неполного контакта с основанием.

Список литературы

1. Маруфий А.Т. Расчёт плит на упругом при отсутствии основания под частью плиты [Текст] /А.Т. Маруфий // Основания, фундаменты и механика грунтов. – М.: 1999. - №4. – с.27-31.

2. Маруфий А.Т. Изгиб бесконечной плиты на упругом основании с неполным контактом с основанием [Текст] / А.Т.Маруфий, В.И.Травуш // Научный вестник ФерГУ. – 1995. - №1-2. – с.71-77.
3. Маруфий А.Т. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на упругом основании Винклера, с учетом влияния продольных усилий [Текст] А.Т.Маруфий, А.Т. Турганбаев. - Научный вестник ФерГУ, 1996. - №1. – с.70-73.
4. Травуш В.И. Об одном методе решения задач изгиба конструкций, лежащих на винклеровском основании [Текст] / В.И.Травуш // Вопросы архитектуры и строительства зданий для зрелищ, спорта и учреждений культуры: Сб.трудов. - М.:1976. - №4. – с.83-89.
5. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений[Текст] / И.С.Градштейн, И.И.Рыжик. – М.: Физматгиз, 1962. – 210с.