Министерство образования и науки Российской Федерации
Министерство образования и науки Кыргызской Республики
ГОУ ВПО Кыргызско – Российский Славянский университет

На правах рукописи

УДК 539.3/.4

ЛУЖАНСКАЯ ТАТЬЯНА АЛЕКСАНДРОВНА

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИОННОГО УПРОЧНЕНИЯ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ СКОЛЬЖЕНИЯ И РАЗРЫХЛЕНИЯ

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Рычков Б.А.

Бишкек - 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Согласно ГОСТ 21153.3-85 [1] предел прочности при одноосном растяжении – $\sigma_p^{пр}$, в данной работе предел прочности при одноосном растяжении принимается σ_p (МПа).

Согласно ГОСТ 21153.2-84 [2] предел прочности при одноосном сжатии – $\sigma_{сж}$, в данной работе предел прочности при одноосном сжатии принимается σ_c^s (МПа).

Обозначение	Физический смысл
α_0, град.	– угол среза;
α_0^0, град.	– угол среза при напряженном состоянии одноосного сжатия;
$\alpha_0^{эксп}$, град.	– угол среза в соответствии с данными А.Н. Ставрогина [3, с.269, приложение 5];
β_0, град.	– угол, определяющий направление первого скольжения, отсчитываемый от направления действия максимального касательного напряжения $\tau_{\max}$;
β_0^0, град.	– угол, определяющий направление первого скольжения, отсчитываемый от направления действия максимального касательного напряжения $\tau_{\max}$ при напряженном состоянии одноосного сжатия;
β, град.	– угол поворота площадки скольжения относительно плоскости действия максимального касательного напряжения;
Γ_{13}^0	– компонента плоскопластической деформации от скольжений (называемых основными) по площадке максимального касательного напряжения;
Γ_i	– компонента неупругой деформации;
Γ_i^0	– компонента деформации от основных скольжений;

Обозначение	**Физический смысл**
Γ_i^{∂}	– компонента деформации от дополнительных скольжений;
Γ_i^{*}	– деформация разрыхления;
Γ_i^{+}	– чисто пластическая деформация;
χ, ρ и ξ, η	– параметры, определяемые по экспериментальным данным для пределов прочности и упругости (соответственно) при каких-либо двух видах напряженного состояния;
ε_1^p, ε_2^p	– неупругая продольная и поперечная деформации, принятая А.Н. Ставрогиным.
θ	– объемная деформация;
$\lambda = \lambda(c)$	– коэффициент разрыхления;
μ	– тангенс угла внутреннего трения;
μ_n	– коэффициент остаточной деформации
ν	– коэффициент Пуассона;
σ и τ, МПа	– координаты точки касания огибающей предельного круга Мора;
σ^0 и τ^0, МПа	– координаты точки касания огибающей предельного круга Мора при одноосном сжатии;
σ_{Cm} и τ_{Cm}, МПа	– координаты точки касания огибающей предельного круга Мора в соответствии с данными А.Н. Ставрогина [3, с.269, приложение 5];
σ_{β_0} и τ_{β_0}, МПа	– нормальное и касательное напряжения в плоскости, повернутой на угол β относительно площадки действия максимального касательного напряжения;
σ_0, МПа	– среднее напряжение;
σ_1, $\sigma_2 = \sigma_3$, МПа	– главные напряжения;

Обозначение	Физический смысл
$\sigma_1^e = \sigma_1^e(c)$, МПа	– предел упругости при произвольном напряженном состоянии;
σ_{1Cm}^e, МПа	– значение предела упругости по данным А.Н. Ставрогина [3, с.248, приложение 2];
$\sigma_1^s = \sigma_1^s(c)$, МПа	– предел прочности при произвольном напряженном состоянии;
$\sigma_{1эксп}^s$, МПа	– предел прочности (экспериментальное значение согласно данным А.Н. Ставрогина [3, с.248, приложение 2]);
$(\sigma_1^s)_I$ и $(\sigma_1^s)_{II}$, МПа	– пределы прочности, определяемые при использовании соотношений $\sigma_{\beta_0}/\tau_{\beta_0}$ и σ_0/τ_{β_0}, соответственно;
τ_{12} и τ_{23}, МПа	– главные касательные напряжения;
$\tau_{\max}$, МПа	– максимальное касательное напряжение;
τ_T, МПа	– максимальное касательное напряжение на пределе упругости;
$\Delta\tau$	– разность между текущим значением максимального касательного напряжения и максимальным касательным напряжением на пределе упругости;
τ_e^0, τ_s^0, A_1 и B_1	– константы, используемые А.Н. Ставрогиным [3, с.248, приложение 3];
$\sigma_{p\ эксп}$, МПа	– предел прочности на растяжение (экспериментальное значение);
σ_c^e, МПа	– предел упругости при напряженном состоянии одноосного сжатия;
ψ	– определяющая функция, которая находится при аппроксимации расчетными зависимостями экспериментальных диаграмм;

Обозначение	Физический смысл
μ_0, Γ, t и $\Delta\tau^*$, ε_1^p	– табулированные данные [3, с.83, таблица 3.1];
A, B, Q	– параметры;
E, МПа	– модуль упругости;
e_1, e_2	– упругая продольная и поперечная деформации;
$c = \sigma_3/\sigma_1$	– вид напряженного состояния;
c_n	– предельное напряженное состояние;
c_0	– коэффициент сцепления, в случае линейной зависимости между нормальным и касательным напряжениями;
$k = k(c)$	– коэффициент, указывающий зависимость касательного напряжения от нормального в плоскости среза;
k_n	– значение k при предельном напряженном состоянии;
k_0	– значение k при напряженном состоянии одноосного сжатия;
k_1, k_2, k_3	– постоянные величины;
P, %	– пористость материала;
p, g, u, v	– const;
S_β	– сопротивление сдвигу;
S_0	– переменный коэффициент сцепления, входящий в выражения для сопротивления сдвигу;
S_0^{0e} (S_0^{0s}), МПа	– константа, имеющая смысл пределов упругости (прочности), зависящая от принятого соотношения между нормальным и касательным напряжениями в плоскости среза при одноосном сжатии;
S_{0I}, ξ_I, η_I и S_{0II}, ξ_{II}, η_{II}	– параметры и константы, определяемые при использовании соотношений $\sigma_{\beta_0}/\tau_{\beta_0}$ и σ_0/τ_{β_0} соответственно.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена развитию концепции скольжения в теории пластичности.

Основной прочностной характеристикой материала принято сопротивление сдвигу (локальному скольжению) в соответствии с механизмом пластической деформации поликристаллических тел.

Соответствующее проявление этой характеристики применительно к пластичным материалам продемонстрировано на примере экспериментального исследования ортогонального эффекта Баушингера.

Синтез концепции скольжения и явления разрыхления материала позволил смоделировать деформационные и прочностные свойства так называемых полухрупких материалов, таких как горные породы.

Задача паспортизации горных пород имеет существенное значение. Естественны при этом попытки смоделировать закономерности деформационного поведения горных пород в форме разработки определяющих соотношений, пригодных для анализа процессов, происходящих при сложнонапряженных состояниях. Поэтому систематизация и усовершенствование паспортов прочности горных пород, включая уточнение их упругих, деформационных и прочностных характеристик вплоть до пределов прочности при сложнонапряженном состоянии является открытым вопросом, чем и обусловлена **актуальность работы.**

Связь темы диссертации с крупными научными программами, основными научно-исследовательскими работами, проводимыми научными учреждениями.

Диссертационная работа была выполнена в рамках научно-исследовательской работы государственного контракта по заказу Министерства образования и науки Кыргызской Республики: «КР-05. Оценка динамики состояния инженерных сооружений (плотин) в горных условиях и разработка методов моделирования механики конструкционных материалов» и «КР-04. Прочность и деформируемость горных пород при больших давлениях в условии глубоких выработок и высокогорья» (ГОУ ВПО Кыргызско-Российский Славянский университет).

Целью данной работы является верификация модели скольжения применительно к некоторым пластичным и полухрупким материалам.

Задачи исследования:

– экспериментальное исследование деформационной анизотропии стали 40Х, а именно ортогонального эффекта Баушингера;

– разработка модели перехода горных пород в предельное состояние как в области сжимающих, так и в области растягивающих напряжений;

– определение параметров деформационного упрочнения горных пород на основе концепции скольжения и разрыхления.

Научная новизна определяется следующими результатами:

1. Экспериментально доказано (на примере кручения с растяжением тонкостенных трубчатых образцов стали 40Х), что в соответствии с концепцией скольжения ортогональный эффект Баушингера в указанном случае нагружения возникает в результате проявления прямого эффекта Баушингера в направлениях действия главных напряжений при предварительном чистом кручении, когда при последующем после разгрузки нагружении растяжением в одном из этих направлений сжимающее напряжение сменяется на растягивающее напряжение.

2. Разработан метод определения предела прочности горных пород при действии растягивающих напряжений, исходя из ограниченного количества опытных данных на сжатие.

3. Предложены аналитические зависимости для составления паспорта прочности полухрупких материалов, таких как горные породы, на основе экспериментальных данных только одноосного сжатия (а также пористости) и установленных свойств огибающей предельных кругов напряжений Мора.

4. Начальный участок диаграмм продольной упругой деформации некоторых горных пород, который носит нелинейный характер, предложено исключать путем переноса начала координат, положение которого однозначно определяется путем экстраполяции линейных участков продольной деформации при различных видах напряженных состояний вплоть до равных нулю напряжений.

Практическая значимость полученных результатов. Представленный в работе метод построения паспорта прочности горных пород позволяет провести количественную и качественную оценки поведения горных пород при различных видах напряженного состояния на основе ограниченного количества исходных экспериментальных данных.

Основные научные и практические результаты диссертационного исследования внедрены в учебный процесс на кафедре «Механика» Кыргызско – Российского Славянского университета для обучения студентов при чтении лекций, в курсовом и дипломном проектированиях в курсах «Основы теории пластичности и ползучести» и «Экспериментальная механика деформируемого твердого тела».

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

1. Экспериментально доказано, что ортогональный эффект Баушингера, в соответствии с концепцией скольжения, возникает в результате проявления прямого эффекта Баушингера. А именно: после чистого кручения и разгрузки тонкостенного трубчатого образца из стали марки 40Х при последующем растяжении в одном из бывших при кручении главном направлении напряжение меняет знак, что и приводит к эффекту Баушингера в этом направлении. А образец в результате при таком повторном нагружении пластически раскручивается.

2. Прочностные (упругие) характеристики горных пород определяются паспортом прочности, предложенный в работе метод построения которого требует знания экспериментальных данных на одноосное сжатие (включая значение угла среза, либо сведения о пористости горной породы) и

установленных свойств огибающей предельных кругов Мора, что обеспечивает использование ограниченного количества исходных экспериментальных данных.

3. Предел прочности на растяжение предлагается в работе определять, используя только диаграмму одноосного сжатия (предел прочности на сжатие) и точку касания огибающей соответствующего круга Мора для конкретной горной породы.

4. В состояниях одноосного и трехосного сжатия свойственный некоторым горным породам начальный нелинейный участок диаграммы продольной деформации предложено исключать путем экстраполяции следующего за ним линейного участка, что доставляет новое начало координат для этой диаграммы, независимо от вида напряженного состояния.

5. Используя понятие сопротивления сдвигу, дана теоретическая интерпретация деформационного упрочнения различных по составу горных пород, деформация которых разделяется на три составляющие: упругую (определяемую обобщенным законом Гука для ортотропного материала), чисто пластическую (не вызывающую изменения объема и имеющую предлагаемую единую зависимость соответствующей максимальной деформации от максимального касательного напряжения, независимо от вида напряженного состояния) и деформацию разрыхления (связанную с чисто пластической деформацией коэффициентом разрыхления с установленной для него зависимостью от вида напряженного состояния).

Личный вклад соискателя состоит в непосредственном участии во всех этапах диссертационного исследования. А именно, в проведении экспериментального исследования над тонкостенными трубчатыми образцами из стали марки 40Х: окончательной подготовке испытуемых образцов, настройке оборудования, проведении эксперимента, обработке полученных результатов. Также вклад соискателя заключается в поиске методов решения поставленной Б.А. Рычковым задачи изучения поведения горных пород, в выполнении необходимого объема исследований, обработке и анализе полученных результатов, подготовке публикаций по теме диссертационного исследования.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертации были представлены на:

1. Международная научно-техническая конференция «Современное состояние и перспективы развития машиностроения в КР» (29-30 мая, 2009, г. Бишкек). 2. Ежегодная 2-я конференция молодых ученых и студентов «Современные техника и технология в научных исследованиях» (28 апреля, 2010, г. Бишкек). 3. XI Всероссийская научно-техническая конференция и школа молодых ученых, аспирантов и студентов (14 мая, 2010, г. Воронеж). 4. Ежегодная 3-я конференция молодых ученых и студентов «Современные техника и технология в научных исследованиях» (27 апреля, 2011, г. Бишкек). 5. Международная научная конференция, посвященная памяти академика М.Я. Леонова «Современные проблемы механики сплошной среды» (14-15 сентября, 2012, г. Бишкек). 6. Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы механики сплошных сред» (28-30 июня, 2012, г. Бишкек). 7. Ежегодная 6-я конференция молодых ученых и студентов «Современные техника и технология в научных исследованиях» (26-27 марта, 2014, г. Бишкек). 8. III Всероссийская конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика Ю.Н. Работнова (26-30 мая, 2014, г. Новосибирск). 9. Международная научная конференция «Актуальные проблемы механики и машиностроения» (19-20 июня, 2014, г. Алматы). 10. Международные научные чтения им. чл.-корр. РАН И.А. Одинга «Механические свойства современных конструкционных материалов» (4-5 сентября, 2014, г. Москва). 11. Международная научно-техническая конференция «Наука, образование, инновации: приоритетные направления развития» (18-19 сентября, 2014, г. Бишкек). 12. XI Российская ежегодная конференция молодых научных сотрудников и аспирантов «Физико-химия и технология неорганических материалов» (16-19 октября, 2014, г. Москва).

Также участвовала в научно-технических конференциях кафедры «Механика» ГОУ ВПО Кыргызско - Российского Славянского университета.

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. По теме диссертации опубликовано 29 работ: 20 статей, 9 тезисов конференций. В том числе 8 статей в рецензируемых ВАК КР журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и двух приложений. Объем работы – 148 стр., в том числе 79 рисунков, 46 таблиц. Список библиографических источников включает 129 наименований, в том числе 29 публикаций соискателя.

Во введении обосновывается актуальность диссертационного исследования, сформулированы цель и задачи работы, представлены научная новизна, практическая значимость полученных результатов и основные положения диссертации, выносимые на защиту.

В первой главе указаны возможности концепции скольжения при моделировании деформации и разрушения как пластичных, так и полухрупких тел. Описаны цели экспериментального исследования над тонкостенными трубчатыми образцами стали 40Х. Дан краткий обзор проведенных исследований поведения образцов горных пород при трехосном сжатии по схеме Кармана и способов построения паспорта прочности пород.

Во второй главе проводится анализ проведенного экспериментального исследования над трубчатыми образцами из стали марки 40Х с целью выявления природы ортогонального эффекта Баушингера.

Третья глава посвящена разработке модели перехода горных пород в предельное состояние на основе концепции скольжения. Доказана возможность построения огибающей предельных кругов Мора с одновременным определением ориентации плоскости среза при различном соотношении между сжимающими напряжениями. При этом в качестве исходных данных достаточно использовать значения предела прочности при одноосном сжатии и соответствующего угла среза. Прогнозируется также величина предела прочности при растяжении.

В четвертой главе рассматривается деформирование пород в упругой области и за пределом упругости. Поведение пород за пределом упругости определяется на основе представления сопротивления сдвигу как функции от компоненты чисто пластической деформации, с которой затем связывается деформация разрыхления.

В пятой главе проводится анализ расчета по предлагаемым аналитическим соотношениям в сравнении: с экспериментальными данными А.Н. Ставрогина [3] для талькохлорита, песчаника не опасного по выбросам и мрамора II (результаты для известняка, известняка Д-6, кварцевого диорита Д-2, мрамора I, диабаза, выбросоопасного песчаника и песчаников П-0, Д-8, П-01, П-03, П-026 представлены в виде таблиц в приложениях I и II), а также с экспериментальными данными K. Mogi [4] для dunham dolomite, dunham dolomite (block 2), westerly granite, solnhofen limestone, yamaguchi marble, mizuho trachyte, manazuru andesite, inada granite, orikabe monzonite.

Показано, что полученные в работе теоретические результаты соответствуют экспериментальным данным.

ГЛАВА 1
ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Одной из основных задач теории пластичности является описание напряженно-деформированного состояния твердых тел за пределами упругости при произвольном сочетании внешних нагрузок. Эта задача еще далека до своего полного завершения. Поэтому В.В. Новожилов полагал [5], что различные варианты теории пластичности являются своего рода разрешающими приборами, имеющими свою область применимости. Обзор по разработке теории пластичности содержится во многих работах [6–8]. Разнообразные подходы к решению указанной выше задачи реализованы в [6, 9–11].

Так как при пластическом деформировании материал приобретает деформационную анизотропию, то ее моделирование составляет вторую основную задачу теории пластичности. При решении названных задач большое значение имеет экспериментальное изучение законов пластического деформирования [8].

Как известно, большинство поликристаллических тел деформируются и разрушаются в результате сдвиговой деформации различной природы: путем перемещения различных дефектов в кристаллической структуре - типа дислокаций и двойникования, за счет облегченного скольжения атомов по определенным кристаллографическим направлениям, скольжения прослоек кристаллов по границам зерен и т.п.

В макромасштабе такая деформация за пределами упругости отображается идеализированными локальными скольжениями по определенным плоскостям и направлениям. Наиболее соответствующей экспериментальным данным для конструкционных материалов является теория скольжения в трактовке М.Я. Леонова [12]. Эта теория, сформулированная и апробированная вначале для изотропных пластичных материалов [13], затем распространена на начально анизотропные материалы [14] и на полухрупкие материалы, к которым относятся чугуны и горные породы [15]. Не случайно, что именно развитие концепции скольжения считается [16] одним из наиболее перспективных направлений в теории пластичности. Этапы такого построения в теории неупругих деформаций зафиксированы в работах К.Н. Русинко [6], М.Я. Леонова [17], Н.Ю. Швайко [18], Б.А. Рычкова [12], Я.И. Рудаева [19], С.А. Абрахманова [20], А.Б. Салиева [21] и др. [22]. Вопрос сдвиговой прочности применительно к горным породам рассматривается в работах Е.И Шемякина [23], С.Е. Чиркова [24].

Важным вопросом в изучении пластичности материалов является описание деформационной анизотропии материалов, которая наиболее полно проявляется при ортогональном эффекте Баушингера (когда после кручения тонкостенного трубчатого образца и разгрузки, он затем растягивается, или в обратном приложении нагрузок). Этот эффект был изучен и представлен как «эффект раскручивания» в работе Ю.И. Кадашевича и В.В. Новожилова [25] на основе опытов М. Фейгина [26]; описанием идеального эффекта Баушингера занимался А.Ю. Ишлинский [27]. С позиции сопротивления сдвигу этот эффект описан Н.М. Комарцовым [28, 29]. При этом использовано не само понятие сопротивление сдвигу, а аналогичное ему понятие сопротивление растяжению (сжатию) от скольжений. Имеется в виду, что, например, после чистого кручения и разгрузки образца при последующем растяжении в одном из бывших при кручении главном направлении напряжение меняет знак, что и приводит к эффекту Баушингера в этом направлении. А образец в результате пластически раскручивается. В эксперименте это зафиксировано [30] суммарным измерением главных деформаций при чистом кручении и регистрацией последующего изменения накопленной этой деформации сдвига при повторном растяжении. Чтобы подтвердить правильность моделирования такого эффекта Баушингера, потребовалось раздельное измерение деформаций в указанных направлениях [31, 32]. Однако, в ходе предварительных испытаний в упругой области, была установлена исходная (не поддающаяся классификации) анизотропия материала заготовок, в результате чего не удалось провести весь комплекс запланированных испытаний [33-37]. Но, несмотря на исходную деформационную анизотропию, на нескольких образцах удалось четко продемонстрировать ортогональный эффект Баушингера [38, 39], который происходит в полном соответствии с концепцией скольжения. Результат представлен в данной работе.

Как известно, сопротивление сдвигу является основной прочностной характеристикой не только пластичных, но и полухрупких материалов. Таким образом, была поставлена другая задача диссертационного исследования. Необходимо было разобраться, как с позиции концепции скольжения наиболее просто и надежно можно описать деформационные и прочностные свойства горных пород при неравномерном трехосном сжатии. Кроме того, решался вопрос: можно ли установить предел прочности на растяжение по экспериментальным данным на сжатие.

Горные породы в условиях естественного залегания находятся в условиях всестороннего неравномерного напряженного состояния сжатия, а в отдельных направлениях и растяжения, что создается многочисленными факторами, такими как температура, гравитационные и тектонические силы, поровое давление и т.п., в результате чего горные породы деформируются. С переходом горных работ на большие глубины или вблизи выработок происходит образование зон предельного состояния, в которых породы проявляют упругие и пластические свойства тел, разрушаясь при этом в условиях неоднородных объемных напряженных состояний.

Многие исследователи в разные периоды занимались как эмпирическим, так и аналитическим исследованием поведения горных пород. К первому относятся работы E.C. Robertson [40], F.A. Donath [41], M.S. Paterson [42], Т. Кармана [43], А.Н. Ставрогина [3] и др. [44, 45]. На сегодняшний день существуют различные виды испытаний горных пород, к ним относятся испытания на кручение, изгиб, растяжение и сжатие [46].

Для определения прочности горной породы при растяжении используются следующие методы: метод прямого растяжения, «бразильский метод», «точечный» метод и др. [47].

Испытание пород на сжатие имеет более распространенный характер. Наиболее известной установкой для проведения подобных испытаний является установка типа Кармана, когда между осевым напряжением сжатия σ_1 и главными напряжениями σ_2 и σ_3 от равномерного бокового давления выполняется соотношение: $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$. При этом сжимающие напряжения считаются положительными.

Влияние напряжения σ_2 на прочность горных пород остается непонятным. Такими исследователями, как Г.Н. Кузнецовым, А.Д. Алексеевым [47] были разработаны специальные установки для выявления влияния промежуточного напряжения. K. Mogi [48] исследовал на специальном оборудовании влияние напряжения σ_2 на образцы горных пород при трехосном напряженном состоянии, когда три главные напряжения имеют разные значения, после чего предложил использовать новый критерий разрушения на основе обобщенного критерия Мизеса, согласно этому методу пластичность горных пород возрастает с увеличением напряжения σ_3 и уменьшается с уменьшением σ_2 т.е. влияние напряжений σ_2 и σ_3 на пластичность материалов оказывает противоположное действие.

Ряд авторов, основываясь на экспериментальных исследованиях горных пород, утверждают, что напряжение σ_2 не влияет на прочность породы [49]. В данной работе принимается, что напряжение σ_2 не влияет на прочностные свойства горных пород в том диапазоне напряжений, который наиболее часто реализуется на практике.

Напряжения σ_1 и σ_3 могут принимать множество значений, и осуществить весь комплекс опытов с различным соотношением этих компонент невозможно. Поэтому разрабатываются различные методы расчета [50], по которым можно оценить степень опасности напряженного состояния по зависимостям между главными напряжениями, т.е. предсказать прочностные свойства материалов.

Помимо таких факторов как трещиноватость и структурные связи прочность горных пород зависит [51] и от самой структуры (минерального состава породы, причем некоторые минералы (кварц, пироксены) придают породе большую прочность, тогда как другие (кальцит, слюда) меньшую). Поэтому расчет предела прочности породы по теории межатомного взаимодействия не подходит.

Применительно к горным породам несостоятельны и такие критерии расчета на прочность [52], как теория наибольших напряжений, критерий максимальных растягивающих напряжений, критерий наибольших нагрузок, т.к. породы разрушаются при различных видах напряженного состояниях при разных уровнях напряжений.

В настоящее время существует множество теорий для оценки прочности материалов, к ним относятся критерий Кулона, Мизеса, Треска – Сен-Венана, Г.С. Писаренко – А.А. Лебедева и др. [53]. В практике горного дела получила наибольшее распространение теория прочности Мора, согласно которой существует огибающая кругов предельных напряжений. Если уравнение огибающей известно, то можно установить прочность пород при различных видах напряженного состояния.

Карманом экспериментально было проверено предположение Мора о существовании огибающей линии предельных кругов напряжений. Он провел испытания образцов из карарского мрамора и песчаника на установке, где с помощью пресса создавалось вертикальное давление на образец, а боковое давление по периметру создавалось гидравлическим путем. Таким образом, в образце создавалось соответствующее напряженное состояние и устанавливалось предельное напряжение, обуславливающее разрушение испытуемого образца. При испытании фиксировались максимальные значения главных напряжений, при которых происходило разрушение. Метод Кармана и проведенные им исследования в настоящее время принимаются как классические.

Проводились многочисленные исследования различных горных пород в камерах трехосного сжатия, которые доказывают, что при нанесении полученных результатов на заданную плоскость нормального и касательного напряжений наибольшие круги разрушающих напряженных состояний, как и говорилось выше, имеют огибающую линию, которая разграничивает область опасных и неопасных напряженно-деформированных состояний горных пород.

Недостатком теории Мора является неоднозначность вида огибающей линии.

Исследователи предлагают [53] различные уравнения для представления огибающей предельных кругов – уравнения циклоиды [54], параболы [55], в виде выпуклой кривой в сторону положительных ординат [56], в виде пересекающихся прямых линий [57].

М.М. Протодьяконов [53], анализируя виды существующих огибающих, предложил единую форму огибающей, которая удовлетворяла бы поведению всех горных пород. Такая огибающая, в виде кривой, в координатной системе x, y описывается следующим уравнением:

$$\tau = \tau_{\max}\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)^{\frac{3}{8}},$$

где $x = \sigma + \sigma_p$,

σ_p – предел прочности при растяжении,

a – параметр формы кривой, имеющий размерность напряжения в кг/см^2.

Полученное уравнение для огибающей М.М. Протодьяконов предлагает использовать в безразмерном виде

$$l = \left(\frac{k^2}{k^2+1}\right)^{\frac{3}{8}},$$

где $l = \tau/\tau_{\max}$,

$k = x/a$.

Построить огибающую по указанным безразмерным параметрам можно на основании данных о прочности пород на одноосное сжатие σ_c^s и растяжение σ_p.

В США, к примеру [50], придерживались метода построения прямолинейной огибающей, который состоит в следующем: для предельных кругов проводили огибающую не в виде кривой, а в виде прямой линии, которой, продолжая ее до пересечения с осью ординат (рис. 1), определяли угол внутреннего трения (ρ) и значение параметра c_0.

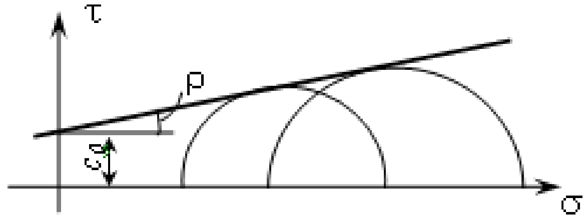


Рис. 1.1. Схема построения прямолинейной огибающей семейства кругов Мора.

Таким образом, уравнение огибающей представлялось в виде:

$$\tau = \sigma\, tg\rho + c_0,$$

где c_0 – коэффициент сцепления в случае линейной зависимости между σ и τ.

А.Н. Ставрогин [3] предложил условие перехода горных пород в предельное состояние в качестве экспоненциальных зависимостей

$$\tau_s = \tau_s^0 \exp(A_1 c),\ \tau_e = \tau_e^0 \exp(B_1 c),$$

где τ_e, τ_s – соответственно предел упругости и прочности,

τ_e^0, τ_s^0, A_1, B_1 – константы, определяемые из опыта (в [3] вместо A_1, B_1 используются A, B),

$c = \sigma_3 / \sigma_1$ – вид напряженного состояния.

Т.Б. Дуйшеналиев и К.Т. Койчуманов [58] представили уравнение предельных кругов Мора в пространстве главных напряжений (σ_1, σ_3) в виде алгебраического уравнения второй степени, по инвариантам которого можно заключить, что в этом пространстве оно является уравнением гиперболы. Задав в этом пространстве уравнение гиперболы в каноническом виде, им удалось разрешить его относительно главного напряжения σ_3, т.е. получить зависимость $\sigma_3 = \sigma_3(\sigma_1)$. Полученный результат авторы предлагают использовать как соотношение между главными напряжениями ($\sigma_1 \sim \sigma_3$), которое «…определяет все те напряженные состояния, которые приводят к разрушению материала…» [58, с. 115]. Это, в отличие от подхода А.Н. Ставрогина, дает возможность определить предел прочности при осевом растяжении непосредственно по предлагаемому соотношению, не применяя дополнительные предположения.

Гун Бэнь И. [59], анализируя проведенные опыты над образцами различных горных пород определил эмпирические зависимости параметров огибающей предельных кругов Мора от вида напряженного состояния. Автор привел расчетные соотношения для определения приближенного паспорта прочности горных пород по пределу прочности при одноосном сжатии. Такой подход требует проведения значительного количества трудоемких экспериментов, на основе которых делается затем некоторое обобщение для определенной группы горных пород в виде соответствующих номограмм.

Таким образом, многие исследователи в разное время при анализе уже существующих видов и подходов к определению огибающей предельных кругов Мора выдвигали свою методику теоретического описания вида огибающей.

А. Драгон, З. Мруз [60] предлагают теорию типа теории течения, учитывающую дилатансию и, опирающуюся на понятие поверхности разрушения, которая подобна понятию поверхности нагружения для пластичных материалов. Однако, Ю.Н. Работнов [61] высказывает сомнения в том, имеет ли смысл полагать в основу построения теории понятие поверхности нагружения. Такое предположение в какой-то степени, можно отнести и к поверхности разрушения, несмотря на то, что последняя страдает меньше неопределенностью, но зависит от условий испытания.

В последнее время вопрос прочности пород исследуется Б.Г. Тарасовым [62], особое внимание в работах которого уделяется прочным горным породам, а именно изменению хрупкости прочных пород при высоких всесторонних напряжениях. Для понимания этого явления предлагается новый механизм сдвигового разрушения, согласно которому трение внутри зоны разрушения снижается с ростом напряжений, что вызывает охрупчивание породы. Исследования в этой области необходимы для понимания таких явлений как землетрясения и горные удары, а также проведения горных работ на больших глубинах.

В работе [63] П.А. Цой приводит экспериментальное исследование деформирования квазипластичных геоматериалов при разных видах нагружения и проводит анализ по математическим моделям А.И. Чанышева [64] и Леонова – Рычкова [12]. Подобно тому, как А.А. Ильюшин ввел пятимерное пространство напряжений и деформаций, А.И. Чанышев в подобном пространстве предлагает представлять зависимости между средним напряжением и средней деформацией и зависимости между интенсивностью касательных напряжений и деформаций сдвига, но в осях, повернутых относительно главных осей тензора напряжений. Угол такого поворота подбирается из условия, чтобы зависимость между одноименными координатами тензоров в преобразованных осях координат были бы едиными при любых напряженных состояниях.

Указанный поворот осей координат, введенный в модели А.И. Чанышева при отыскании инвариантной зависимости между напряжениями и деформациями за пределами упругости, действительно, необходим, на наш взгляд, ввиду следующего. Скольжения (в материале образцов, испытываемых по схеме Кармана) происходят в плоскости, повернутой относительно плоскости максимального касательного напряжения за счет влияния нормального напряжения на сопротивление сдвигу. Это, собственно, и отражает критерий Кулона – Мора, который полагается в основу приводимых нами далее соотношений.

Некоторые исследователи [65, 66] занимаются построением компьютерной модели разрушения горных пород. В [66] представляются результаты разработки численной модели образца горной породы с помощью программных комплексов на основе метода конечных элементов. Образцы горной породы претерпевают смоделированные по определенной методике нагрузки, подобные создаваемым в установке Кармана, в процессе чего оценивается напряженно-деформированное состояние испытуемого образца согласно принятым теориям прочности Л.Я. Парчевского – А.Н. Шашенко [67], П.П. Баландина [68] и фиксируется величина разрушающей нагрузки. В результате, автор проводит сравнение данных, полученных при испытании численно смоделированного образца породы в объемном напряженном состоянии с экспериментальными данными А.Н. Ставрогина.

В работах [69-72] опубликованы результаты недавних экспериментальных исследований физико-механических свойств горных пород. Изучение прочностных свойств пород производится на основе различных методик: испытания на образцах с центральными круговыми отверстиями представлено в [73]; с помощью экспресс-метода в натурных условиях, используя специальное устройство [74]; с использованием бесконтактного метода (метод электромагнитного излучения) [75], путем регистрации нагрузки, деформации и параметров импульсов электромагнитного излучения; с точки зрения образования и роста несплошностей [76]. Также вопрос прочности пород исследуется в работах Е.И. Шемякина [77-79] и С.Е. Чиркова [80] и др. [81-91].

Однако, проведенный обзор исследований позволяет сделать вывод, что вопрос составления паспортов прочности горных пород актуален, т.к. для горных пород до сих пор нет определяющих соотношений, сопоставимых по своей эффективности с таковыми для пластичных материалов.

Первая попытка использования концепции скольжения и разрыхления в этом направлении реализована в [92]. Дальнейшее развитие и обобщение последней работы представлено в настоящей работе.

ГЛАВА 2
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ДЕФОРМАЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИИ НА ПРИМЕРЕ ОРТОГОНАЛЬНОГО ЭФФЕКТА БАУШИНГЕРА

2.1. Методика экспериментального исследования

Испытательная установка 04-1 (рис. 2.1), на которой первые свои эксперименты проводил В.С. Ленский [93], предназначена для проведения опытов на сложное нагружение кручением с растяжением тонкостенных трубчатых образцов. Установка 04-1 разработана и создана Институтом строительной механики АН УССР совместно с кафедрой «Теория упругости» Московского университета. Прецизионная и независимая регулировка допускается по продольной деформации (осевой силе), углу закручивания (крутящему моменту), что позволяет задавать программы нагружения как по деформациям, так и по напряжениям. Установка была усовершенствована за счет введения электрического привода, с помощью которого можно выбирать скорость и плавность хода штурвала, которым передается усилие. Для определения напряжений и деформаций применяется тензометрический метод на основе тензодатчиков омического сопротивления.

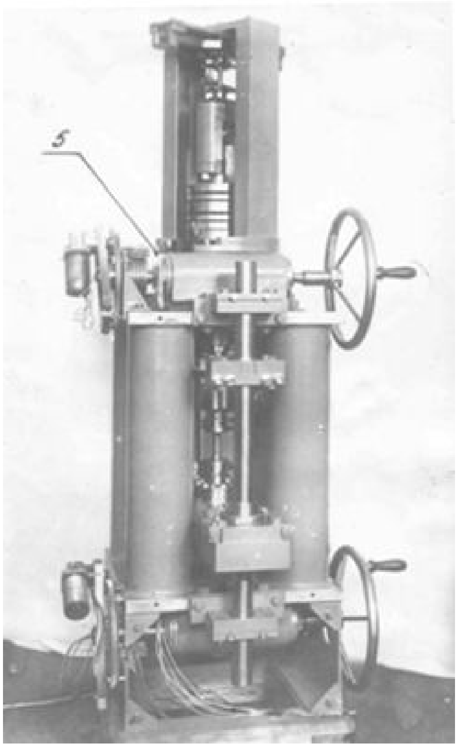


Рис. 2.1. Установка 04-1.

Динамометр (работающий на растяжение) смонтирован как одно целое звено с верхним захватом установки, к которому прикладывается растягивающая сила. Крутящий момент отражается динамометрической частью нижнего захвата установки. В кинематическую цепь установки встроены подшипники, исключающие влияние растягивающей силы на передачу к образцу крутящего момента.

Объектом исследования являются тонкостенные трубчатые образцы (рис. 2.2), толщина стенки которых составляет 1 мм (отклонение толщины исследуемой части образца допускается не более 0,02 мм).

Для изготовления образцов была использована партия заготовок из трех прутков стали различной длины, диаметром 40 мм. Все заготовки подвергались химическому анализу, который показал соответствие ГОСТу [94] для стали марки 40Х.

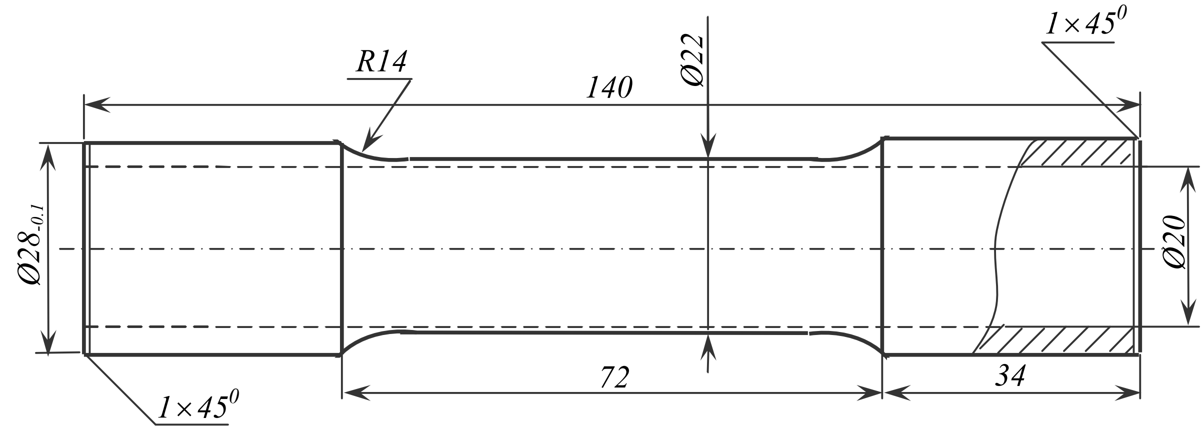


Рис. 2.2. Тонкостенный трубчатый образец.

Тарировка по растягивающей силе представляет собой тарировку датчика наклеенного на скобу, которая крепится на выносные консольные площадки динамометра растягивающей силы установки и передает его деформацию при перемещении одной площадки относительно другой.

Тарировка производится с помощью специального устройства, сконструированного на кафедре механики КРСУ (рис. 2.3).

Данным устройством имитируется растягивающая сила, возникающая на динамометре, путем подвешивания грузов Q на балку. В захвате возникает осевое усилие R_a, определенное из уравнения равновесия; при a=150 см; b=10 см:

$$R_a = 16 \cdot Q .$$

Сигнал от датчика на измерительной скобе через усилитель (используется усилитель 8 АНЧ) поступает на графопостроитель; меняя диапазон усиления сигнала на усилителе и подбирая чувствительность на самопишущем двухкоординатном приборе Н307 (потенциометр) можно получить нужный масштаб по силе на диаграммном планшете потенциометра (графопостроителя). Одновременно фиксируются показания (установленного на выносных площадках динамометра) индикатора часового типа, по которому можно вести параллельный контроль тарировки по растягивающей силе, а затем и ее измерение в ходе испытания

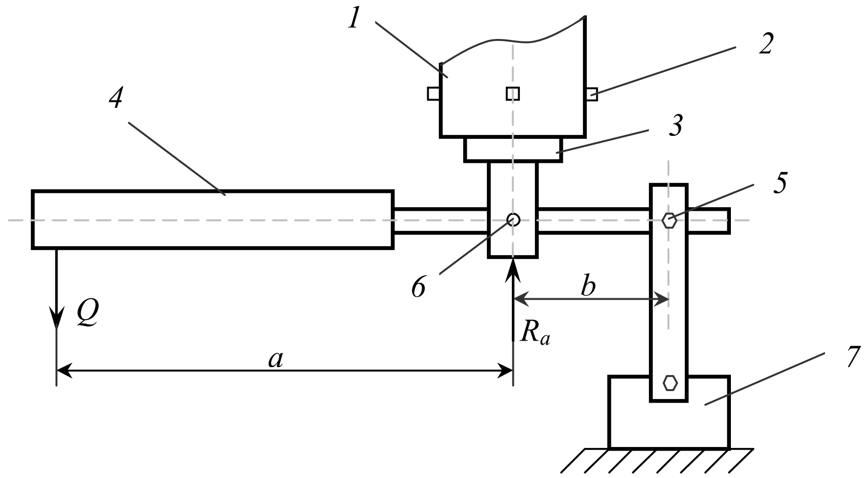


Рис. 2.3. Схема устройства, предназначенного для тарировки установки 04-1 по растягивающей силе:

1 - верхний захват установки, 2 - фиксирующие винты, 3 - захват тарировочной балки, 4 - тарировочная балка переменного сечения, 5 - фиксирующий болт с гайкой, 6 - металлический палец, 7 - неподвижный захват балки (установленный на горизонтальном столе станины установки).

Тарировка по крутящему моменту производится с помощью другой балки (рис. 2.4), закрепляемой в нижнем захвате установки. Момент передается путем подвешивания грузов на специальные нити, соединенные с балкой *1*, которая фиксируется в нижнем захвате установки.

Возникающий момент фиксируется тензодатчиками, наклеенными на шейке (динамометрической части) нижнего захвата и регистрируется миллиамперметром усилителя и на втором диаграммном приборе. Плечо балки составляет 30,5 см. Вес груза в 1 кг создаст момент 30,5 кг·см.

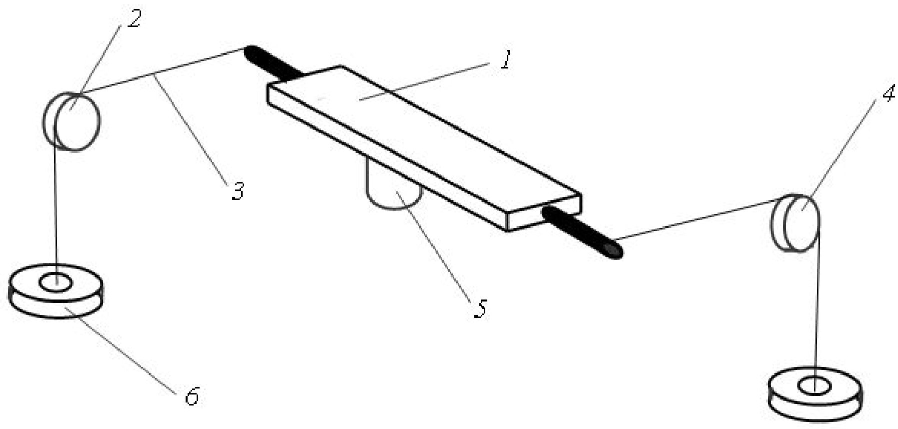


Рис. 2.4. Схема устройства, предназначенного для тарировки установки 04-1 по крутящему моменту:
1 - балка, 2 и 4 - блоки, прикрепленные к корпусу установки, 3 - нить, 5 - хвостовик, 6 – груз.

Как и по растягивающей силе, изменение крутящего момента дублируется индикатором часового типа. Установка и тарировка этого индикатора производится следующим образом. В захватах установки крепится сплошной стальной образец, которую создает кинематическую цепь с завершающим звеном в виде стержня переменного сечения, встроенного в верхнюю часть установки. Его средняя часть имеет меньший диаметр выше и ниже этой части стержня крепятся выносные площадки, которые при передачи на весь стержень крутящего момента испытывают разный угол поворота. Разница такого углового перемещения данных площадок фиксируется индикатором, показания которого регистрируются по показаниям предварительно протарированного потенциометра, отражающего закручивание шейки нижнего захвата.

Тарировка наклеенных на образец датчиков по деформациям производится с помощью специальных устройств, которые работают по принципу чистого изгиба балки постоянного сечения или балки постоянного сопротивления.

В нашем случае упругий элемент выполняется в виде балки постоянного сечения, подвергающейся чистому изгибу (рис. 2.5).

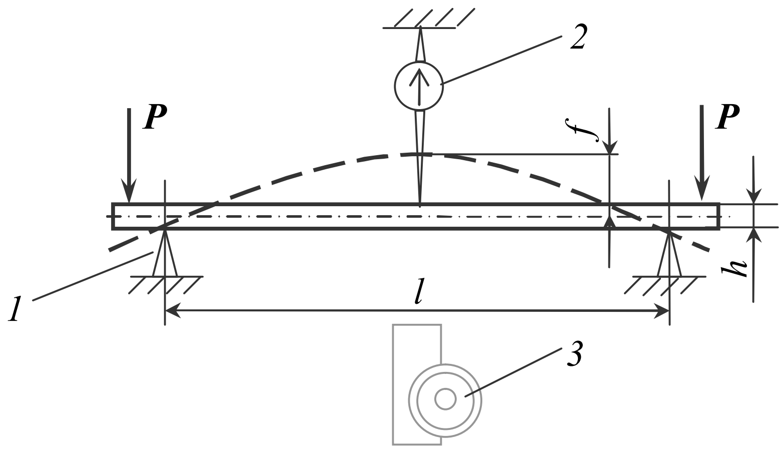


Рис. 2.5. Схема тарировки датчиков по деформации:

1 - балка, 2 - индикатор; 3 - винт, с помощью которого балка подвергается чистому изгибу.

Тензорезисторы наклеиваются на рабочий участок балки из той же партии, что и тензорезисторы, наклеенные на исследуемый объект. Относительная деформация наружных волокон определяется через прогиб f в середине балки:

$$\varepsilon = 4 \cdot f \cdot h/l^2 .$$

При этом для измерения стрелы прогиба f используется индикатор перемещения часового типа с ценой деления 0,01 мм.

Изменение сопротивления проводников, вызванное деформацией, мало, однако может быть точно измерено с помощью моста Уитстона (рис. 2.6).

На электрической схеме устройства тарировки (см. рис. 1.6) наглядно представлено расположение тензористоров: R_1 и R_2 – балансировочные тензорезисторы, которые включены в электрическую схему самого усилителя; R_x – тензорезистор, наклеенный на испытуемый образец, R_0 – тензорезистор, наклеенный на тарировочную балку. Тензорезистор, наклеенный на образец, при тарировке служит компенсационным, при дальнейшем экспериментальном исследовании он становится рабочим, а тот тензорезистор, по которому проводилась тарировка – компенсационным. Такой подход исключает влияние температурного фактора. Предложенная процедура используется для тарировки каждого тензорезистора, используемого при испытании.

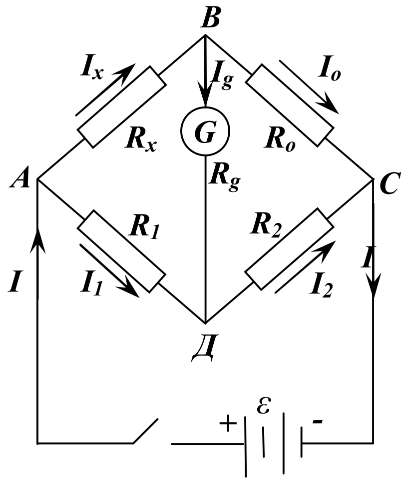


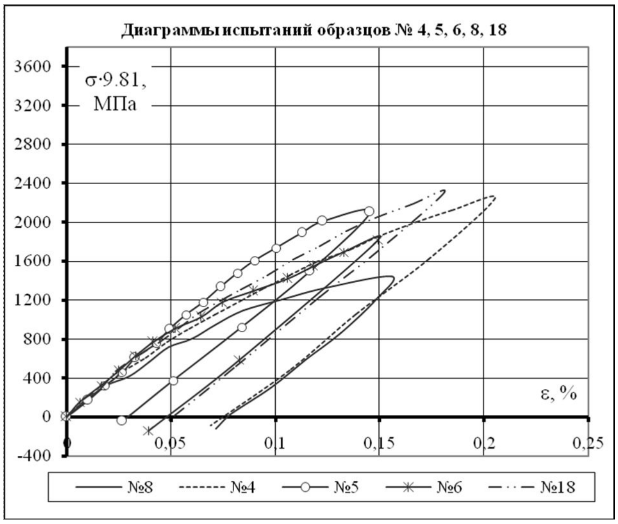
Рис. 2.6. Схема моста Уитстона:

R_x, R_0, R_1 и R_2 - сопротивления; *ε* - источник тока; *G* – гальванометр.

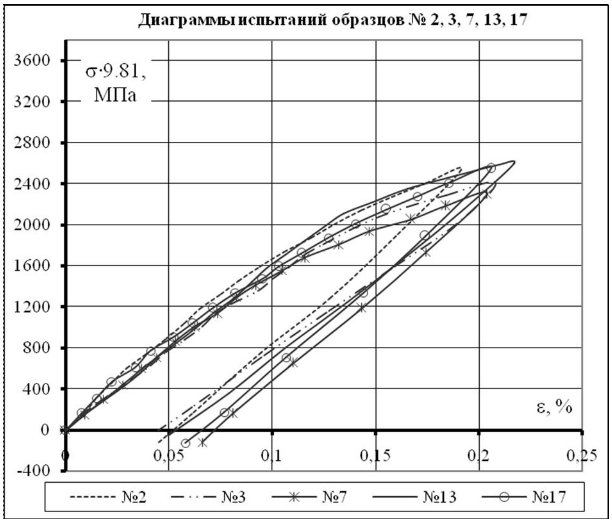
Наклейка датчиков (с использованием двухкомпонентного эпоксидного клея) осуществляется с соблюдением всех соответствующих норм.

2.2. Экспериментальное исследование трубчатых образцов из стали марки 40Х

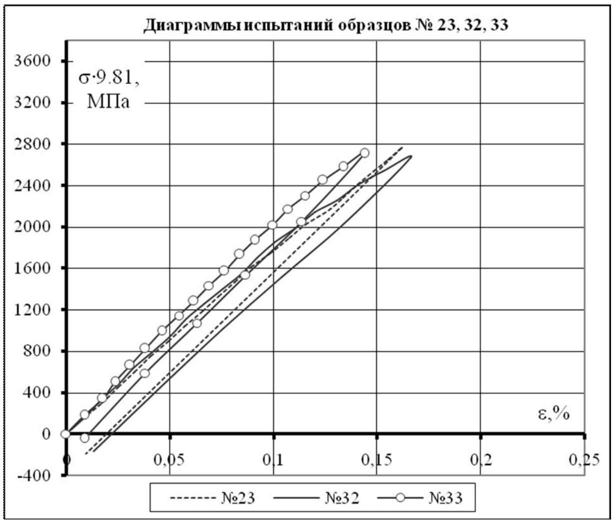
Программа испытаний была следующей. Трубчатые образцы сначала испытывались для определения предела упругости (рис. 2.7). Это необходимо в связи с тем, что динамометр установки по растягивающей силе имеет ограничение: выдерживает нагрузку до 3 тонн, при которой предельное значение напряжения в образце, учитывая его размеры, равно 4500·9,81 МПа. По результатам таких пробных испытаний в упругой области были отобраны образцы с низким значением предела упругости, при котором динамометр испытывает нагрузку существенно меньшую 3 тонн, что позволило бы испытывать эти образцы и за пределами упругости. Условный предел упругости устанавливался по допуску на остаточную деформацию в интервале 0,03 – 0,06%.


Диаграммы испытаний образцов № 4, 5, 6, 8, 18
σ·9.81, МПа
ε, %
№8
№4
№5
№6
№18

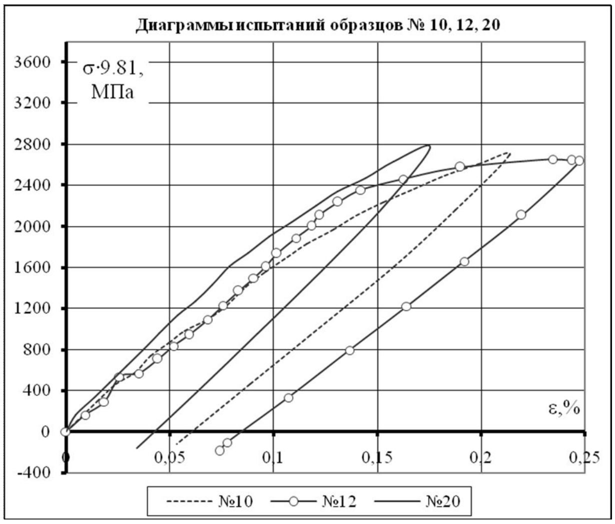
а)


Диаграммы испытаний образцов № 2, 3, 7, 13, 17
σ·9.81, МПа
ε, %
№2
№3
№7
№13
№17

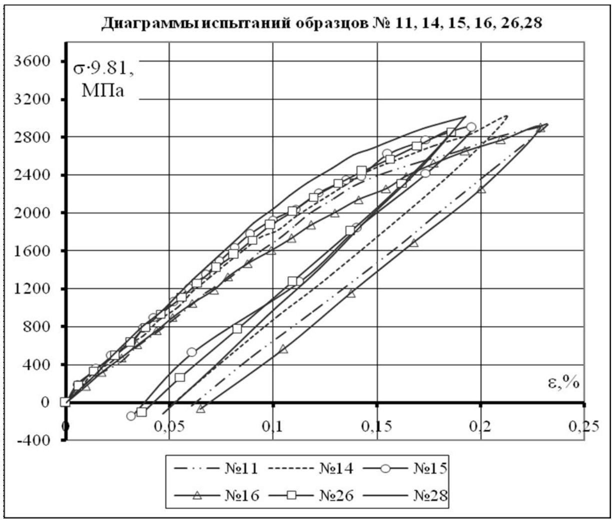
б)


Диаграммы испытаний образцов № 23, 32, 33
σ·9.81, МПа
ε, %
№23
№32
№33

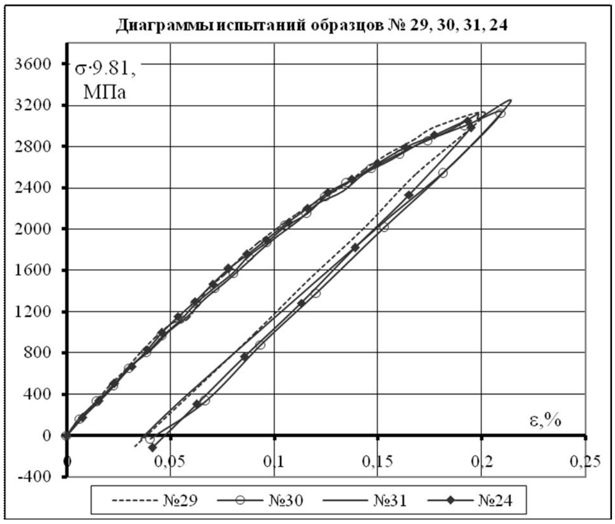
в)


Диаграммы испытаний образцов № 10, 12, 20
σ·9.81, МПа
ε, %
№10
№12
№20

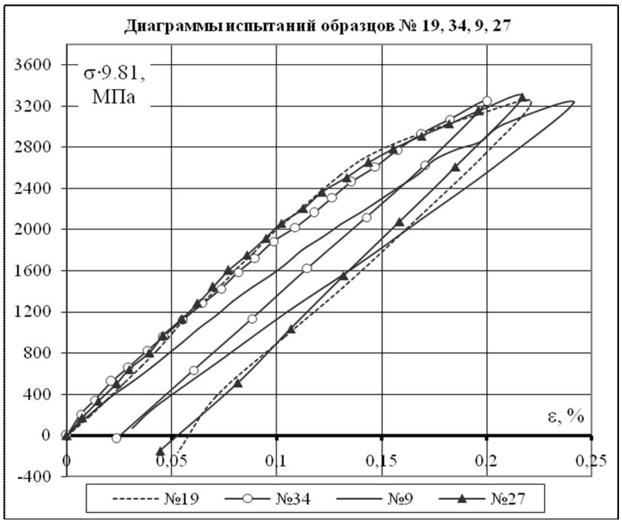
г)


Диаграммы испытаний образцов № 11, 14, 15, 16, 26,28
σ·9.81, МПа
ε, %
№11
№14
№15
№16
№26
№28

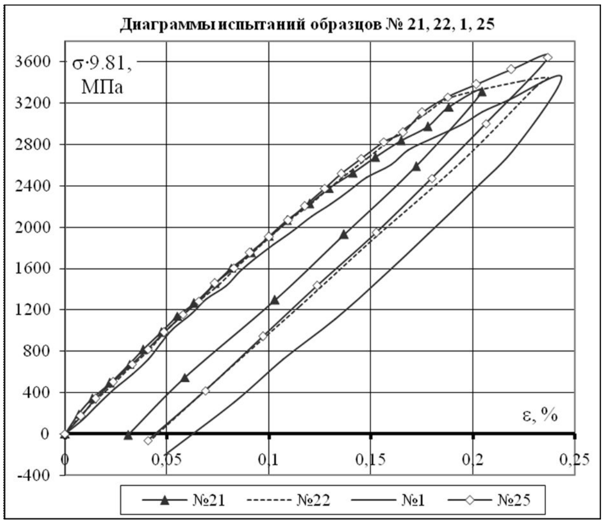
д)


Диаграммы испытаний образцов № 29, 30, 31, 24
σ·9.81, МПа
ε, %
№29
№30
№31
№24

е)



ж)



з)

Рис. 2.7. Определение предела упругости при растяжении по заданному допуску на остаточную деформацию.

Предварительные испытания на осевое растяжение показали, что от образца к образцу (из разных заготовок) диаграммы деформирования по степени упрочнения существенно отличаются друг от друга. Такая картина вызвана, по-видимому, неравномерным охлаждением прутков при их нормализации (в состоянии поставки).

Отобранные таким образом образцы (№ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 20) были испытаны по основной программе: закручивались за пределы упругости, разгружались, затем растягивались с промежуточными разгрузками. При повторном нагружении растяжением фиксировались показания датчиков в осевом, окружном направлениях и датчиков, наклеенных под углом $\pm 45^0$ к оси образца, причем, каждого в отдельности, а не их алгебраическую сумму как в работе [30].

При таком нагружении можно наблюдать ортогональный эффект Баушингера [39], который заключается в следующем. В том направлении, в котором при предварительном кручении действовало сжимающее главное напряжение, возникает эффект Баушингера, а именно: в указанном направлении происходит приращение пластической деформации (обратного знака по сравнению с накопленной при кручении) при (растягивающем) напряжении, по модулю заметно меньшем достигнутого при кручении. В то же время в направлении действовавшего растягивающего главного напряжения при кручении развивается упругая деформация вплоть до напряжения, достигнутого при предварительном нагружении. Разность приращений деформаций в данных двух направлениях при растяжении приводит к уменьшению накопленной деформации сдвига при кручении, т.е. к пластической раскрутке образца. Подобный эффект впервые наблюдался в 1950-х гг. М. Фейгиным [26]: тонкостенный трубчатый образец растягивался и закручивался, затем крутящий момент снимался с одновременным увеличением растягивающей силы. В результате на последнем этапе нагружения наблюдалась подобная описанной пластическая раскрутка образца.

В качестве зачетных в данной работе представлены результаты испытаний двух образцов: №3 и №20.

Образец №3

Образец №3 предварительно был нагружен осевой силой в упругой области и разгружен. Диаграмма деформации ε, в осевом направлении приведена на рис. 2.8.

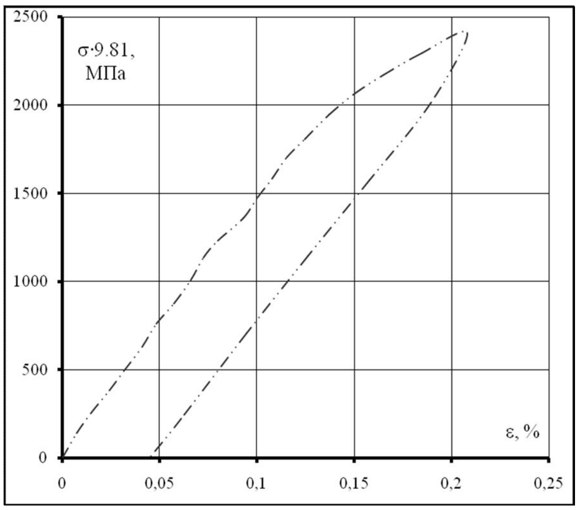


Рис. 2.8. Экспериментальная диаграмма деформирования образца №3 при предварительном нагружении растягивающей силой.

Далее, следуя программе испытания, образец №3 претерпел деформацию кручения, разгрузки и последующее нагружение растягивающей силой.

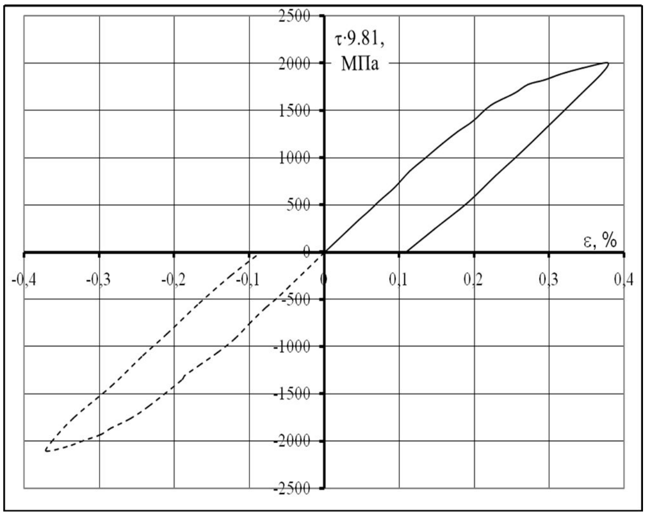


Рис. 2.9. Главные деформации при кручении образца №3.

Диаграммы проведенного испытания образца №3 приведены на рис. 2.9 и рис. 2.10 и отражают описанную выше картину приращения пластических деформаций в указанных направлениях. На диаграмме (см. рис. 2.9) показаны деформации при кручении, полученные датчиками, наклеенными под углом 45^0 к оси образца (в растягивающем главном направлении – сплошная линия; в сжимающем главном направлении – штриховая линия). Как видно из диаграммы, образец приобрел остаточную деформацию и сопротивление материала растяжению и сжатию примерно одинаково. На рис. 2.10 представлена диаграмма рис. 2.9, на которую наложена диаграмма в этих направлениях при повторном нагружении осевой силой. При повторном нагружении растяжением оба указанных датчика фиксируют деформацию относительного удлинения, причем датчик, фиксировавший деформацию сжатия при кручении, при повторном нагружении растяжением фиксирует переход за предел упругой области раньше, чем датчик, фиксировавший деформацию растяжения при кручении. Именно этим и можно охарактеризовать ортогональный эффект Баушингера Соответственно, и пластическую деформацию первый датчик начинает регистрировать раньше, чем второй (см. рис. 2.10 точки A и A').

Действительно, разгрузка из точки A в направлении предварительного сжимающего напряжения при кручении выявила остаточную деформацию, т.е. в этом направлении возник эффект Баушингера, тогда как разгрузка из точки A' в направлении, в котором при предварительном кручении действовало растягивающее напряжение не привела к появлению остаточной деформации. Далее величины деформаций, полученные от двух датчиков при уровне напряжении 1900 МПа, достигнутом при первом этапе нагружения кручением, оказываются равными. Следовательно, в этот момент история предварительного нагружения уже не сказывается.

Достоверность полученных диаграмм деформирования подтверждается тем, что линия нагрузки и разгрузки параллельны. Различие в наклоне линий разгрузок при предварительном кручении и повторном нагружении объясняется сменой вида напряженного состояния и соответствует обобщенному закону Гука.

Упругие характеристики по результатам испытания образца №3: модуль упругости E=1,63·10^5 МПа; коэффициент Пуассона μ=0,286; модуль сдвига G=105 ГПа.

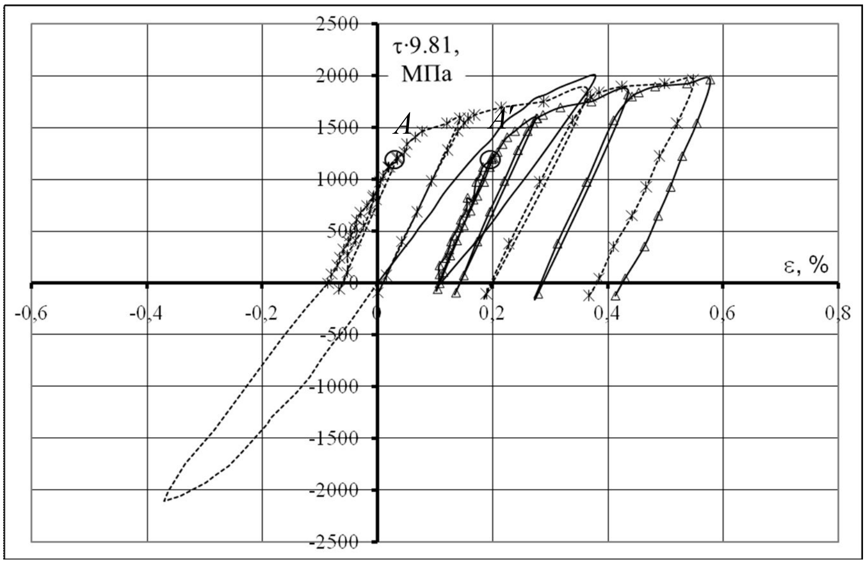


Рис. 2.10. Сопоставление деформации при повторном нагружении растяжением образца №3 в направлениях, которые были главными при предварительном чистом кручении и разгрузки с деформациями в этих же направлениях при повторном нагружении растяжением (штриховая линия со звездочками – деформация в направлении предварительного сжимающего главного напряжения; сплошная с треугольниками – деформация в направлении предварительно растягивающем главном напряжении).

Образец № 20.

Диаграмма испытания образца в упругой области (осевой датчик) приведена на рис. 2.11.

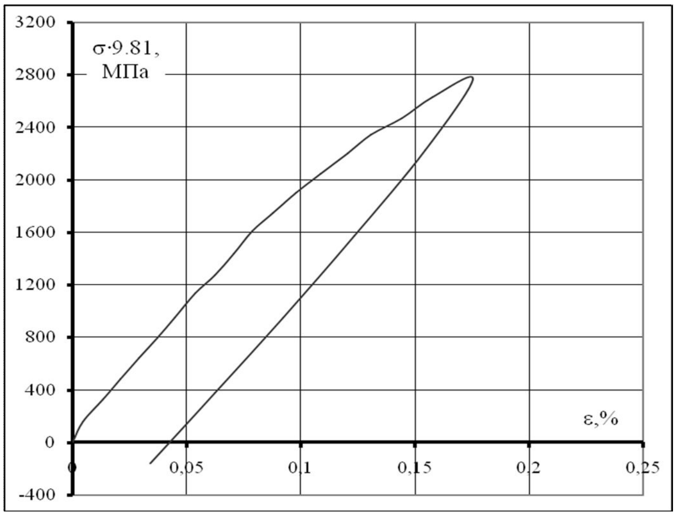


Рис. 2.11. Экспериментальная диаграмма деформирования образца №20 при предварительном нагружении растягивающей силой (для выявления предела упругости по допуску на остаточную деформацию).

Повторение вышеуказанной программы нагружения для образца №20 (рис. 2.12.) дало картину эффекта Баушингера, судя по понижению предела текучести, но в накоплении пластической деформации произошла задержка, а т.к. предельная нагрузка для установки по растягивающей силе была задана, то не было возможности наблюдать дальнейшее развитие пластической деформации и, соответственно, эффекта «забывания» истории нагружения, наблюдаемого при испытании образца №3.

Упругие характеристики: E=2,2·10^5 МПа; μ=0,327; G=83,38 ГПа.

Попытка в полном объеме осуществить намеченный предварительно комплекс испытаний, включая определение зависимости «интенсивность напряжений – интенсивность деформаций» при разных видах напряженного состояния, не удалась, ввиду начальной анизотропии стали 40Х. Попытка отжига образцов с последующей нормализацией (во избежание появления окалины на образцах, образцы при термообработке помещались в чугунную стружку) также не привела к успеху, что связано, по-видимому, с устойчивыми структурными изменениями, которые нельзя изменить термообработкой. Вследствие указанного, комплекс намеченных испытаний на произвольное сложное нагружение был отменен и дальнейшее исследование возможности использования сопротивления сдвигу как основной прочностной характеристики материала получило продолжение в области исследования механических характеристик горных пород.

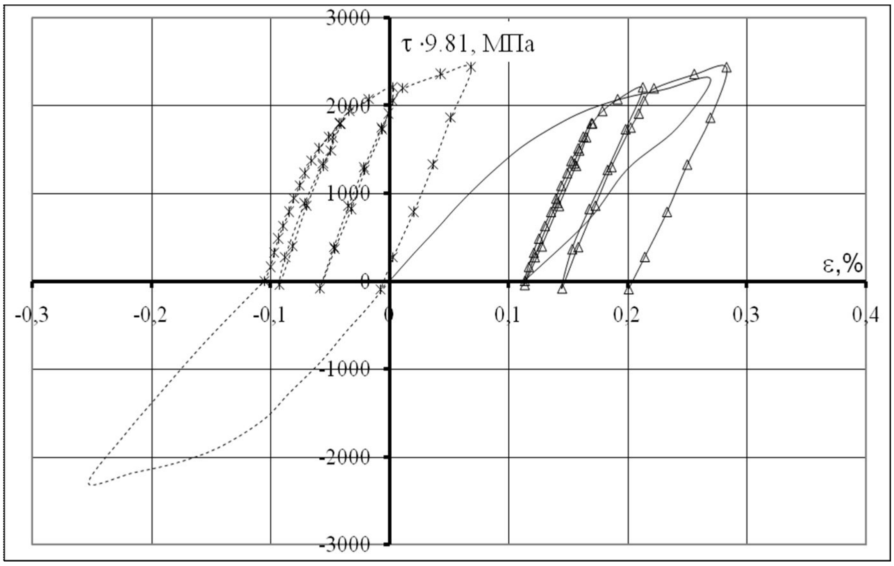


Рис. 2.12. Сопоставление деформации при повторном нагружении растяжением образца №20 в направлениях, которые были главными при предварительном чистом кручении и разгрузки с деформациями в этих же направлениях при повторном нагружении растяжением (штриховая линия со звездочками – деформация в направлении предварительного сжимающего главного напряжения; сплошная с треугольниками – деформация в направлении предварительно растягивающего главного напряжения)

Заключение.

Проведено экспериментальное исследование тонкостенных трубчатых образов марки стали 40Х с целью изучения ортогонального эффекта Баушингера как проявление деформационной анизотропии материала. Показано, что после закручивания тонкостенного трубчатого образца за предел текучести и разгрузки, при повторном нагружении растяжением возникает (пластическая) раскрутка образца. Такое проявление деформационной анизотропии следует оценивать не только по величине вторичного предела текучести, но и по изменению предварительно накопленной пластической деформации.

ГЛАВА 3
АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГОРНЫХ ПОРОД

Предлагается метод определения предельных характеристик горных пород на основе синтеза двух методов: А.Н. Ставрогина и Т.Б. Дуйшеналиева – К.Т. Койчуманова, а также с использованием понятия сопротивление сдвигу [95, 96].

Известно, что в координатах нормального и касательного напряжений в площадке с заданной нормалью напряженное состояние представляется в виде кругов Мора. Используя уравнение круга Мора, можно, задавая компоненты тензора напряжений (σ_{ij}), определить главные напряжения σ_i, и наоборот: задавая σ_i, вычислить σ_{ij} в любой точке тела в случае однородного напряженно-деформированного состояния.

А.Н. Ставрогин предлагает связь между главными предельными напряжениями представлять в виде соответствующей экспоненциальной зависимости. Рассматривая такое представление и полагая, что предел упругости на растяжение совпадет с пределом прочности на растяжение, можно определенным образом [3] определить предел прочности при растяжении. При этом, метод определения предела упругости, предложенный А.Н. Ставрогиным, неоднозначен.

Как было указано во введении, метод Т.Б. Дуйшеналиева – К.Т. Койчуманова позволяет рассмотреть не только область сжимающих, но и растягивающих напряжений.

В данной работе выбрано представление связи между главными напряжениями σ_1 и σ_3 в виде экспоненты (подобно тому как было предложено в работах Б.Д. Аннина [97] и А.Н. Ставрогина [3]), поскольку такая зависимость достаточно хорошо отображает предельные круги Мора при произвольном трехосном сжатии, а для определения предела прочности на растяжение используется представление зависимости $\sigma_1(\sigma_3)$ в виде гиперболы [58].

3.1. Анализ результатов исследования Т.Б. Дуйшеналиева – К.Т. Койчуманова

Напряженные состояния, при которых разрушается материал, могут быть представлены, согласно Мору, предельными кругами в координатах $\sigma - \tau$ (нормальное – касательное напряжения)

$$\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2,$$

где главные напряжения σ_1, σ_3 соответствуют моменту наступления разрушения.

Это уравнение (для удобства его исследования) записывается в виде [58]:

$$\varphi(\sigma,\tau,\sigma_1) = \sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_1 + \sigma_3)\sigma + \sigma_1\sigma_3 = 0, \qquad (3.1)$$

где параметром семейства является напряжение σ_1 [58].

Выражение (3.1) можно рассматривать как уравнение второй степени относительно главных напряжений σ_1 и σ_3 [98].

Общее уравнение второй степени относительно x и y, имеет вид [99]:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (3.2)$$

где $a_{ik} = a_{ki}$ (i, k=1, 2, 3).

Для рассматриваемого случая (3.1), принимая $\sigma_1 = x$, $\sigma_3 = y$, коэффициенты a_{ik} равны:

$$\begin{gathered} a_{11} = a_{22} = 0;\ a_{12} = a_{21} = 1/2; \\ a_{13} = a_{31} = -\sigma/2;\quad a_{23} = a_{32} = -\sigma/2;\quad a_{33} = \sigma^2 + \tau^2. \end{gathered} \qquad (3.3)$$

Инварианты уравнения (3.2), по которым судят о классификации кривой, таковы:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \; A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Согласно (3.3):

$$D = -1/4 < 0, \; A = -\tau^2/4 \neq 0.$$

В соответствии с этими значениями инвариантов A и D, выражение (3.1) представляет собой уравнение гиперболы [99].

В каноническом виде уравнение гиперболы в пространстве главных напряжений (рис. 3.1 а) представляется следующим образом [58]:

$$\sqrt{\sigma_1{}^2 + (\sigma_3 - b)^2} - \sqrt{\sigma_1{}^2 + (\sigma_3 - a)^2} = d \; (a, b, d - const).$$

Разрешая это уравнение относительно σ_3, получено [57]:

$$\sigma_3 = \frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{d^2\sigma_1{}^2}{(a-b)^2 - d^2} + \frac{d^2}{4}}. \tag{3.4}$$

Согласно известной теореме [100], огибающая семейства вида (3.1) должна удовлетворять также уравнению:

$$\varphi_c(\sigma, \tau, c) = 0 \; (\varphi_c = \partial\varphi/\partial c),$$

а координатами огибающей будут:

$$\sigma = \frac{\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3'}{1+\sigma_3'}; \; \tau = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1+\sigma_3'}\sqrt{\sigma_3'}; \; \left(\sigma_3' = \frac{\partial\sigma_3}{\partial\sigma_1}\right). \tag{3.5}$$

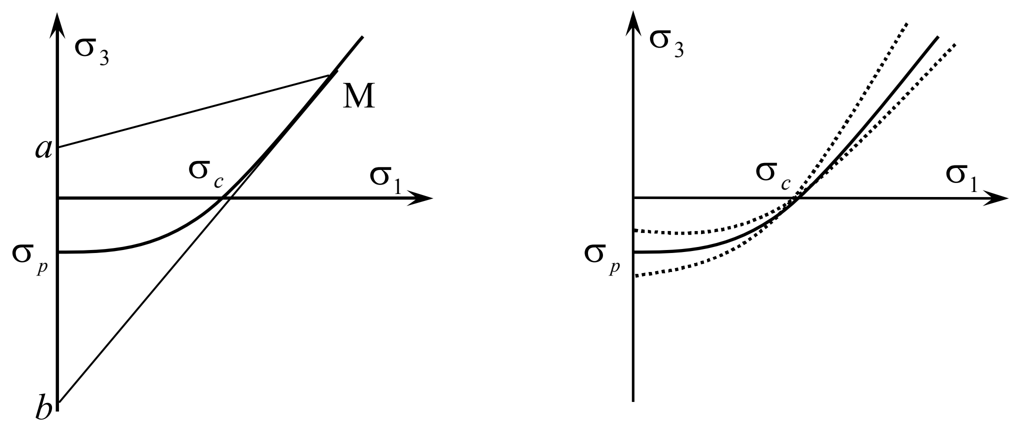
Таким образом, семейство предельных кругов в координатах нормального и касательного напряжений является в координатах главных напряжений семейством гипербол. Непосредственными расчетами установлено [101]: если каждая гипербола (при указанном выше ее представлении) при этом проходит через значение предела прочности на одноосное сжатие σ_c^s (рис. 3.1. б), то предел прочности на растяжение σ_p изменяется незначительно и имеет значение, близкое к экспериментальному.

Для определения производной σ'_3, входящей в выражения (3.5), необходимо знать зависимость между главными напряжениями $\sigma_3 = \sigma_3(\sigma_1)$; согласно (3.4) имеем:

$$\sigma_3' = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\dfrac{d^2\sigma_1^2}{(a-b)^2 - d^2} + \dfrac{d^2}{4}}} \frac{d^2}{(a-b)^2 - d^2}. \tag{3.6}$$

Введем замену параметров гиперболы:

$$\frac{a+b}{2} = A, \ \frac{d^2}{4} = B^2, \ \frac{d^2}{(a-b)^2 - d^2} = Q.$$



а) б)

Рис. 3.1. Зависимость межу главными напряжениями предельных состояний, построенная согласно выражению (3.4), где σ_1, σ_3 – координаты т. М.

Учитывая (3.6) выражение (3.4) принимает следующий вид:

$$\sigma_3 = A + \sqrt{Q\sigma_1^2 + B^2}, \tag{3.7}$$

а (3.6) записывается так:

$$\sigma_3' = \frac{\sigma_1}{\sqrt{Q\sigma_1^2 + B^2}} Q. \tag{3.8}$$

Выражая зависимость $\sigma_1 = f(\sigma_3)$ в виде гиперболы, можно определить [58] входящие в эту зависимость материальные параметры, опираясь на экспериментальные данные при каких-либо двух напряженных состояниях трехосного сжатия (выбираемых в качестве «опорных» точек).

Параметр *Q*, как и в [102], исключается из формулы (3.7) на основании свойства огибающей к выполаживанию, т.е. огибающая при $\sigma_1 \to \infty$ стремится к линии параллельной оси σ, а касательное напряжение стремится к максимальному значению, в результате чего, согласно этому условию предельного перехода и выражению для τ в (3.5) получим:

$$\left(\sigma_3'\right)^2 - 2\sigma_3' + 1 = 0 .$$

Решением этого уравнения является

$$\sigma'_3 = 1. \tag{3.9}$$

Путем подстановки (3.9) в (3.8), получим уравнение второй степени для параметра *Q*:

$$\sigma_1^2 Q^2 - \sigma_1^2 Q - B^2 = 0 ,$$

решением которого, при $\sigma_1 \to \infty$, является *Q*=1. Следовательно (3.7) принимает вид:

$$\sigma_3 = A + \sqrt{\sigma_1^2 + B^2} , \tag{3.10}$$

$$\sigma_3' = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + B^2}} . \tag{3.11}$$

Проанализируем полученную таким образом зависимость $\sigma_3(\sigma_1)$.

Максимальное касательное напряжение ($\tau_{\max}$) при напряженных состояниях, превышающих некоторое предельное состояние c_n (т.е. при $c \geq c_n$), остается практически постоянным [103].

Иначе говоря, можно считать, что в этих случаях критерий Кулона – Мора «переходит» в критерий Треска. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial c}\tau_{\max}\Big|_{c>c_n} = 0, \tag{3.12}$$

где

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3). \tag{3.13}$$

Подставив (3.10) в (3.13) получим

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - A - \sqrt{\sigma_1^2 + B^2}).$$

Тогда,

$$\frac{\partial}{\partial c}\tau_{\max}\Big|_{c>c_n} = \frac{1}{2}(\sigma_1)_c[1 - \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + B^2}}] = 0 \quad \left((\sigma_1)_c = \frac{\partial \sigma_1}{\partial c}\right). \tag{3.14}$$

Условие (3.14) удовлетворяется в том случае, когда либо $(\sigma_1)_c = 0$ (при *A*, *B* – *const*), либо параметр *B* равен нулю, что в обоих случаях невозможно. Из чего следует – параметры *A* и *B* не константы, а функции параметра *c*, что является еще одним доказательством того, что семейство кругов Мора в пространстве главных напряжений представляет собой семейство гипербол.

Основным преимуществом зависимости $\sigma_3(\sigma_1)$ в виде гиперболы является возможность определения предела прочности на растяжение по экспериментальным данным трехосного сжатия [101]. В настоящей работе показано, что для достижения этой цели достаточно использовать в качестве исходных данных только предел прочности при одноосном сжатии и координаты огибающей к предельному кругу Мора на сжатие.

Предел прочности на растяжение (σ_p), учитывая введенные обозначения (3.6) и полученное значение параметра *Q*, записывается в следующем виде

$$\sigma_p = A + B. \tag{3.15}$$

Решая систему из соотношений (3.10) и (3.11) с использованием (3.5) для напряженного состояния *c*=0, относительно параметров *A*, *B* и напряжения $\sigma_1(c)$, при известном пределе прочности на сжатие σ_c^s, получим выражения для параметров *A* и *B*:

$$A = -\sigma_c^s / \left(\sigma^0/\tau^0\right)^2, \; B = -A\sqrt{1 - \left(\sigma^0/\tau^0\right)^4}, \tag{3.16}$$

где σ^0 и τ^0 – координаты точки касания огибающей круга Мора при одноосном сжатии.

Таким образом, выражение для отношения σ^0/τ^0 согласно (3.15) и (3.16) записывается в виде:

$$\sigma^0/\tau^0 = \sqrt{\frac{2\sigma_c^s/|\sigma_p|}{1+(\sigma_c^s/\sigma_p)^2}}\,, \tag{3.17}$$

откуда выражение для предела прочности на растяжение имеет вид

$$|\sigma_p| = \frac{\sigma_c^s\left(1-\sqrt{1-(\sigma^0/\tau^0)^4}\right)}{(\sigma^0/\tau^0)^2}.$$

Перейдем к рассмотрению условия прочности на основе концепции скольжения.

3.2. Определение пределов прочности на основе концепции скольжения

Предварительно укажем следующее: уравнение кругов Мора можно представить еще в виде, отличном от (3.1) в координатах $(\sigma-\tau)$ [102]:

$$\varphi(\sigma,\tau,c) = \sigma^2 + \tau^2 - (1+c)\sigma_1\sigma + c\sigma_1^2 = 0\,,$$

где в качестве параметра данного семейства кругов фигурирует $c = \sigma_3/\sigma_1$ – вид напряженного состояния.

В этом случае координаты огибающей (согласно теореме о ее существовании) имеют вид [102]:

$$\sigma = \frac{\sigma_1(\sigma_1 + 2c(\sigma_1)_c)}{(\sigma_1 + (1+c)(\sigma_1)_c)};\ \tau = \frac{(1-c)\sigma_1\sqrt{(\sigma_1 + c(\sigma_1)_c)\cdot(\sigma_1)_c}}{\sigma_1 + (1+c)\cdot(\sigma_1)_c}. \tag{3.18}$$

Считается [104], следуя Мору, что первоначальные локальные скольжения возникают на площадке, на которой касательное τ_ν и нормальное σ_ν напряжения связаны следующим соотношением

$$\tau_v = S_0 - \mu\,\sigma_v\,, \tag{3.19}$$

где S_0 и μ – параметры материала, которые определяются из эксперимента;

ν – нормаль к рассматриваемой площадке.

Обычно параметр S_0 называется коэффициентом сцепления, а μ – тангенсом угла внутреннего трения, которые в общем случае являются переменными параметрами, зависящими от вида напряженного состояния.

Правая часть выражения (3.19) представляет собой сопротивление скольжению (сдвигу).

Нормальное и касательное напряжения в плоскости, повернутой на угол β относительно площадки действия максимального касательного напряжения определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_\beta &= \sigma_0 + \tau_{\max} \sin 2\beta, \\ \tau_\beta &= \tau_{\max} \cos 2\beta, \end{aligned} \tag{3.20}$$

где σ_0 – среднее напряжение

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\,. \tag{3.21}$$

Согласно определению, сопротивление сдвигу (S_β) выражается в данном контексте следующим образом:

$$S_\beta = S_0 - \mu(\sigma_0 + \tau_{\max} \sin 2\beta)\,. \tag{3.22}$$

Начиная от случая одноосного сжатия, и до определенного вида напряженного состояния ($c = \sigma_3 / \sigma_1$) при трехосном сжатии разрушение происходит путем среза. При первом скольжении касательное напряжение $\tau_\beta(\beta)$ достигает значения сопротивления сдвигу в направлении этого скольжения, т.е. касательные к кривым $S_\beta = S_\beta(\beta)$ и $\tau_\beta = \tau_\beta(\beta)$ совпадут:

$$\frac{dS_\beta}{d\beta} = \frac{d\tau_\beta}{d\beta} \text{ при } \beta = \beta_0, \tag{3.23}$$

где β_0 – угол, определяющий направление первого скольжения, отсчитываемый от направления действия максимального касательного напряжения $\tau_{\max}$.

В плоскости среза соотношение между нормальным и касательным напряжениями до определенных значений параметра c подчиняется критерию

Кулона – Мора с переменными коэффициентом сцепления и углом внутреннего трения. Тангенс угла внутреннего трения определяется, если известна ориентация плоскости среза, характеризуемая (отсчитываемым от направления максимального касательного напряжения) углом β_0. Из (3.23) учитывая (3.19) – (3.22) вытекает, что

$$\mu = tg 2\beta_0 .$$

Из полученного соотношения видно, что величина угла β_0 определяется параметром μ, величину которого будем считать зависящей от вида напряженного состояния.

Естественно считать, что при пропорциональном нагружении в площадках, отмечаемых углом β_0, интенсивность скольжений с ростом уровня напряжений наибольшая, и именно по этим площадкам происходит срез при разрушении образца.

Проводя эксперименты над различными горными породами, Б.Г. Тарасовым [103] было обнаружено, при напряженном состоянии, когда среднее главное напряжение достигает значение максимального касательного напряжения, горная порода разрушается подобно пластичному материалу: срез происходит в плоскости максимального касательного напряжения. Следовательно, в этом случае угол $\beta_0 = 0$, а $c = 1/3$. Нетрудно показать, что при $c = 1/3$ из соотношений (3.20) и (3.21) вытекает [105; 106; 107], что

$$\frac{\sigma_{\beta_0}}{\tau_{\beta_0}} = 2 . \qquad (3.24)$$

При c отличных от $1/3$ имеем

$$\frac{\sigma_{\beta_0}}{\tau_{\beta_0}} = \frac{(1+c)+(1-c)\sin 2\beta_0}{(1-c)\cos 2\beta_0} = k(c). \qquad (3.25)$$

Будем полагать, что отношение (3.25), в общем случае, линейно изменяется от значения $k_0 = k(0)$ до $k_n = k(c_n)$:

$$k = k(c) = \frac{1}{c_n}[ck_n + (c_n - c)k_0], \qquad (3.26)$$

где k_n равно значению, получаемому для предельного напряженного состояния (c_n), при котором еще справедлив критерий Кулона – Мора.

Анализируя геометрическое построение круга Мора при одноосном сжатии (рис. 3.2), величина k_0 может быть выражена через угол среза (α_0^0):

$$k_0 = \frac{1+\cos 2\alpha_0^0}{\sin 2\alpha_0^0} \quad (\alpha_0^0 = 45^0 - \beta_0^0,\ \alpha_0^0 = \alpha_0\big|_{c=0},\ \beta_0^0 = \beta_0\big|_{c=0}),$$

где α_0 - угол среза, отсчитываемый от направления максимального главного напряжения, определяется экспериментально.

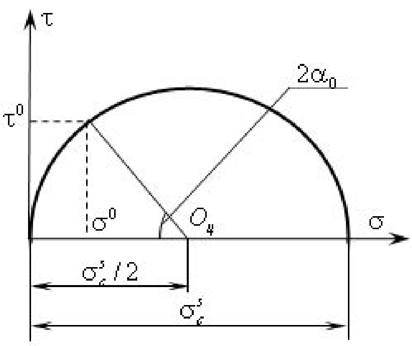


Рис. 3.2. Круг Мора при одноосном сжатии.

На этом рисунке $O_ц$ – центр круга Мора при одноосном сжатии; σ^0, τ^0 – координаты точки касания огибающей круга на одноосное сжатие; σ_c^s – предел прочности при одноосном сжатии; α_0^0 – угол среза при c=0.

Из соотношения (3.25) можно определить угол среза β_0 при произвольном c:

$$\sin 2\beta_0 = \frac{-(1+c) + k\sqrt{(1+k^2)(1-c)^2 - (1+c)^2}}{(1-c)(1+k^2)}. \qquad (3.27)$$

Учитывая (3.20), (3.21) и (3.25), условие (3.19) можно представить в следующем виде:

$$\sigma_1^s = \sigma_1^s(c) = \frac{2S_0^e}{(1-c)(\cos 2\beta_0 + k\sin 2\beta_0)}, \qquad (3.28)$$

где σ_1^s – предел прочности при произвольном напряженном состоянии для $c \le c_n$.

Величина S_0^s, определяется из сопоставления с экспериментальными данными. Подобно аналогичному методу [3] выражения пределов прочности, S_0^s представляется в следующем виде:

$$S_0^s = S_0^{0s} e^{\left(\xi c + \eta c^2\right)}, \tag{3.29}$$

где ξ и η в общем случае определяются [15] по экспериментальным данным для пределов прочности при каких-либо двух видах напряженного состояния.

При c=0, учитывая (3.28) и (3.29), получим выражение для S_0^{0s}:

$$S_0^{0s} = \frac{1}{2}\sigma_c^s (\cos 2\beta_0^0 + k_0 \sin 2\beta_0^0) \quad (k_0 = k|_{c=0}). \tag{3.30}$$

Параметры ξ и η, входящие в выражение (3.29) предлагается определить в первом приближении, используя только эксперимент на одноосное сжатие.

Используя (3.28), найдем

$$(\sigma_1^s)_c = \sigma_1^s R(c), \tag{3.31}$$

где

$$R(c) = \xi + 2c\eta + \frac{1}{1-c} - \frac{(k - tg2\beta_0^0)\cdot(\sin 2\beta_0)_c + k_c \sin 2\beta_0^0}{\cos 2\beta_0^0 + k \sin 2\beta_0^0}, \tag{3.32}$$

где $(\sin 2\beta_0)_c = \frac{\partial}{\partial c}\sin 2\beta_0\Big|_{c=0}$; $k_c = \frac{\partial}{\partial c}k(c)$.

Сопоставляя выражения (3.18) и (3.31), получим

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{1+2cR}{(1-c)\sqrt{(1+cR)R}}. \tag{3.33}$$

В случае одноосного сжатия ($c = 0$) из (3.33) имеем

$$R_0 = R(0) = 1\big/\left(\sigma^0/\tau^0\right)^2 \; R_0 = R(0) = 1\big/(\sigma^0/\tau^0)^2, \tag{3.34}$$

где

$$\sigma^0/\tau^0 = \left(\sigma/\tau\right)\big|_{c=0}. \tag{3.35}$$

Из (3.32) при c=0 получим выражение для параметра ξ:

$$\xi = R_0 - 1 + \frac{(\sin 2\beta_0)_c \cdot (k - tg 2\beta_0^0) + k_c \sin 2\beta_0^0}{\cos 2\beta_0^0 + k \sin 2\beta_0^0}. \quad (3.36)$$

Второе условие (для определения параметра η) получим, используя свойства огибающей к кругам Мора.

Координаты точки касания огибающей круга на одноосное сжатие (σ^0/τ^0) определяются по следующим двум методам [108].

Первый метод состоит в определении отношения σ^0/τ^0 через известное значение угла среза α_0^0 и предела прочности на сжатие σ_c^s. Анализируя геометрическое построение круга Мора при одноосном сжатии, представленное на рис. 3.2, для отношения σ^0/τ^0 имеем

$$\sigma^0 / \tau^0 = \frac{1 - \cos 2\alpha_0^0}{\sin 2\alpha_0^0}. \quad (3.37)$$

С другой стороны, отношение σ^0/τ^0 можно представлять как функцию от истинной пористости (P) ряда горных пород:

$$\sigma^0/\tau^0 = f(P). \quad (3.38)$$

Определив, согласно (3.17), значения соотношений σ^0/τ^0 и при известных данных пористости горных пород, выражение (3.38) предлагается представить в виде графической зависимости $\sigma^0/\tau^0 - f(P)$, аппроксимируя которую, можно получить аналитическое выражение вида:

$$\sigma^0/\tau^0 = p + g \cdot \ln(P), \quad (3.39)$$

где p и g имеют определенные значения для конкретных горных пород.

Зависимость $\sigma^0/\tau^0 - f(P)$ для материалов – талькохлорит, мрамор I и мрамор II; диабаз; выбросоопасный и не опасный по выбросам песчаники; песчаники П-0, П-01, П-03, П-026, Д-8; известняк и известняк Д-6; кварцевый диорит Д-2 [3] представлена на рис. 3.3.

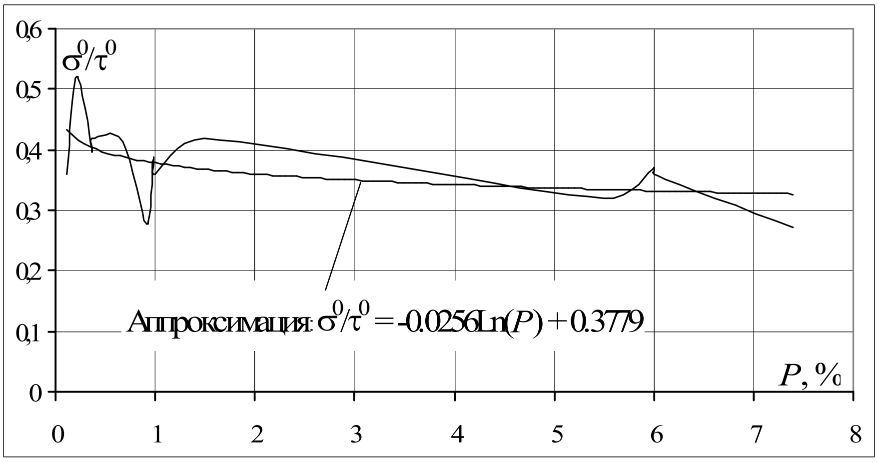


Рис. 3.3. Зависимость отношения σ^0/τ^0 от пористости для рассматриваемых материалов.

Определив тем или иным способом величину σ^0/τ^0, условие для параметра η, входящего в формулу (3.29), получим следующим образом.

Из (3.12) вытекает

$$(\sigma_1^s)_c = \sigma_1^s \frac{1}{1-c} \, (c \ge c_n). \tag{3.40}$$

При достижении предельного напряженного состояния и далее с ростом параметра *c* угол β_0 не изменяется, т.е.

$$(\sin 2\beta_0)_c\big|_{c \ge c_n} = 0. \tag{3.41}$$

Таким образом, из условия (3.40), с учетом (3.31) и (3.32) при $c = c_n$ получаем выражение для параметра η:

$$\eta = -\frac{\xi}{2c_n}.$$

Было установлено [109], что, полагая отношение $\sigma_{\beta_0}/\tau_{\beta_0} = k_1$ постоянным (согласно (3.24), $k_1 = 2$) при $c \in [0;1/3]$ можно с достаточно хорошим приближением к эксперименту вычислить угол среза ($\alpha_0 = 45^0 - \beta_0$); наилучшее приближение получено для талькохлорита: при $c = 0$, $\alpha_0^0 = 26{,}6^0$ и при $c = 1/3$, $\alpha_0 = 45^0$, а при $0 < c < 1/3$ угол α_0 плавно изменяется от указанного минимального до максимального значения.

Отношение (3.25) достаточно близко описывает экспериментально наблюдаемую ориентацию плоскости среза не только талькохлорита, но и известняка, известняка Д-6 и песчаника П-0 [3]. Причем, параметр k для последних трех пород принимается зависящим от вида напряженного состояния и определяется из (3.26). Эту группу материалов предлагается выделить в **первую группу** [110].

Однако, для других материалов, особенно для песчаников, оказалось, что угол α_0^0 и при указанном значении параметра k_1 заметно завышается. Поэтому было проверено другое возможное соотношение между нормальным и касательным напряжениями в плоскости среза [111-113]. Исходные предпосылки для этого таковы.

При $\alpha_0 = 45^0$ $(\beta_0 = 0)$ отношение (3.28) представляет собой отношение среднего напряжения (3.24) к максимальному касательному напряжению (3.13). Предельным напряженным состоянием названо (раздел 3.1) такое состояние (c_n), при котором критерий Кулона – Мора переходит в критерий Треска. При этом дополнительно надо учитывать, что угол среза $\alpha_0 \to 45^0$, т.е. примем $c_n = c\big|_{\alpha_0 = 45^0}$. Выяснилось, что для большой группы пород, в отличие от первой (судя по тенденции изменения экспериментального значения угла среза), предельное напряженное состояние наступает при $c_n \approx 1/4$ $(\alpha_0 = 45^0)$, т.е. переход от критерия Кулона-Мора к критерию Треска наступает при $c < 1/3$. Такие материалы объединены во **вторую группу** – выбросоопасный и неопасный по выбросам песчаники; песчаники П-03, П-01, П-026, П-0, Д-8; кварцевый диорит Д-2; диабаз.

Согласно (3.20) и (3.21) обозначим:

$$\sigma_0 \big/ \tau_{\beta_0} = k_2. \tag{3.42}$$

Оказалось, что $k_2\big|_{c_n = 1/4} = 1{,}667$. Полагая k_2=*const*, получим теоретическое значение угла среза $\alpha_0^0 = 18{,}4^0$, что соответствует экспериментальным данным.

При c отличных от 1/4 отношение (3.42) равно

$$\frac{\sigma_0}{\tau_{\beta_0}} = \frac{(1+c)}{(1-c)\cos 2\beta_0}. \qquad (3.43)$$

Таким образом, условие (3.43) расширяет (по сравнению с условием (3.25)) диапазон изменения угла среза с изменением вида напряженного состояния.

Выражение для пределов прочности для второй группы материалов, учитывая соотношение (3.43) и вышеизложенную процедуру, представляется в следующем виде [114]:

$$\sigma_1^s = \sigma_1^s(c) = \frac{2S_0^s \cos 2\beta_0}{(1-c)(1+k_2 \sin 2\beta_0 \cos 2\beta_0)}, \qquad (3.44)$$

где $k_2 = const = 1{,}667$.

Из (3.42) и (3.43) можно определить угол среза β_0 при произвольном c:

$$\cos 2\beta_0 = \frac{(1+c)}{(1-c)k_2}. \qquad (3.45)$$

Выражение для определения параметра S_0^s имеет аналогичный вид, однако, для параметра S_0^{0s}, согласно (3.40), при $c = 0$, записывается так:

$$S_0^{0s} = \frac{\sigma_c^s(1+k_0 \sin 2\beta_0^0 \cos 2\beta_0^0)}{2\cos 2\beta_0^0} \; (k_0 = k_2). \qquad (3.46)$$

На основании вышеуказанных изменений для некоторых соотношений, имеем следующий вид для параметров ξ и η:

$$\xi = R_0 - 1 - \frac{(1+k_2 ctg 2\beta_0^0 \cdot \cos^2 2\beta_0^0)\cdot(\cos 2\beta_0)_c - k_c \sin 2\beta_0^0 \cos^2 2\beta_0^0}{\cos 2\beta_0^0(1+k_2 \sin 2\beta_0^0 \cos 2\beta_0^0)}], \eta = -\frac{\xi}{2c_n}, \qquad (3.47)$$

т.к. $(\cos 2\beta_0)_c = \dfrac{\partial}{\partial c}\cos 2\beta_0\Big|_{c=0}$, $k_c = 0$.

Анализируя экспериментальные значения пределов прочности мрамора I и мрамора II (далее выделяемых в **третью группу**) становится понятным, что для описания деформационного упрочнения таких материалов единая экспоненциальная зависимость с постоянными коэффициентами не подходит

[115]. Трудность заключается в том, что, начиная с напряженного состояния $c \approx 1/4$, значения пределов прочности резко возрастают. Тенденция такого изменения пределов прочности начинает проявляться при $c = 0{,}116$, поэтому переход от одного вида напряженного состояния к другому предлагается учитывать таким образом, что до напряженного состояния c=0,116 расчет производить согласно зависимости (3.24), а при бо́льших c – согласно зависимости (3.43), где $\sigma_0 / \tau_\beta = k_3$. При этом вид напряженного состояния, при котором начинает выполняться критерий Треска «сдвигается» в сторону бо́льших (по сравнению с предыдущими случаями) значений параметра c, а именно c=0,4. Это отражает также экспериментальное изменение значения угла среза (а именно: угол среза стремится к значению 45^0 при c=0,4).

Будем полагать, что переменная k_3, в общем случае, линейно изменяется от значения $k_0 = k_1 = 2$ до $k_n = 2{,}333$:

$$k_3 = k_3(c) = \frac{1}{c_n - c_*}[(c_n - c)(k_0 - k_*) + (c - c_*)k_n],$$

где k_n равно значению, получаемому для предельного напряженного состояния ($c_n = 0{,}4$).

Параметр k_* определим из условия:

$$\left.\frac{\sigma_\beta}{\tau_\beta}\right|_{\beta=\beta_*} = \left.\left(\frac{\sigma_0}{\tau_\beta} + k_*\right)\right|_{\beta=\beta_*}, \tag{3.48}$$

где $\beta_* = \beta_0\big|_{c=0.116}$ при расчете по зависимости (3.24).

Из (3.48), используя (3.25) и (3.43), получим:

$$k_* = tg 2\beta_*.$$

Для корректного расчета пределов прочности для третьей группы материалов по предложенному подходу должны выполняться следующие три условия. Введем новые обозначения: $(\sigma_1^s)_I$ и $(\sigma_1^s)_{II}$ – пределы прочности; S_{0I}, ξ_I, η_I и S_{0II}, ξ_{II}, η_{II} – параметры и константы, определяемые, соответственно, при использовании соотношений $\sigma_{\beta_0} / \tau_{\beta_0}$ и $\sigma_0 / \tau_{\beta_0}$.

$$1)\ (\sigma_1^s)_I\Big|_{c=0,116} = (\sigma_1^s)_{II}\Big|_{c=0,116} \tag{3.49}$$

или

$$\frac{S_{0I}}{m} = S_{0II}^0 \cdot e^{\xi_{II}\cdot 0.116+\eta_{II}\cdot 0.116^2} \cdot n,$$

где

$$m = \cos 2\beta_0 + k_1 \sin 2\beta_0,$$

$$n = \frac{\cos 2\beta_0}{1 + k_3 \sin 2\beta_0 \cos 2\beta_0},$$

а значение параметра S_{0I} считается известным.

$$2)\ \frac{\partial(\sigma_1^s)_I}{\partial c}\Bigg|_{c=0,116} = \frac{\partial(\sigma_1^s)_{II}}{\partial c}\Bigg|_{c=0,116}. \tag{3.50}$$

Из этого равенства следует

$$\xi_I + 2c\eta_I - h = \xi_{II} + 2c\eta_{II} + d,$$

где

$$h = \frac{\sin 2\beta_c (k_1 - tg 2\beta_0)}{\cos 2\beta_0 + k_1 \sin 2\beta_0},$$

$$d = \frac{(1 + k_3 ctg 2\beta_0 \cos^2 2\beta_0)\cos 2\beta_{0c} - (k_3)_c \sin 2\beta_0 \cos^2 2\beta_0}{\cos 2\beta_0 (1 + k_3 \sin 2\beta_0 \cos 2\beta_0)},$$

где $(k_3)_c = \dfrac{\partial}{\partial c} k_3(c)$.

$$3)\ \frac{\partial \tau_{\max}}{\partial c}\Bigg|_{c=0,4} = 0, \tag{3.51}$$

или

$$(\xi_{II} + 2c\eta_{II})\big|_{c=0,4} = 0.$$

Значения величин m и h определяются согласно подходу, изложенному выше для отношения $\sigma_{\beta_0}/\tau_{\beta_0}$ при $c = 0,116$, а значения величин d и n согласно подходу для отношения σ_0/τ_{β_0} при том же напряженном состоянии.

Далее, решая систему из трех уравнений (3.49) – (3.51), найдем значения констант ξ_{II}, η_{II} и параметра S_{0II}^{0}.

3.3. Анализ исследований А.Н. Ставрогина

А.Н. Ставрогин предлагает [3] для составления паспорта прочности горных пород зависимости:

$$\tau_e = \tau_e^0 \exp(B_1 c)\,,\ \tau_s = \tau_s^0 \exp(A_1 c)\,, \tag{3.52}$$

т.е. зависимость максимального касательного напряжения на пределе упругости (τ_e) и на пределе прочности (τ_s) как функцию от вида напряженного состояния (c). Значения констант τ_e^0, τ_s^0, A_1 и B_1 даны в приложении 3 [3], наряду с этим, в приложениях 2 и 5 даны экспериментальные значения пределов упругости (прочности) горных пород и, соответственно, координаты огибающих предельных кругов.

Используя эти данные, в таблицах 3.1 и 3.2 приведены значения пределов упругости (прочности) и координат огибающих, вычисляемых на основании его зависимостей (3.52) и значения тех же величин, приведенных автором для горных пород в приложениях 2 и 5 [3]. Координаты огибающих предельных кругов вычисляем, используя выражения (3.18), где, согласно (3.13) и (3.52):

$$\sigma_1^s = \frac{2\tau_s}{(1-c)}\,,\ (\sigma_1^s)_c = \frac{2\tau_s(A_1 - A_1 c + 1)}{(1-c)^2}\,.$$

Выражения для пределов упругости записываются по аналогии.

Сравнение вычисленных значений (σ_1^e, σ_1^s, σ, τ) и табулированных данных показывает, что, по-видимому, значения координат огибающих предельных кругов, приведенные в приложении 5, получены эмпирически, а не путем использования соотношений (3.52). Кроме того величины τ_e^0, τ_s^0 не равны строго половине соответствующих пределов упругости (τ_e) и прочности (τ_s).

Таблица 3.1 - Сопоставление значений пределов упругости и координат огибающих предельных кругов Мора

	Пределы упругости (σ_1^e) и координаты огибающей (σ, τ):					
	– вычисленные по зависимостям А.Н. Ставрогина (3.52)			**– приведенные в [3, с.248, приложение 2] и [3, с.268, приложение 5]**		
c	$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)
Талькохлорит						
0	770	220	348	780	240	340
0,069	917	331	396	940	330	410
0,116	1037	424	431	1025	440	480
0,178	1223	573	481	1200	580	520
0,233	1424	737	528	1300	660	560
0,321	1835	1083	610	2000	1200	690
0,407	2391	1567	700	2460	1620	740
0,51	3377	2454	822	3000	2260	760
Известняк Д-6						
0	1480	269	571	1550	220	580
0,069	2024	561	785	1760	380	720
0,116	2513	845	961	2500	880	1070
0,185	3470	1445	1275	3700	1760	1460
0,233	4361	2040	1542	4300	2300	1620
Песчаник П-0						
0	1780	324	687	1860	120	480
0,069	2434	674	944	2300	440	840
0,116	3022	1016	1156	3200	960	1200
0,178	4038	1650	1491	4400	2040	1740
0,223	5000	2287	1783	-	-	-
Песчаник выбросоопасный						
0	1030	116	325	1000	210	400
0,069	1781	393	612	2130	680	840
0,116	2594	746	907	2480	900	1000
0,178	4279	1576	1484	4000	1600	1480
0,227	6381	2725	2160	6540	2960	2280
Песчаник не опасный по выбросам						
0	1250	160	418	1200	240	480
0,069	2003	468	711	2130	660	900
0,116	2771	827	992	3020	1080	1200
0,178	4270	1612	1505	3700	1500	1480

	Пределы упругости (σ_1^e) и координаты огибающей (σ, τ):					
	– вычисленные по зависимостям А.Н. Ставрогина (3.52)			– приведенные в [3, с.248, приложение 2] и [3, с.268, приложение 5]		
c	$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)
0,227	6033	2624	2068	6500	3140	2280
Кварцевый диорит Д-2						
0	1600	195	524	1800	320	680
0,068	2617	594	917	3500	1040	1400
0,116	3715	1093	1318	3600	1180	1520
0,176	5782	2148	2027	6700	3100	2600
0,227	8456	3651	2885	8700	4400	3200
Песчаник Д-8						
0	1026	171	382	1050	180	400
0,068	1445	380	548	1600	400	620
0,116	1846	601	694	1710	500	720
0,176	2517	1001	920	3120	1460	1220
0,232	3379	1552	1185	3840	2000	1440
0,321	5456	2993	1749	6000	3540	1980
Песчаник П-01						
0	2140	369	808	2000	300	700
0,069	2988	805	1143	3500	860	1260
0,116	3762	1240	1424	3500	960	1360
0,168	4870	1908	1797	5000	2320	2000
0,227	6559	2997	2318	-	-	-
Песчаник П-03						
0	2090	337	769	2100	360	800
0,07	3015	789	1134	2920	760	1200
0,116	3848	1239	1438	4300	1600	1760
0,178	5370	2130	1951	4900	2400	2080
0,227	7015	3167	2461	6500	3680	2480
Песчаник П-026						
0	1166	153	394	1140	180	420
0,069	1843	435	659	2120	620	840
0,116	2526	760	908	2240	720	920
0,178	3844	1459	1359	3920	1720	1500
0,232	5566	2462	1906	5400	2580	1940
Диабаз						
0	1906	347	735	1700	240	600
0,068	2595	715	1006	3400	1100	1400
0,116	3236	1088	1237	3460	1340	1520

	Пределы упругости (σ_1^e) и координаты огибающей (σ,τ):					
	– вычисленные по зависимостям А.Н. Ставрогина (3.52)			– приведенные в [3, с.248, приложение 2] и [3, с.268, приложение 5]		
c	$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)
0,182	4406	1820	1623	5020	2400	1960
0,227	5457	2519	1939	5500	3380	2130
Мрамор I						
0	850	152	326	850	220	400
0,069	1170	321	452	1250	360	500
0,116	1460	488	556	1380	480	560
0,178	1963	798	723	1800	720	680
0,232	2551	1187	901	2580	1160	880
0,313	3818	2082	1241	4000	2200	1280
0,406	6172	3874	1773	5000	3520	1440
0,515	11191	7982	2668	6000	4560	1440
Мрамор II						
0	610	133	252	600	160	280
0,069	784	240	318	860	300	360
0,116	933	337	369	1000	420	420
0,178	1179	506	446	1150	530	460
0,232	1452	703	524	1450	780	550
0,321	2070	1173	675	1800	1140	620
0,408	2977	1903	860	2000	1360	640
0,508	4645	3319	1128	2800	2080	660

Таблица 3.2 - Сопоставление значений пределов прочности и координат огибающих предельных кругов Мора

	Пределы прочности (σ_1^s) и координаты огибающей (σ,τ):					
	– вычисленные по зависимостям А.Н. Ставрогина (3.52)			– приведенные в [3, с.248, приложение 2] и [3, с.268, приложение 5]		
c	$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)
Талькохлорит						
0	990	248	429	945	200	390
0,069	1221	406	512	1320	400	540
0,116	1412	543	574	1420	500	600

	Пределы прочности (σ_1^s) и координаты огибающей (σ, τ):					
	– вычисленные по зависимостям А.Н. Ставрогина (3.52)			– приведенные в [3, с.248, приложение 2] и [3, с.268, приложение 5]		
c	$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)
0,178	1719	770	664	1730	720	700
0,233	2057	1030	752	2340	1200	880
0,321	2771	1601	912	2790	1700	980
0,407	3768	2437	1096	3820	2540	1120
0,51	5603	4041	1360	5480	4000	1320
Известняк Д-6						
0	1740	242	602	1845	200	580
0,069	2175	485	753	2200	400	840
0,116	3065	898	1085	4050	1400	1550
0,185	5100	1968	1791	5240	2140	2000
0,233	7297	3242	2501	8090	3740	2860
Песчаник П-0						
0	2400	348	845	2350	280	760
0,069	3615	893	1323	3670	920	1440
0,116	4793	1488	1755	5090	1640	1960
0,178	6984	2705	2501	6290	2560	2520
0,223	9212	4042	3206	9865	4600	3520
Песчаник выбросоопасный						
0	1296	128	387	1220	220	520
0,069	2434	510	812	2856	800	1160
0,116	3752	1043	1283	4395	1400	1640
0,178	6667	2403	2277	6098	2400	2320
0,227	10543	4431	3529	9882	4640	3520
Песчаник не опасный по выбросам						
0	1450	161	456	1440	200	520
0,069	2525	554	865	2630	560	960
0,116	3695	1059	1289	4059	1200	1480
0,178	6132	2254	2123	5029	1840	1940
0,227	9189	3918	3108	10410	4560	3560
Песчаник Д-8						
0	1320	161	432	1340	280	550
0,068	2159	490	757	2245	700	900
0,116	3065	902	1087	2925	1020	1160
0,176	4770	1772	1672	4730	1940	1740
0,232	7243	3169	2462	7310	3640	2680
0,321	14225	7570	4471	-	-	-

	Пределы прочности (σ_1^s) и координаты огибающей (σ, τ):					
	– вычисленные по зависимостям А.Н. Ставрогина (3.52)			– приведенные в [3, с.248, приложение 2] и [3, с.268, приложение 5]		
c	$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)
Кварцевый диорит Д-2						
0	2500	229	722	2385	400	880
0,068	4913	994	1608	4965	1480	2000
0,116	7941	2167	2682	5305	1840	2280
0,176	14531	5139	4924	8060	3120	3120
0,227	24387	10161	8112	15035	5280	5280
Песчаник П-01						
0	2510	344	863	2320	280	720
0,069	3886	935	1403	4725	1320	1880
0,116	5251	1600	1902	5000	1640	2120
0,168	7349	2723	2624	7180	2920	2840
0,227	10814	4751	3731	10825	5240	3960
Песчаник П-03						
0	2870	393	987	2810	350	930
0,07	4472	1082	1615	4915	1480	1960
0,116	6004	1830	2175	5760	1920	2320
0,178	8969	3432	3188	7940	3000	3000
0,227	12365	5432	4266	13200	5800	4600
Песчаник П-026						
0	1482	179	482	1369	100	400
0,069	2459	558	860	2972	950	1240
0,116	3482	1021	1232	3259	1200	1380
0,178	5533	2064	1935	5494	2340	2080
0,232	8322	3635	2826	8243	3660	2860
Диабаз						
0	2334	329	812	2020	200	590
0,068	3542	858	1287	4365	960	1500
0,116	4771	1467	1737	6100	2180	2360
0,182	7219	2813	2570	6100	2500	2520
0,227	9610	4240	3325	9095	4380	3280

	Пределы прочности (σ_1^s) и координаты огибающей (σ, τ):					
	– вычисленные по зависимостям А.Н. Ставрогина (3.52)			– приведенные в [3, с.248, приложение 2] и [3, с.268, приложение 5]		
c	$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)
Мрамор I						
0	1020	123	332	1160	280	500
0,069	1692	384	592	1710	540	740
0,116	2396	702	848	1890	680	840
0,178	3808	1421	1332	2905	1200	1200
0,232	5728	2502	1945	6945	3080	2360
0,313	10667	5585	3378	11600	6760	3680
0,406	22164	13566	6267	12880	9160	3960
0,515	53942	37937	12750	17670	13360	3960
Мрамор II						
0	760	125	281	765	200	340
0,069	1083	284	409	1115	350	440
0,116	1383	448	518	1452	440	500
0,178	1918	764	698	2462	640	640
0,232	2562	1173	897	2850	1180	920
0,321	4174	2285	1336	5150	3000	1600

Заключение.

Предложенные аналитические зависимости позволяют определить предел прочности горных пород на основе экспериментальных данных предела прочности при одноосном сжатии с использованием либо угла среза при том же напряженном состоянии, либо значения пористости материла, а также установленных свойств огибающей предельных кругов Мора.

Имея для конкретной горной породы диаграмму одноосного сжатия, а также предел прочности на сжатие и точку касания огибающей соответствующего круга Мора, можно с достаточной для практики точностью прогнозировать значение предела прочности на растяжение.

ГЛАВА 4
АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГОРНЫХ ПОРОД. ПОЛНАЯ КАРТИНА ДЕФОРМИРОВАНИЯ

4.1. Упругие характеристики горных пород

Вопрос определения упругих характеристик имеет важное значение для моделирования поведения материала за пределами упругости, когда необходимо установить величину остаточной деформации при разгрузке или после разрушения.

Предел упругости будем отождествлять с пределом текучести. Подобно выражениям для пределов прочности (3.28) и (3.43), зависимости для пределов упругости (σ_1^e) представим следующим образом [116]:

– для случаев, когда в плоскости среза принимается соотношение $\sigma_{\beta_0} / \tau_{\beta_0} = k$:

$$\sigma_1^e = \sigma_1^e(c) = \frac{2S_0^e}{(1-c)(\cos 2\beta_0 + k \cdot \sin 2\beta_0)}; \tag{4.1}$$

– для случаев, когда принимается $\sigma_0 / \tau_{\beta_0} = k_2$:

$$\sigma_1^e = \sigma_1^e(c) = \frac{2S_0^e \cos 2\beta_0}{(1-c)(1+k_2 \sin 2\beta_0 \cos 2\beta_0)}, \tag{4.2}$$

где

$$S_0^e = S_0^{0e} e^{(\chi c + \rho c^2)}.$$

В этих выражениях параметры ξ и η заменены на параметры χ и ρ, которые определяются аналогично, но с учетом значений пределов упругости при одноосном сжатии. При этом S_0^{0e} определяется через предел упругости при одноосном сжатии σ_c^e, на определении которого по экспериментальным данным стоит заострить внимание.

Как было указано в предыдущей главе, метод А.Н. Ставрогина для определения пределов упругости (при его реализации на практике) неоднозначен. Так, например, если предел упругости отождествлять с пределом пропорциональности, то для некоторых материалов (судя по диаграммам в осевом направлении ε_1) предел упругости действительно совпадает с пределом пропорциональности при некоторых видах напряженного состояния (c), при других c и для других материалов предел упругости выше или ниже значения предела пропорциональности. Вероятно, такое несоответствие связано с тем, что автор для определения пределов упругости использовал, кроме диаграмм для продольной деформации ε_1, еще и зависимость объемной деформации от среднего напряжения при соответствующих видах напряженного состояния, считая, что материал переходит из упругого в неупругое состояние, когда кривая объемной деформации (θ) отходит от линии гидростатического сжатия $c = 1$ (рис. 4.1).

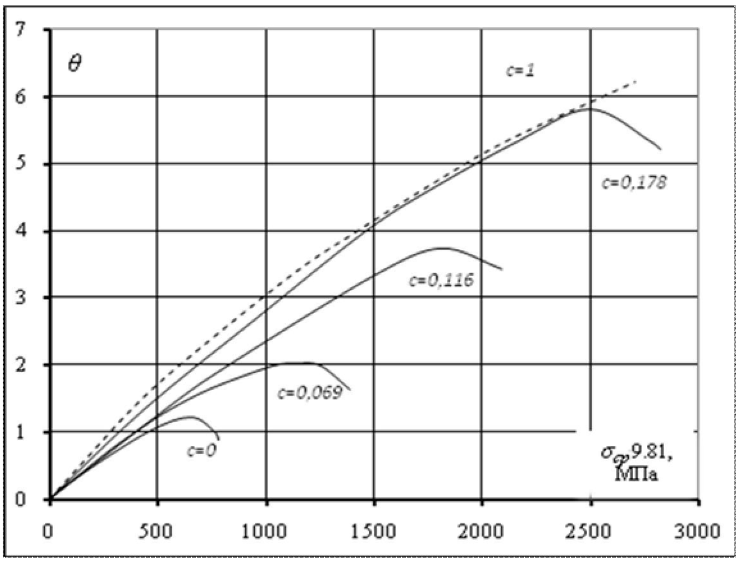


Рис. 4.1. Экспериментальные зависимости относительного изменения объема от среднего гидростатического давления при разных параметрах (c) для Песчаника П-0.

Однако, и сама диаграмма гидростатического сжатия и диаграммы $\theta(\sigma_{cp})$, где $\sigma_{cp} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, носят не строго линейный характер. В итоге остается неясным, по какому допуску определять указанное отклонение объемной деформации от линейной зависимости.

Кроме того, говоря об упругих характеристиках материалов необходимо установить, какими свойствами обладают горные породы: свойствами изотропных или ортотропных материалов.

А.Н. Ставрогин рассматривает горные породы как изотропные материалы. Закон Гука для изотропного материала представляется выражениями:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\sigma_1}{E}(1 - 2\nu c), \\ e_2 &= \frac{\sigma_1}{E}(c - \nu(1 + c)), \end{aligned} \tag{4.3}$$

где E – модуль упругости,
ν – коэффициент Пуассона.

При этом, анализируя экспериментальные данные, автор приходит к выводу: «…из экспериментальных зависимостей видно, что исследованные материалы при деформировании показали отклонение от закона Гука…» [3, с.66]. Кроме того, нами выявлено несоответствие и в самом, осуществленным им, определении упругих констант. К примеру (табл. 4.1), константы, приведенные А.Н. Ставрогиным в каталоге [117] отличаются от тех их значений, когда они определяются согласно данным напряжения и деформации на пределе упругости при одноосном сжатии [3, с.248, приложение 2].

В [118] показано, что многие горные породы можно рассматривать как материалы, обладающие ортотропной симметрией в исходном состоянии.

Для ортотропного материала закон Гука имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_2 - \frac{\nu_{13}}{E_3}\sigma_3, \\
e_2 &= -\frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma_1 + \frac{1}{E_2}\sigma_2 - \frac{\nu_{23}}{E_3}\sigma_3, \\
e_3 &= -\frac{\nu_{31}}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{32}}{E_2}\sigma_2 + \frac{1}{E_3}\sigma_3,
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

где E_i, ν_{ij} – *const*; $i, j = 1, 2, 3$.

Таблица 4.1 **-** Сопоставление упругих характеристик

Материал	**Модули упругости и коэффициенты Пуассона**:			
	– приведенные в каталоге [117]		**– расчитанные по данным А.Н.Ставрогина [3]**	
	$E \cdot 10^5$, **МПа**	ν	$E \cdot 10^5$, **МПа**	ν
Талькохлорит	4,4	0,39	4,6	0,4
Мрамор I	3	0,3	2,4	0,24
Мрамор II	5,8	0,4	5,04	0,36
Диабаз	8,6	0,29	8,6	0,29
Песчаник выбросоопасный	3,2	0,24	2,36	0,17
Песчаник, не опасный по выбросам	2,7	0,22	2,2	0,17
Песчаник Д-8	2,7	0,27	2,46	0,27
Песчаник П-0	6,4	0,3	6,46	0,285
Известняк Д-6	7,2	0,29	6,74	0,32
Песчаник П-01	5	0,27	5	0,335
Песчаник П-03	5,8	0,27	5,72	0,28
Песчаник П-026	2,8	0,31	2,37	0,34
Известняк	2,1	0,24	1,9	0,3
Кварцевый диорит Д-2	10,6	0,29	8,64	0,27

В данной работе предлагается следующий метод определения упругих констант и величин пределов упругости [119].

При одноосном сжатии выделяется упругий участок диаграммы продольной деформации, имеющий приблизительно линейную зависимость между напряжением и деформацией вплоть до (приближенно определяемого) предела пропорциональности, затем этот участок аппроксимируется строго линейной зависимостью (с помощью стандартной программы линии тренда). Значение предела упругости определяется по допуску на остаточную осевую деформацию $0{,}01 \cdot 10^{-3}$, которая находится путем разгрузки от соответствующей точки на диаграмме. Линия разгрузки проводится параллельно указанной линии тренда. При произвольных напряженных состояниях пределы упругости вычисляются согласно (4.1) или (4.2), через найденный таким образом предел прочности при одноосном сжатии.

Упругие константы E_1, $\nu_{12} = \nu_{13}$ и их комбинации $\left[\nu_{12}/E_2 + \nu_{31}/E_3\right]^{-1}$, $\left[1/E_2 - \nu_{32}/E_3\right]^{-1}$ в (4.4) определим как и в [15], используя экспериментальные диаграммы деформирования при каких-либо двух напряженных состояниях, упругие участки которых аппроксимируются, подобно случаю одноосного сжатия, линейной зависимостью.

У некоторых материалов (выбросоопасный и не опасный по выбросам песчаники, песчаник П-026, песчаник Д-8 [3]) начальный участок диаграммы продольной деформации носит нелинейный характер, что связано с закрытием пор, имеющихся в таких материалах в исходном состоянии. Поперечная деформация сжимаемых таким образом цилиндрических образцов с ростом бокового давления изменяется все время по нелинейному закону и имеет (в силу уплотнения) один знак с продольной деформацией до некоторого осевого напряжения, при котором зависимость продольной деформации от осевого напряжения становится приблизительно линейной. При этом, еще до достижения предела пропорциональности (на диаграмме для продольной деформации), начиная с некоторого момента нагружения, приращение поперечной деформации становится обратного знака по сравнению с приращением продольной осевой деформации, что приводит к уменьшению (вплоть до нуля) величины поперечной деформации с ростом нагрузки, а далее эта деформация по модулю растет, но становится отрицательной.

В [120] приведены экспериментальные исследования на прочность при сжатии шиферного сланца, упругая часть деформирования которого также носит нелинейный характер. Авторы отмечают, что «…эта нелинейная часть кривой по своей природе соответствует упругой деформации материала и становится линейной по мере увеличения разницы напряжений…» [120, с. 83], а анизотропность материала уменьшается с увеличением бокового давления.

Однако, разгрузка от напряжений, не превышающих предел упругости, указывает [121] на возникновение остаточной деформации. Чтобы исключить такую нелинейность в упругой области А.Н. Ставрогин предлагает выделить на диаграмме продольной деформации линейный участок от начального напряжения σ_{1H} до предела упругости σ_1^e, причем $\sigma_{1H} = (0{,}15 \div 0{,}25)\sigma_1^e$. Тем самым фактически переносится начало координат, от которого отсчитывается продольная деформация.

В данной работе указанный нелинейный участок диаграммы деформации предлагается [122] исключать путем переноса начала координат, положение которого однозначно определяется следующим образом. Экстраполируя линейные участки продольной деформации при различных видах напряженных состояний вплоть до равных нулю напряжений, получим, что они «стягиваются» в одну и ту же точку (рис. 4.2). Из этого нового начала координат для продольной деформации следует провести касательную к диаграмме поперечной деформации, которая будет совпадать с участком для поперечной деформации приблизительно в той точке, где происходит противоположное относительно продольной деформации приращение. Именно таким образом можно схематизировать участки для продольной и поперечной деформаций после того, как произошло уплотнение материала. Такая схема нарушается в случае одноосного сжатия ввиду следующего: боковая поверхность образца при одноосном сжатии свободна от напряжений, поэтому уплотнение в поперечном направлении не происходит.

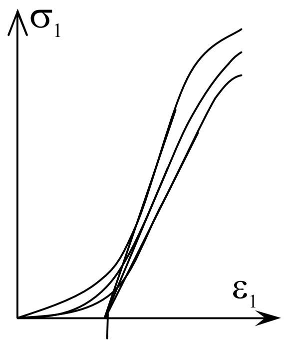


Рис. 4.2. Схема экстраполяции линейного участка продольной деформации.

Такой перенос начала координат достаточно выполнить для двух напряженных состояний – близкое к c=0 и к c=c_n, при которых определяются упругие константы материала. При других видах напряженных состояний значения продольной и поперечной деформации можно определить, используя закон Гука.

Для доказательства приемлемости указанной схематизации продольной и поперечной деформаций рассмотрим интерпретацию, которую использовал А.Н. Ставрогин. Автор приводит значения продольной остаточной деформации и коэффициента поперечной остаточной деформации, которая определяется путем параллельного переноса касательной к упругому участку диаграммы поперечной деформации в точку разгрузки. В табл. 4.2, согласно приложениям 1 и 2 в [3], представлены значения деформаций для песчаника выбросоопасного на пределе прочности и после разгрузки (ε_1^n, μ_n – коэффициент остаточной деформации) при разных напряженных состояниях. При c равных 0,178 и 0,227 значения поперечной остаточной деформации ($\varepsilon_2^n = -\mu_n \varepsilon_1^n$) имеют бóльшие значения, чем значения той же величины на пределе прочности (обозначенной ниже ε_2^*). Диаграммы деформирования при этих c приведены на рис. 4.3. Предлагаемый перенос начала координат, позволяет избежать такой неопределенности.

Таблица 4.2

c	$\varepsilon_1^n \cdot 10^{-3}$	μ_n	$\varepsilon_2^n \cdot 10^{-3}$	$\varepsilon_2^* \cdot 10^{-3}$
0,178	2,2	1,76	-3,872	- 3,1
0,227	3,0	0,667	-2,001	-1,3

При напряженном состоянии, когда критерий Кулона-Мора переходит в критерий Треска остаточное изменение объема отсутствует и с ростом уровня напряжения материалы приближаются по своим свойствам к пластичным материалам. Следовательно, величина μ_n стремится к 0,5, а $\alpha \to 45^0$, что будет продемонстрировано при расчетах в главе 5 и является подтверждением правомерности использования подхода с переносом начала координат.

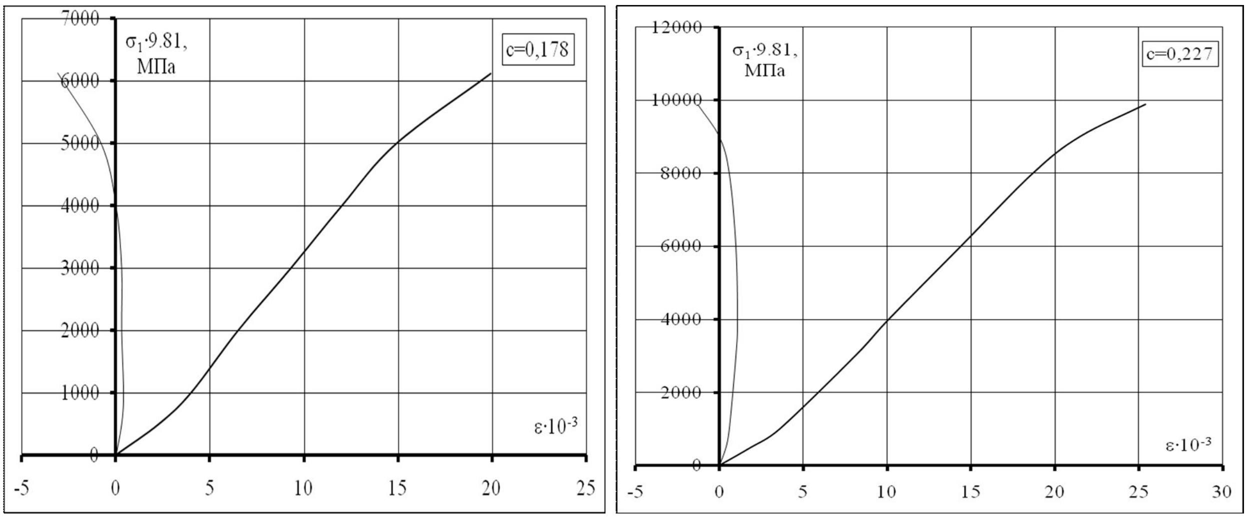


Рис. 4.3. Диаграммы продольной и поперечной деформаций выбросоопасного песчаника при c=0,178 и c=0,227, согласно экспериментальным данным [3, приложения 1 и 2].

Для дальнейшего расчета используем значения напряжений и деформаций, полученных при аппроксимации упругого участка с учетом переноса (указанным образом) начала координатных осей.

4.2. Описание полной картины деформирования

Деформация за пределом упругости разделяется на три составляющие: упругую, чисто пластическую (не вызывающую изменение объема) и деформацию разрыхления [123, 124]. Упругая деформация определяется по закону Гука для ортотропного материала (4.4). Пластическая деформация определяется заданием сопротивления сдвигу, которое в общем случае является [12] сложным интегро-дифференциальным оператором от интенсивности (идеализированных) скольжений.

В рамках рассматриваемой теории для практического использования сопротивление сдвигу S представляется в упрощенном виде [125]:

$$S = \tau_T \left[1 + \psi \Gamma_{13}^0\right] = \tau_{\max}, \tag{4.5}$$

где ψ – определяющая функция, которая находится при аппроксимации расчетными зависимостями экспериментальных диаграмм;

Γ_{13}^0 – компонента плоскопластической деформации от скольжений (называемых основными) по площадке максимального касательного напряжения;

τ_T – значение максимального касательного напряжения на пределе упругости.

Компоненты деформации от основных скольжений связаны соотношениями:

$$\Gamma_1^0 = -\Gamma_3^0, \; \Gamma_{13}^0 = 2\Gamma_1^0.$$

Следуя упрощенной концепции скольжения [125] из (4.5) для Γ_1^0 можно записать:

$$\Gamma_1^0 = \frac{1}{2\psi}[\tau_{\max} - \tau_T]. \tag{4.6}$$

Чтобы учесть вклад в суммарную пластическую деформацию (Γ_i^+) всех других («дополнительных» к основным) скольжений, постулируется некоторая связь между главными пластическими деформациями от основных (Γ_1^0, Γ_3^0) и дополнительных (Γ_1^∂, Γ_3^∂) скольжений:

$$\Gamma_1^\partial = \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{\max}}\right)^q \Gamma_1^0,\ \Gamma_3^\partial = \left(\frac{\tau_{23}}{\tau_{\max}}\right)^q \Gamma_3^0\ \ (q - const).$$

В рассматриваемом случае нагружения, учитывая выражения для главных касательных напряжений:

$$\tau_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2),\ \tau_{23} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3),\ \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

имеем при любом значении параметра q:

$$\begin{aligned} \Gamma_1^+ &= \Gamma_1^0 + \Gamma_1^\partial = \Gamma_1^0\ \ (\Gamma_1^\partial = \Gamma_1^0), \\ \Gamma_3^+ &= \Gamma_3^0 + \Gamma_3^\partial = -\frac{\Gamma_1^0}{2}\ \ (\Gamma_3^\partial = 0). \end{aligned} \tag{4.7}$$

В соответствии с гипотезой В.В. Новожилова о всестороннем разрыхлении, деформация разрыхления Γ_i^* пропорциональна [15] чисто пластической деформации:

$$\Gamma_1^* = \Gamma_3^* = -\lambda\Gamma_1^+, \tag{4.8}$$

где λ – коэффициент разрыхления.

Таким образом, компоненты неупругой деформации представляются в виде [15] суммы чисто пластической деформации и деформации разрыхления:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Gamma_1^+ + \Gamma_1^*, \\ \Gamma_3 &= \Gamma_2 = \Gamma_3^+ + \Gamma_3^*. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Из этих соотношений следует:

$$\lambda = \frac{\Gamma_2 + 0{,}5\Gamma_1}{\Gamma_2 - \Gamma_1}. \tag{4.10}$$

Аппроксимация графического представления зависимости $\lambda = \lambda(c)$ дает аналитическое представление функции $\lambda(c)$. Для большинства горных пород приемлемой оказалась функция вида: $\lambda = u + vc$ (u, $v - const$).

При напряженном состоянии (в зависимости от выделенных групп материалов), близком к предельному, разрыхление материала исчезает, следовательно, при $c \to c_n$, $\lambda \to 0$. При $c > c_n$ также полагается $\lambda(c) = 0$, т.е. при большом боковом давлении эффект дилатансии не рассматривается. Это связано, в основном, с недостатком имеющихся экспериментальных данных для таких значений *c*. Можно лишь заключить [84], что для некоторых пород при $c > c_n$ вновь возникает разрыхление, а для других – уплотнение материала. В [126] высказывается предположение о том, что при достижении некоторого предела дилатансия материала прекращается, т.к. дилатансия и уплотнение компенсируют друг друга.

Считается [127], что в общепринятых каких-либо обобщенных координатах единая кривая деформирования горных пород отсутствует. А.Н. Ставрогин предложил единую зависимость деформирования в координатах «максимальное касательное напряжение ($\Delta\tau$) – осевая неупругая деформация (ε_1^p)», [3]. В данной работе более подходящим принимается метод, когда единая диаграмма деформирования представляется только для чисто пластической деформации – $\Gamma_1^0(\tau_{\max} - \tau_T)$ ($\tau_{\max}$ – текущее значение максимального касательного напряжения, τ_T соответствует значению максимального касательного напряжения на пределе упругости).

С помощью аппроксимации зависимости $\Gamma_1^0(\Delta\tau)$, где $\Delta\tau = \tau_{\max} - \tau_T$, определим значение величины ψ (формула (4.6)) Далее, возвращаясь к (4.7) – (4.10) определим компоненты деформации за пределом упругости.

Обобщенную кривую остаточной деформации ($\Delta\tau$ – ε_1^p) А.Н. Ставрогин предлагает аппроксимировать уравнением параболы второй степени:

$$\varepsilon_1^p = k_{Cm} \cdot (\Delta\tau^*)^2, \tag{4.11}$$

где $\Delta\tau^*$ – разность между действующим касательным напряжением и его величиной на пределе упругости;

k_{Cm} – константа.

Значения ε_1^p, k_{Cm} и $\Delta\tau^*$ с соответствующими переобозначениями индексов в двух последних величинах приводятся А.Н. Ставрогиным [3, с.261, приложение 4].

Единая кривая для поперечной неупругой деформации ε_2^p представляется:

$$\varepsilon_2^p = -k_{Cm} \cdot \mu(\Delta\tau^*)^2 . \tag{4.12}$$

Поперечная деформация связана с продольной коэффициентом остаточной деформации μ:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_2^p}{\varepsilon_1^p} = \mu_0 e^{-\Gamma c}, \tag{4.13}$$

где μ_0, Γ – константы, зависящие от свойств материала [3, с.83, таблица 3.1].

Ранее [92], было продемонстрировано, что при использовании единой кривой вида (4.11) расхождение с конкретными диаграммами деформирования материала гораздо большее, чем при применении единой кривой вида (4.6) для чистопластической деформации.

Заключение.

Предложен новый способ исключения нелинейного участка диаграмм деформации в упругой области, свойственного некоторым горным породам, при определении упругих констант материала путем переноса начала координат, положение которого однозначно определяется путем экстраполяции линейных участков продольной деформации при различных видах напряженных состояний вплоть до равных нулю напряжений.

Установлены единые соотношения связи между напряжениями и чисто пластическими деформациями при произвольном пропорциональном нагружении, а наблюдаемое явление дилатансии учтено через коэффициент разрыхления, определенным образом зависящим от вида напряженного состояния. В результате определена полная картина деформирования для рассмотренных материалов.

ГЛАВА 5
АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ

Рассмотрим более подробно предложенный расчет предельных характеристик для материала из **первой группы** – талькохлорита.

5.1. Талькохлорит

Вычисленный предел прочности при растяжении для талькохлорита составляет $125 \cdot 9{,}81$ МПа (экспериментальное значение $130 \cdot 9{,}81$ МПа).

Согласно экспериментальным данным, предел прочности талькохлорита при напряженном состоянии одноосного сжатия равен $945 \cdot 9{,}81$ МПа, угол среза при этом равен 27^0. Как было указано ранее, расчет проводится по соотношению (3.28). В формулах (3.27) – (3.32) и (3.36) следует полагать $k = k_1 = 2$ - const ($k_0 = k_1 = 2$, $(k_1)_c = 0$). Параметр S_0^s при этом принимается также постоянным и равным $945 \cdot 9{,}81$ МПа. Полученные расчетные значения угла среза, пределов прочности и координат точки касания огибающей предельных кругов Мора при различных напряженных состояниях (c), согласно зависимостям (3.27), (3.28) и (3.18), в табл. 5.1 и табл. 5.2 ($\alpha_0^{эксп}$ – экспериментальное значение угла среза)

Таблица 5.1 - Сопоставление расчетных и экспериментальных значений угла среза для талькохлорита

c	0	0,069	0,116	0,178	0,233	0,322	0,407	0,51
α_0 (град.)	26,6	28,7	30,5	33,2	36,3	43,6	-	-
$\alpha_0^{эксп}$ (град.)	27	26	31	30	36	-	-	-

Таблица 5.2 - Расчетные значения пределов прочности и координат огибающей на пределе прочности для талькохлорита

c	0	0,069	0,116	0,178	0,233	0,322	0,407	0,51
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	945	1058	1158,4	1339,5	1585,4	2546,8	3187	3857
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	378	452,4	517,13	631,2	781,9	1346,7	2099,8	2778,2
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	462,9	479,3	495,4	527,5	575,7	795	934,2	935,5

Известно [3], что пористость талькохлорита составляет 0,21%. Теоретическое значение угла среза, определенное через известное значение пористости талькохлорита по соотношениям (3.39) и (3.37) составляет $22{,}7^0$; пределы прочности и упругости при $c \in [0;\ 0{,}51]$, координаты точек касания огибающей предельных кругов Мора имеют такие же значения, как и при расчете этих характеристик через известное значение угла среза, т.к. значение параметра $S_0^s - const$.

На рис. 5.1 приводится графическое представление результатов, в виде предельных кругов Мора и огибающих к ним (для напряженных состояний c=0; 0,069; 0,116; 0,178; 0,233; 0,322; 0,407; 0,51), построенные по данным табл. 5.2, согласно предложенным аналитическим зависимостям – сплошная линия, в сравнении с экспериментальными данными А.Н. Ставрогина[1] – штриховая линия ([3, с.248, приложение 2] и [3, с.269, приложение 5]).

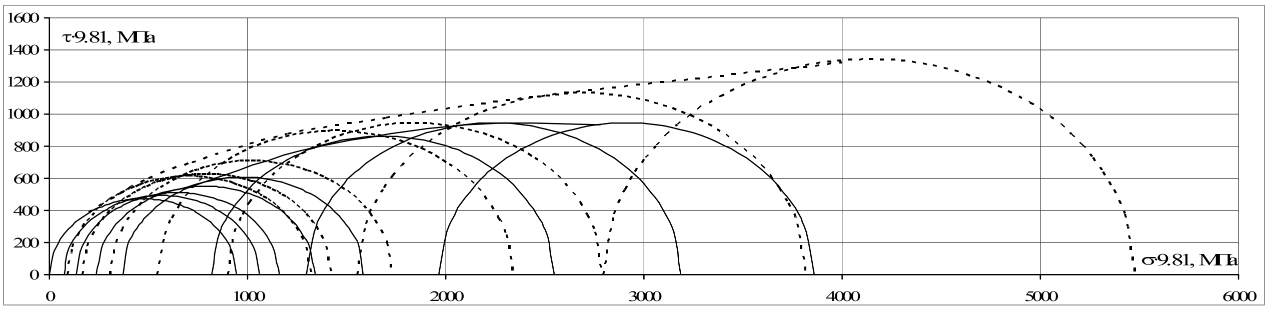


Рис. 5.1. Предельные круги Мора для пределов прочности и огибающие к ним для талькохлорита.

[1] Экспериментальные значения пределов прочности и координат огибающей на пределе прочности А.Н. Ставрогина для рассматриваемых материалов приведены в диссертационной работе в табл. 3.2.

Что касается пределов упругости, для начала необходимо установить предел упругости при напряженном состоянии одноосного сжатия. Упругий участок экспериментальной диаграммы деформирования при c=0 аппроксимируем линейной зависимостью (рис. 5.2), а значение предела упругости (σ_c^e) определим с учетом допуска на остаточную осевую деформацию равным 0,001%: $\sigma_c^e = 800 \cdot 9{,}81$ МПа (значение предела упругости, установленное А.Н. Ставрогиным как предел пропорциональности, составляет $780 \cdot 9{,}81$ МПа).

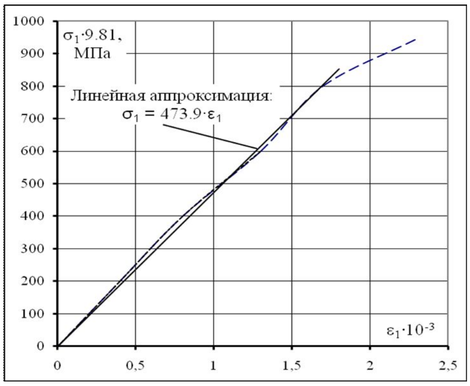


Рис. 5.2. Диаграмма продольной деформации при одноосном сжатии талькохлорита

Для определения значений пределов упругости при других напряженных состояниях используем зависимость (4.1), параметр S_0^e – *const* и равен $800 \cdot 9{,}81$ МПа. Полученные значения пределов упругости при разных напряженных состояниях (σ_1^e), вычисленные через известное значение угла среза при c=0, и координаты огибающей предельных кругов Мора (σ, τ) согласно зависимостям (4.1) и (3.18) представлены в табл. 5.3.

Таблица 5.3 - Расчетные значения пределов упругости и координат огибающей на пределе упругости для талькохлорита

c	0	0,069	0,116	0,178	0,233	0,322	0,407	0,51
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	800	896	981	1134	1342	2156	2698	3265
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	320	382,9	437,8	534,3	661,9	1140	1777,6	2351,9
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	391,9	405,8	419,4	446,5	487,4	673	790,9	791,9

На рис. 5.3. изображены круги Мора и огибающие к ним (для напряженных состояний c=0; 0,069; 0,116; 0,178; 0,233; 0,322; 0,407; 0,51), построенные по данным табл. 5.3. (вычисленные значения – сплошная линия; экспериментальные данные А.Н. Ставрогина[2] – штриховая линия).

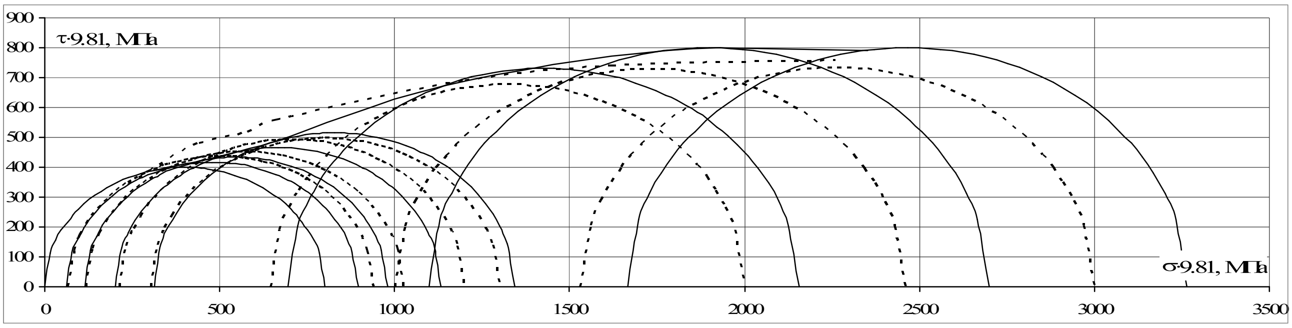


Рис. 5.3. Предельные круги Мора для пределов упругости и огибающие к ним для талькохлорита.

Далее, считая, что горные породы ведут как ортотропный материал, закон Гука для такого материала имеет вид (4.4).

Упругие константы и их составляющие, входящие в (4.4) определим, используя экспериментальные данные напряжений и деформаций для напряженных состояний 0,069 и 0,322. Упругие участки диаграмм деформирования при этих напряженных состояниях аппроксимируем, подобно случаю одноосного сжатия, линейной зависимостью (рис. 5.4).

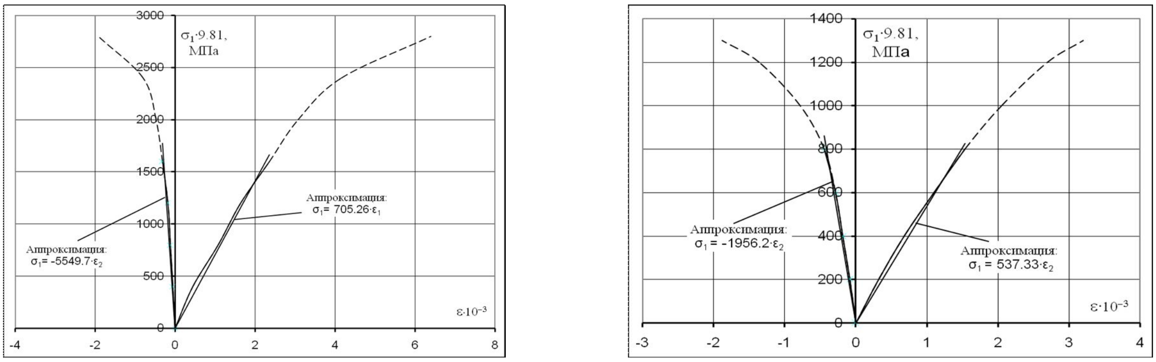
В результате, упругие константы и их комбинации имеют следующие значения:

$$E_1=5{,}05\cdot 9{,}81\cdot 10^5 \text{ МПа}; \ \nu_{12}=\nu_{13}=0{,}303;$$

$$\left[\frac{\nu_{12}}{E_2}+\frac{\nu_{31}}{E_3}\right]^{-1}=5{,}88\cdot 9{,}81\cdot 10^5 \text{ МПа}; \ \left[\frac{1}{E_2}-\frac{\nu_{32}}{E_3}\right]^{-1}=7{,}87\cdot 9{,}81\cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Рассмотрим поведение материала за пределом упругости. Неупругую деформацию (состоящую из деформации разрыхления и чисто пластической деформации) определим из разности полной деформации и упругой ее составляющей.

[2] Значения пределов упругости и координат огибающей на пределе упругости А.Н. Ставрогина для рассматриваемых материалов приведены в диссертационной работе в табл.3.1.



а) б)

Рис. 5.4. Диаграммы продольной и поперечной деформаций талькохлорита при а) c=0,069; б) c=0,322.

Деформация разрыхления определяется через коэффициент разрыхления (4.10), для которого строится зависимость от вида напряженного состояния (рис. 5.5), полагая, что разрыхление материала при предельном напряженном состоянии отсутствует, т.е. для талькохлорита при $c_n = 1/3$, $\lambda = 0$.

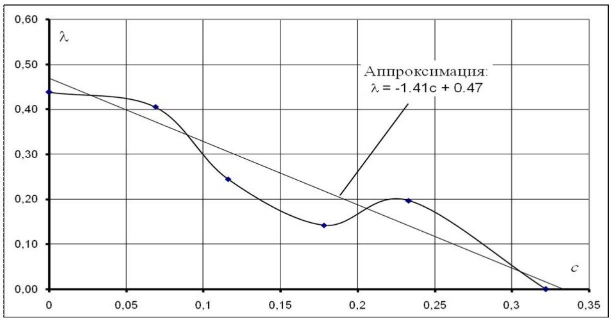


Рис. 5.5. Диаграмма зависимости коэффициента разрыхления от вида напряженного состояния ($\lambda - c$) для талькохлорита.

Далее, используя выражения (4.7) – (4.9) определим расчетные значения продольной и поперечной деформаций.

В случае подхода А.Н. Ставрогина (горные породы предлагается рассматривать как изотропный материал), упругая деформация определяется, используя выражения (4.3), упругие константы материала (E, ν) приведены из [3] в табл. 4.1.

Для пластической составляющей деформации представим единую диаграмму деформирования или иначе зависимость $\Gamma_1^0 \sim \Delta\tau$ (рис. 5.6), используя аппроксимацию которой в виде $\Gamma_1^0 = (1/2\psi)\Delta\tau$ определим коэффициент ψ.

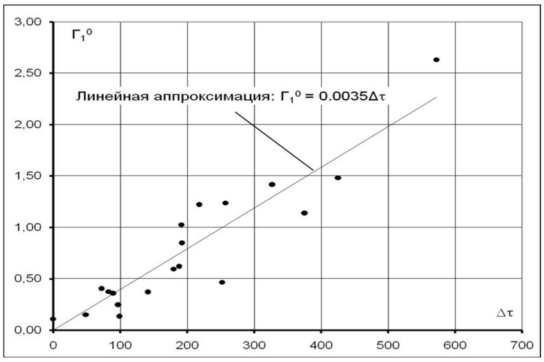


Рис. 5.6. Единая диаграмма деформирования для талькохлорита ($Г_1^0 = (1/2\psi)\Delta\tau$).

Для описания процесса деформирования за пределом упругости в предположении изотропности материала расчет осуществляется по зависимостям (4.11) – (4.13) (данные μ_0, $Г$ из [3, с.83, табл. 3.1]). Единую кривую деформирования в координатах $\varepsilon_1^p - \Delta\tau$ (используя значения $\Delta\tau^*$, ε_1^p и k_{Cm} [3, с.261, приложение 4]) представим на рис. 5.7.

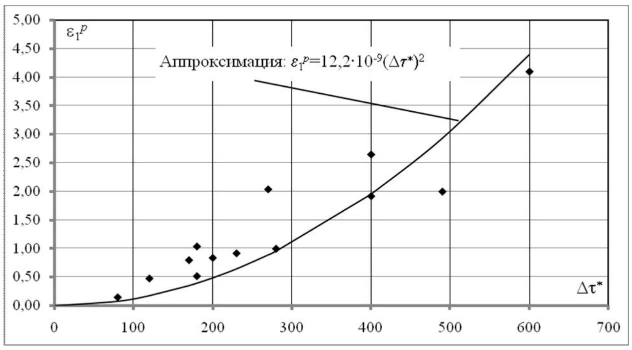


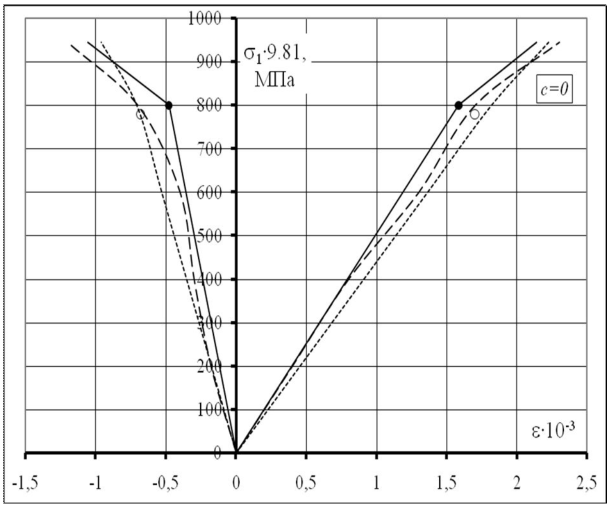
Рис. 5.7. Единая диаграмма деформирования ($\varepsilon_1^p - \Delta\tau^*$) для талькохлорита.

Полученные результаты значений деформирования материала, следуя представлениям об ортотропности и изотропности материала, сведены в табл. 5.4 (значения констант: ψ=142,8; $\mu_0 = 1{,}6$; $Г = 3{,}5$; $t = 1{,}22 \cdot 10^{-8}$).

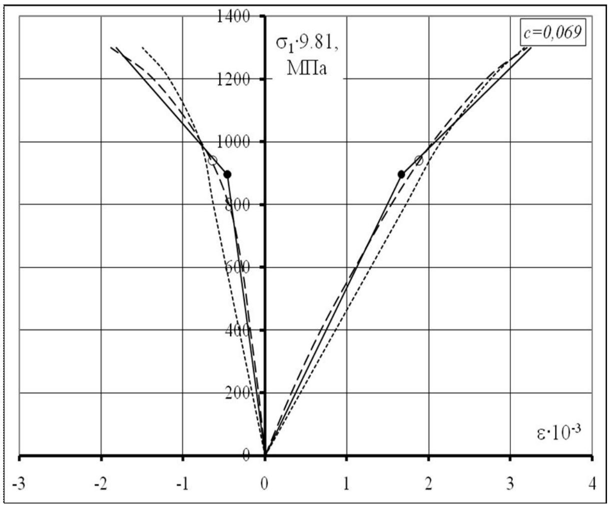
На рис. 5.8 представлены диаграммы деформационного упрочнения талькохлорита (по данным табл. 5.4), полученные для разных напряженных состояний (c=0; 0,069; 0,116; 0,178; 0,233; 0,322; 0,407; 0,51): сплошная линия – по результатам рассматриваемой модели поведения горных пород; пунктирная линия – согласно подходу А.Н.Ставрогина, рассматривая горные породы как изотропный материал; штриховая линия – по экспериментальным данным [3].

Отмечены значения пределов упругости: расчетное значение – черная точка; установленное А.Н. Ставрогиным – полая точка

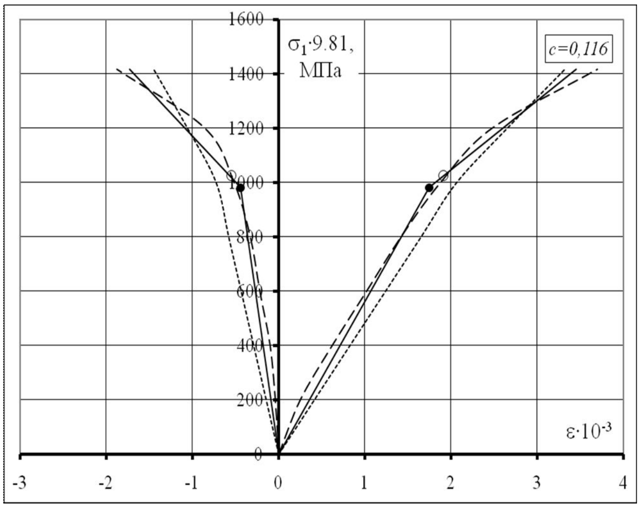
Таблица 5.4. (в отдельном файле)


σ1·9.81, МПа
c=0
ε·10-3

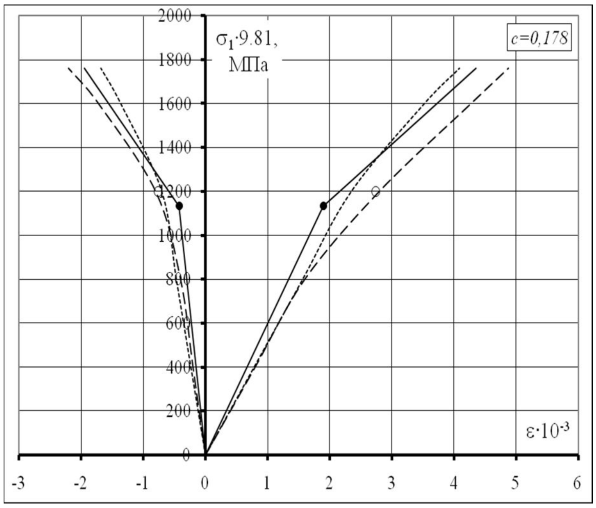
а)


σ1·9.81, МПа
c=0,069
ε·10-3

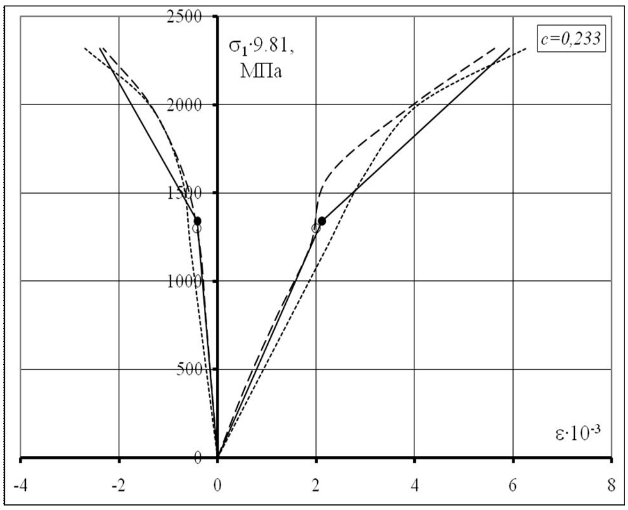
б)


σ1·9.81, МПа
c=0,116
ε·10-3

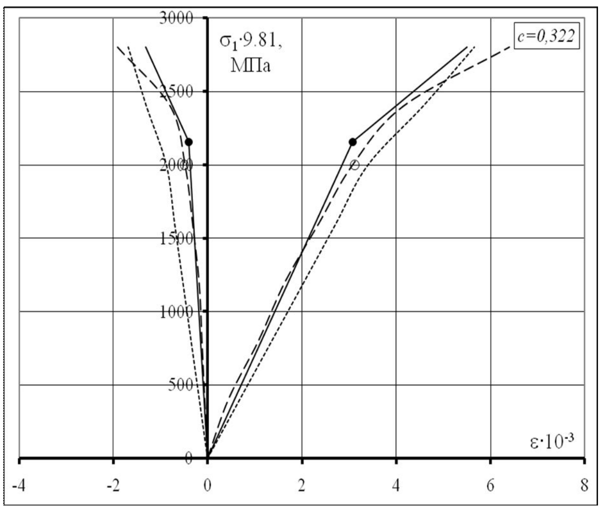
в)


σ1·9.81, МПа
c=0,178
ε·10-3

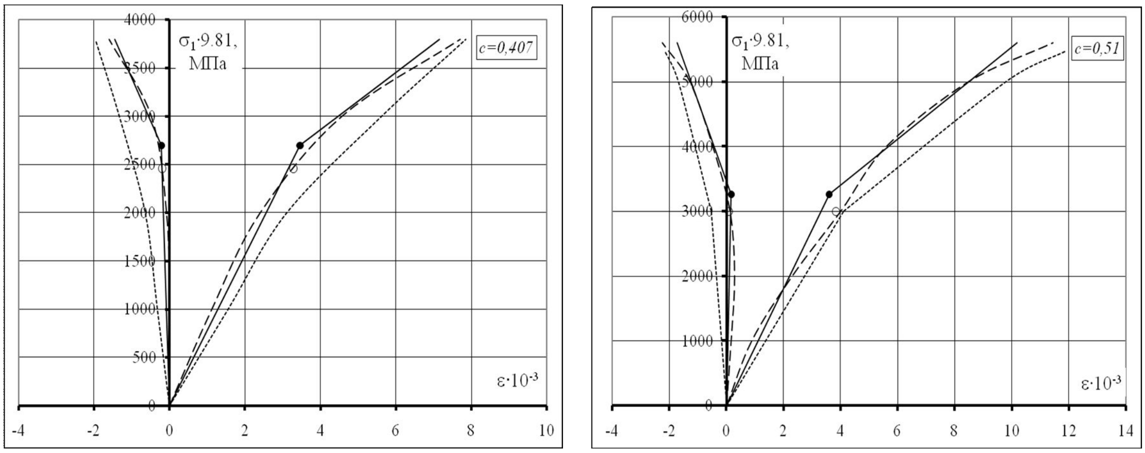
г)


σ1·9.81, МПа
c=0,233
ε·10-3

д)


σ1·9.81, МПа
c=0,322
ε·10-3

е)



ж) з)

Рис. 5.8. Диаграммы деформационного упрочнения талькохлорита при разных напряженных состояниях: а) c=0; б) c=0,069; в) c=0,116; г) c=0,178; д) c=0,233; е) c=0,322; ж) c=0,407; з) c=0,51.

Предложенный подход для **второй группы** материалов рассмотрим для песчаника, не опасного по выбросам.

5.2. Песчаник, не опасный по выбросам

Расчетное значение предела прочности на растяжение для песчаника, не опасного по выбросам, составляет $96 \cdot 9{,}81$ МПа (экспериментальное значение $94 \cdot 9{,}81$ МПа).

Экспериментальное значение предела прочности на сжатие при $c = 0$ составляет $1440 \cdot 9{,}81$ МПа ($\alpha_0^0 = 20^0$). Для расчета пределов прочности на сжатие при $c \in [0;\ 0{,}25]$, как было предложено, используется условие $\sigma_0 / \tau_{\beta_0} = k_2$. Полученные расчетные значения, согласно зависимостям (3.44) – (3.47) и (3.18) (в формулах надо полагать $k_0 = k_2 = 1{,}667$ - const, $k_c = 0$) приведены в табл. 5.5 и 5.6. При этом $S_0^{0s} = 2160 \cdot 9{,}81$ МПа; $\xi = 6{,}43$; $\eta = -12{,}85$.

Таблица 5.5 - Сопоставление расчетных и экспериментальных значений угла среза для песчаника, не опасного по выбросам

c	0	0,069	0,116	0,178	0,227	-	-	-
α_0 (град.)	18,4	21,8	24,6	29,7	36,1	-	-	-
$\alpha_0^{эксп}$ (град.)	20	27,5	32,5	34	43	-	-	-

Таблица 5.6 - Расчетные значения пределов прочности и координат огибающей на пределе прочности для песчаника, не опасного по выбросам

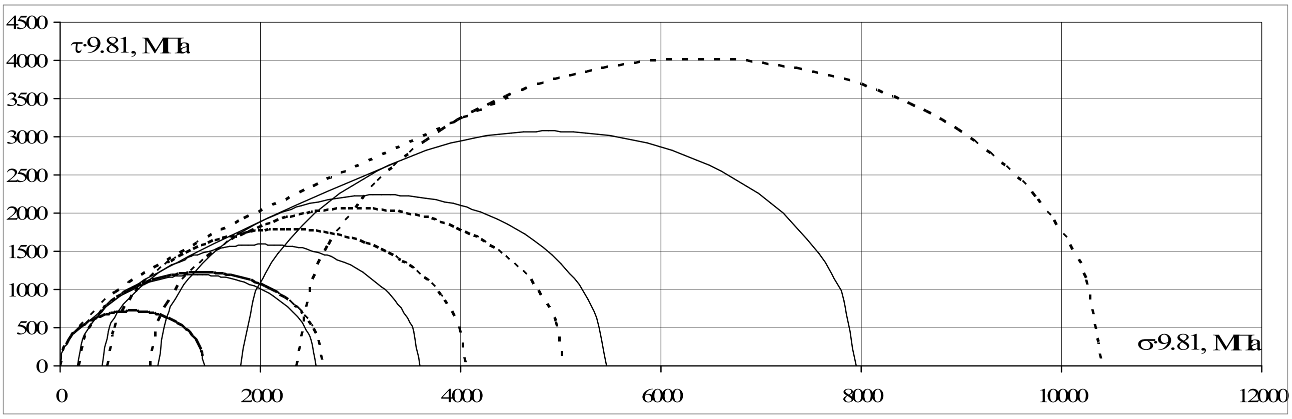
c	0	0,069	0,116	0,178	0,227
$S_0^s \cdot 9{,}81$ (МПа)	2160	3165	3829	4512	4790
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$ (МПа)	1440	2557	3597	5451	7954
$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	143,5	572,8	1074,4	2073,0	3320,0
$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	431,3	886,8	1287,5	1930,0	2649,1

Угол среза (определяемый через известное значение пористости не опасного по выбросам песчаника – 6%), согласно зависимостям (3.39) и (3.37), при c=0 равен 18^0. Значения соответствующих расчетных характеристик (учитывая, что $\alpha_0^0 = 18^0$) в сравнении с экспериментальными при $c \in [0; 0{,}227]$ сведены в табл. 5.7 ($S_0^{0s} = 2160 \cdot 9{,}81$ МПа; $\xi = 6{,}66$; $\eta = -12{,}15$). При таком подходе значения пределов прочности несколько завышаются по сравнению с пределами прочности при подходе через известное экспериментальное значение угла среза, тем самым приближаясь к экспериментальным данным.

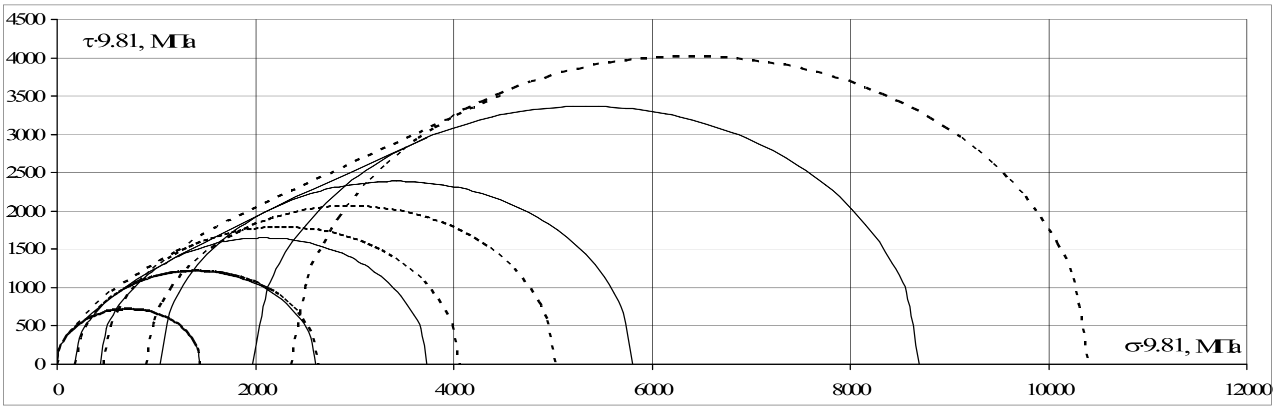
Таблица 5.7 - Расчетные значения пределов прочности и координат огибающей на пределе прочности для песчаника, не опасного по выбросам

c	0	0,069	0,116	0,178	0,227
$S_0^s \cdot 9{,}81$ (МПа)	2160	3227,7	3971,3	4808,9	5236,4
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$ (МПа)	1440	2607	3731	5810	8695
$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	142,9	584,0	1118,6	2242,1	3730,6
$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	430,65	904,20	1338,51	2076,00	2953,27

Данные табл. 5.6 и 5.7 представлены в виде предельных кругов Мора на рис. 5.9 а и б, соответственно, для напряженных состояний c=0; 0,069; 0,116; 0,178; 0,227 (согласно предложенным аналитическим зависимостям – сплошная линия, согласно экспериментальным данным А.Н. Ставрогина [3] – штриховая линия).



а)



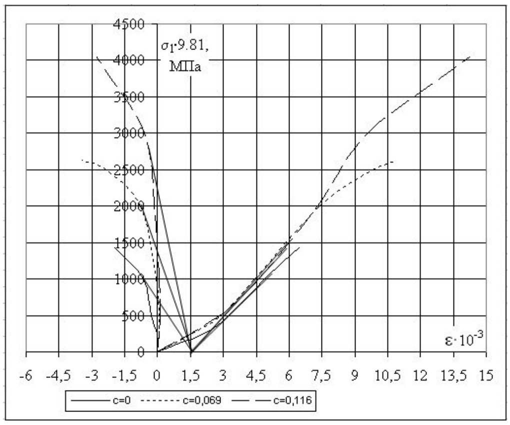
б)

Рис. 5.9. Предельные круги Мора на пределе прочности и огибающие к ним для песчаника, неопасного по выбросам.

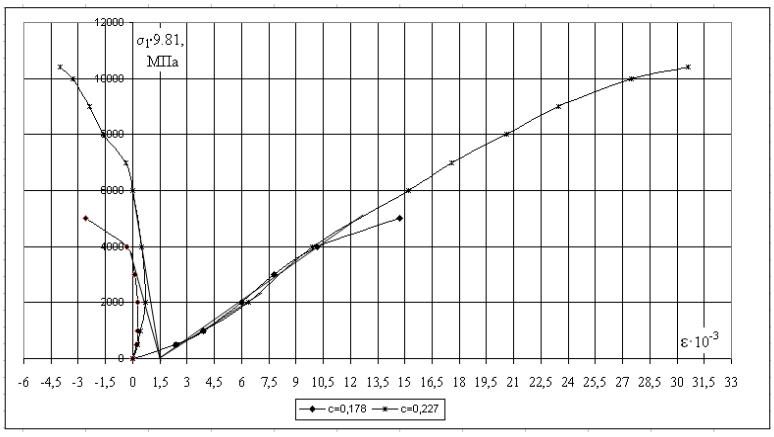
В области упругой деформации диаграммы деформирования песчаника, не опасного по выбросам имеют начальный нелинейный участок. Чтобы исключить такую нелинейность в упругой области, воспользуемся методом, описанным выше (путем переноса начала координат). В этом случае для рассматриваемой породы сдвиг по оси абсцисс составил 0,0015%. Именно в эту точку «стягиваются» линейные участки продольной деформации для напряженных состояний при всех других c. Далее проведем касательные к экспериментальным деформационным кривым для поперечной деформации и получим, таким образом, упругий участок деформирования (рис. 5.10 а и б) для этой компоненты.

Для дальнейшего расчета используем диаграмму деформирования после аппроксимации упругого участка с учетом переноса координатных осей.

Предел упругости, с учетом аппроксимации упругого участка линейной зависимостью (рис. 5.11) и допуска ($0{,}01 \cdot 10^{-3}$) на остаточную осевую деформацию, принимаем равным 1060 МПа (значение предела упругости, установленное А.Н. Ставрогиным [3], составляет 1200 МПа).



а)



б)

Рис. 5.10. Расчетные схемы, связанные с переносом начала координат для продольной и поперечной деформаций.

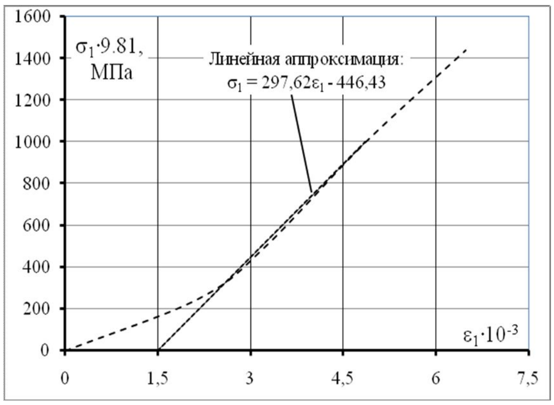


Рис. 5.11. Диаграмма продольной деформации при одноосном сжатии песчаника, не опасного по выбросам.

Значения величин σ_1^e, σ, τ согласно зависимостям (4.2) и (3.18):

– через известное значение угла среза при $c = 0$ представлены в табл. 5.8. ($S_0^{0e} = 1590 \cdot 9{,}81$ МПа; $\xi = 6{,}43$; $\eta = -12{,}85$);

– через известное значение пористости – табл. 5.9 ($S_0^{0e} = 1590 \cdot 9{,}81$ МПа; $\xi = 6{,}66$; $\eta = -12{,}15$).

Таблица 5.8 - Расчетные значения пределов упругости и координат огибающей на пределе упругости для песчаника, не опасного по выбросам

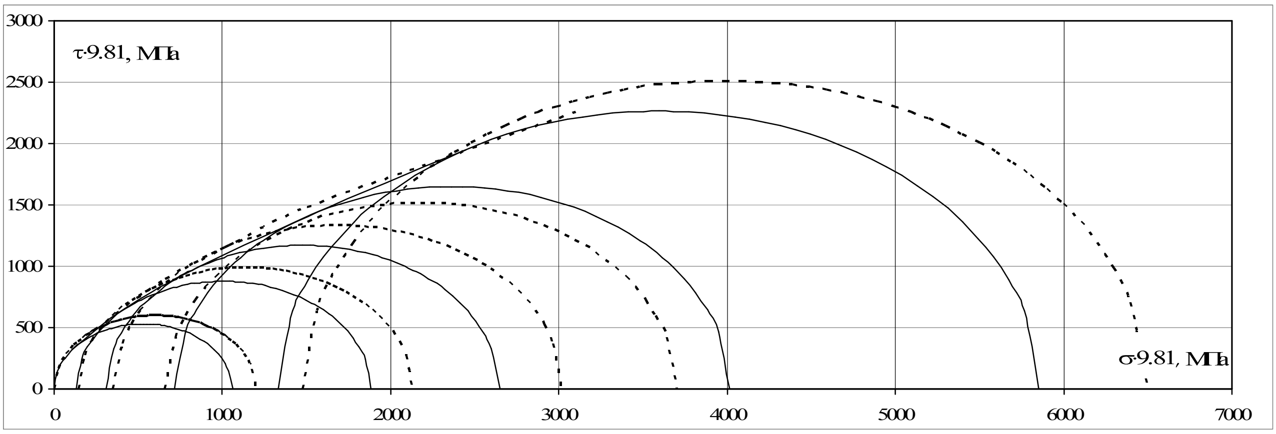
c	0	0,069	0,116	0,178	0,227
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$ (МПа)	1060	1882	2648	4012	5855
$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	105,61	421,62	790,87	1525,99	2443,91
$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	317,48	652,77	947,75	1420,72	1950,07

Таблица 5.9 - Расчетные значения пределов упругости и координат огибающей на пределе упругости для песчаника, не опасного по выбросам

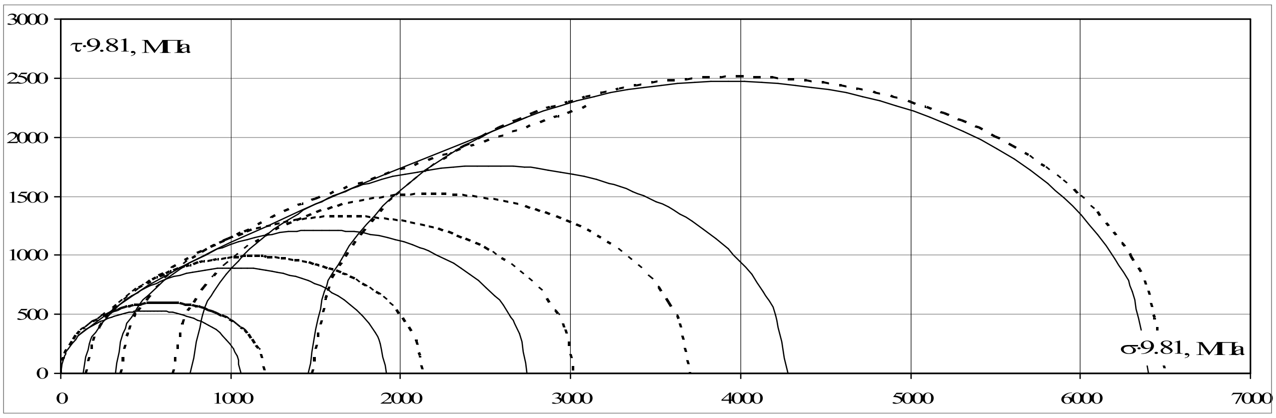
c	0	0,069	0,116	0,178	0,227
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$ (МПа)	1060	1919	2746	4277	6401
$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	105,26	429,90	823,45	1650,46	2746,13
$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	317,00	665,59	985,29	1528,17	2173,94

Аналогично расчетам для пределов прочности, величины пределов упругости, подсчитанные, при использовании значения пористости материала, имеют несколько лучшее соответствии с экспериментальными данными.

На рис. 5.12 а и б показаны предельные круги Мора и огибающие к ним (для напряженных состояний c=0; 0,069; 0,116; 0,178; 0,227), построенные по данным табл. 5.8 и 5.9, соответственно, (по предложенным аналитическим зависимостям (сплошная линия) и экспериментальными данными А.Н. Ставрогина [3] (штриховая линия)).



а)



б)

Рис. 5.12. Предельные круги Мора на пределе упругости и огибающие к ним для песчаника, неопасного по выбросам.

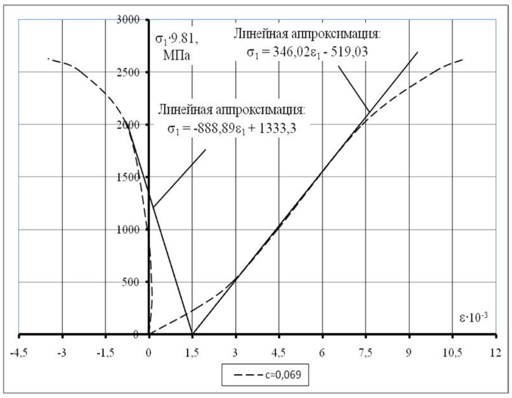
Константы, необходимые для определения упругой составляющей деформации определялись при напряженных состояниях 0,069 и 0,227:

$$E_1 = 2{,}93 \cdot 9{,}81 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \ \nu_{12} = \nu_{13} = 0{,}459;$$

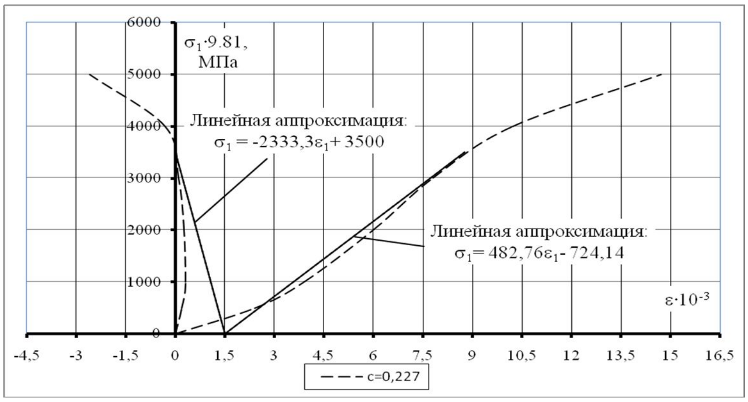
$$\left[\frac{\nu_{12}}{E_2} + \frac{\nu_{31}}{E_3}\right]^{-1} = 1{,}33 \cdot 9{,}81 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \ \left[\frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{32}}{E_3}\right]^{-1} = 1{,}56 \cdot 9{,}81 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Упругие участки диаграмм деформирования при этих напряженных состояниях аппроксимируются линейными зависимостями (рис. 5.13).

Зависимость коэффициента разрыхления от вида напряженного состояния представлена на рис. 5.14, полагая при этом предельное напряженное состояние, при котором разрыхление материала отсутствует, равное 0,25.



а)



б)

Рис. 5.13. Диаграммы продольной и поперечной деформаций не опасного по выбросам, песчаника при c=0,069 и c=0,227.

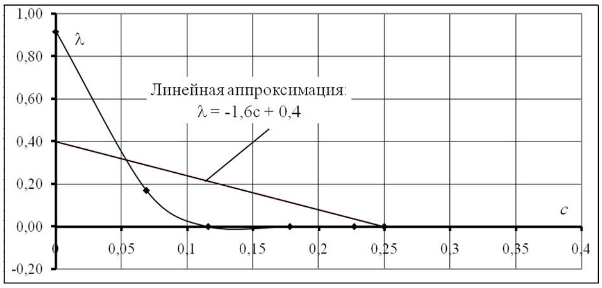


Рис. 5.14. Диаграмма зависимости коэффициента разрыхления от вида напряженного состояния ($\lambda - c$).

Единая диаграмма деформирования для чисто пластической деформации показана на рис. 5.15.

Далее, определим расчетные значения полной продольной и поперечной деформаций.

Единая кривая деформирования, следуя подходу А.Н. Ставрогина, в координатах $\varepsilon_1^p - \Delta\tau$ представлена на рис. 5.16.

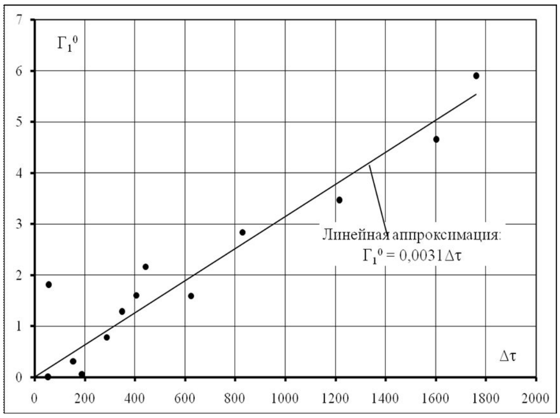


Рис. 5.15. Единая диаграмма деформирования песчаника, не опасного по выбросам ($\Gamma_1^0 = (1/2\psi)\Delta\tau$).

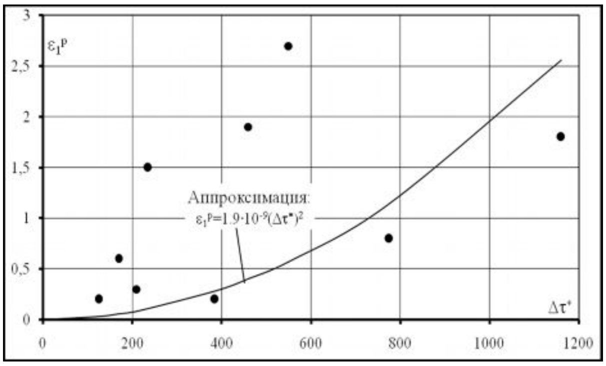


Рис. 5.16. Единая диаграмма деформирования песчаника, не опасного по выбросам (ε_1^p – $\Delta\tau^*$).

Полученные результаты, следуя представлениям об ортотропности и изотропности материала, сведены в табл. 5.10.

На рис. 5.17. приведены экспериментальные диаграммы деформационного упрочнения песчаника, не опасного по выбросам, (штриховая линия) и диаграммы, построенные для разных напряженных состояний (c=0; 0,069; 0,116; 0,178; 0,227) (по данным табл. 5.10):

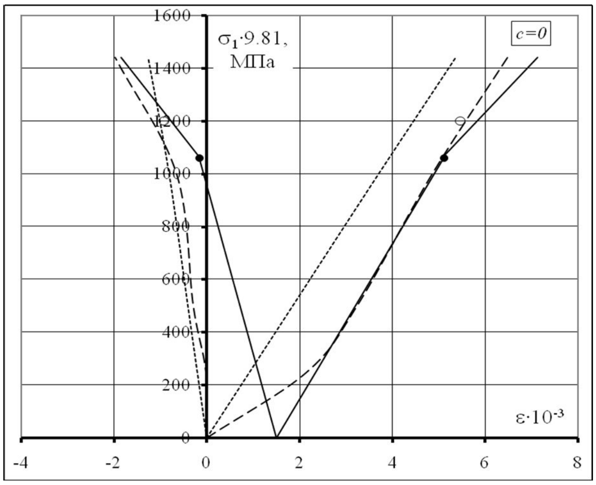
– по результатам рассматриваемой модели поведения горных пород (сплошная линия);

– согласно подходу А.Н.Ставрогина (пунктирная линия), рассматривая горные породы как изотропный материал;

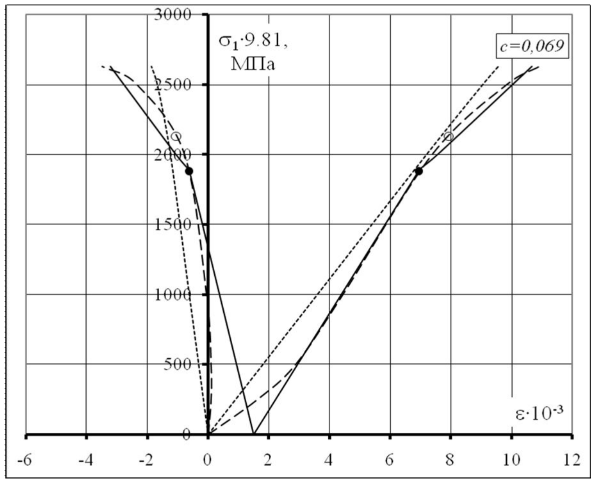
– по экспериментальным данным [3] (штриховая линия).

Отмечены значения пределов упругости: расчетные значение – черная точка; установленные А.Н. Ставрогиным – полая точка.

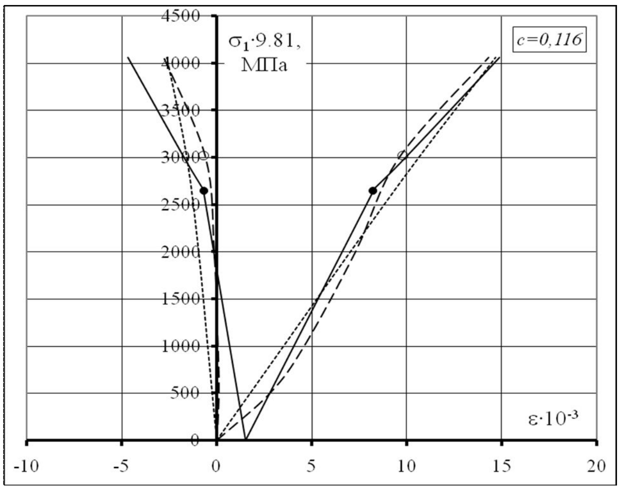
Таблица 5.10. (в отдельном файле)



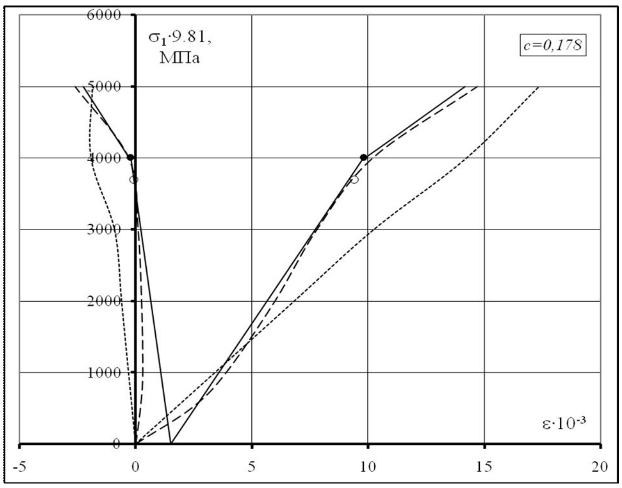
а)



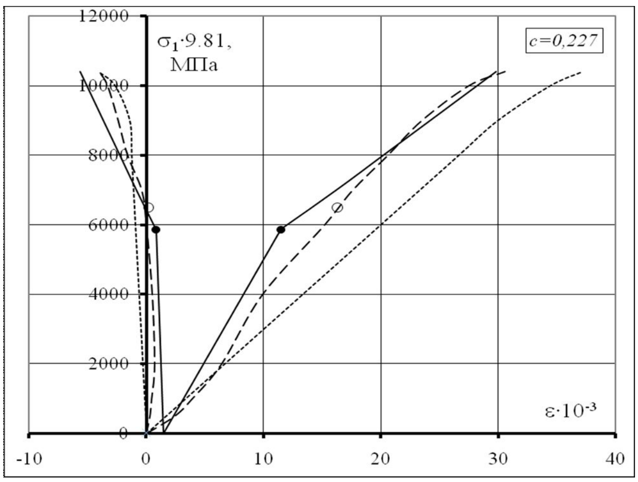
б)



в)



г)



д)

Рис. 5.17. Диаграммы деформационного упрочнения песчаника, не опасного по выбросам, при разных напряженных состояниях: а) c=0; б) c=0,069; в) c=0,116; г) c=0,178; д) c=0,227.

Из **третьей группы** рассмотрим мрамор II.

5.3. Мрамор II

Расчетное значение предела прочности на растяжение для мрамора II составляет $51 \cdot 9{,}81$ МПа (экспериментальное значение $50 \cdot 9{,}81$ МПа).

Как было указано, принципы расчета предельных характеристик для первых двух групп и для третьей группы отличаются, а именно, расчет прочностных характеристик для третьей группы материалов при $0 \le c \le 0{,}116$ осуществляется согласно отношению $\sigma_{\beta_0} / \tau_{\beta_0} = k_1$, а при $c \ge 0{,}116$ – по отношению $\sigma_0 / \tau_{\beta_0} = k_3$, и объясняется тем, что при напряженном состоянии близком к 0,116 начинает проявляться тенденция изменения экспериментальных значениий пределов прочности, а, начиная с напряженного состояния $c \approx 1/4$, значения пределов прочности резко возрастают.

Экспериментальное значение предела прочности мрамора II при $c = 0$ составляет $765 \cdot 9{,}81$ МПа ($\alpha_0^0 = 28^0$).

Полученные расчетные значения угла среза, пределов прочности и координат огибающей для $c \in [0;\ 0{,}116]$, согласно зависимостям (3.27) – (3.30) и (3.18) приведены в табл. 5.11 и табл. 5.12 а. ($S_0^{0s} = 765 \cdot 9{,}81$МПа; $\xi_I = 2{,}49$; $\eta_I = -3{,}73$).

Таблица 5.11 - Сопоставление расчетных и экспериментальных значений угла среза для мрамора II

c	0	0,069	0,116	0,178	0,232	0,321	0,408	0,508
α_0 (град.)	27	29	30	31	31	34	41,5	-
$\alpha_0^{эксп}$ (град.)	28	29	32,5	36	40	-	45	-

Таблица 5.12 а - Расчетные (согласно отношению $\sigma_{\beta_0}/\tau_{\beta_0}$) значения пределов прочности и координат огибающей на пределе прочности для мрамора II

$\sigma_{\beta_0}/\tau_{\beta_0}$				
c	$S_0^s\cdot 9{,}81$(МПа)	$\sigma_1^s\cdot 9{,}81$(МПа)	$\sigma\cdot 9{,}81$(МПа)	$\tau\cdot 9{,}81$(МПа)
0	765	765	153,4	306,3
0.069	892,3	999	302,1	403,1
0.116	970,9	1190	431,2	471,7

Величины m, h и d, n, входящие в (3.49) и (3.50) равны:

$$m = 1{,}846;\ h = -0{,}949;$$

$$d = -1{,}082;\ n = 0{,}542.$$

Решая систему из трех уравнений (3.49) – (3.51), получим:

$$\xi_{II} = 5{,}14;\ \eta_{II} = -6{,}43;\ S_{0II}^{0} = 582{,}93.$$

Полученные значения используем для расчета прочностных характеристик при $c \geq 0{,}116$. Результаты представлены в табл. 5.12 б.

Таблица 5.12 б - Расчетные (согласно отношению σ_0/τ_{β_0}) значения пределов прочности и координат огибающей на пределе прочности для мрамора II

σ_0/τ_{β_0}				
c	$S_0^s\cdot 9{,}81$(МПа)	$\sigma_1^s\cdot 9{,}81$(МПа)	$\sigma\cdot 9{,}81$(МПа)	$\tau\cdot 9{,}81$(МПа)
0,116	1265,6	1190	491,1	496,8
0,178	1280,9	1492	725,4	593,7
0,232	1291,1	1808	980,0	681,3
0,321	1301,5	2530	1503,3	842,4
0,408	-	5509	3776,0	1627,6
0,508	-	6629	4914,1	1628,6

Угол среза, определяемый через известное значение пористости (0,11%) мрамора II, согласно (3.39) и (3.37), при c=0 равен 27^0. Значения расчетных характеристик, определенных через известное значение пористости в сравнении с экспериментальными данными при $0 \leq c \leq 0{,}116$ и $c \geq 0{,}116$ сведены в табл. 5.13. При таком подходе значения пределов прочности несколько завышаются по сравнению с пределами прочности, при определении которых использовалось значение угла среза при c=0, тем самым приближаясь к экспериментальным данным.

Таблица 5.13. а - Расчетные (согласно отношению $\sigma_{\beta_0}/\tau_{\beta_0}$) значения пределов прочности и координат огибающей на пределе прочности для мрамора II

$\sigma_{\beta_0}/\tau_{\beta_0}$				
$S_0^{0s} = 765 \cdot 9{,}81$ МПа, $\xi_I = 3{,}8$, $\eta_I = -5{,}7$				
c	$S_0^s \cdot 9{,}81$(МПа)	$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)
0	765	765	121,4	279,6
0,069	967,7	1083	293,6	415,7
0,116	1100,9	1350	456,2	517,4

Величины m, h и d, n имеют такие же значения.

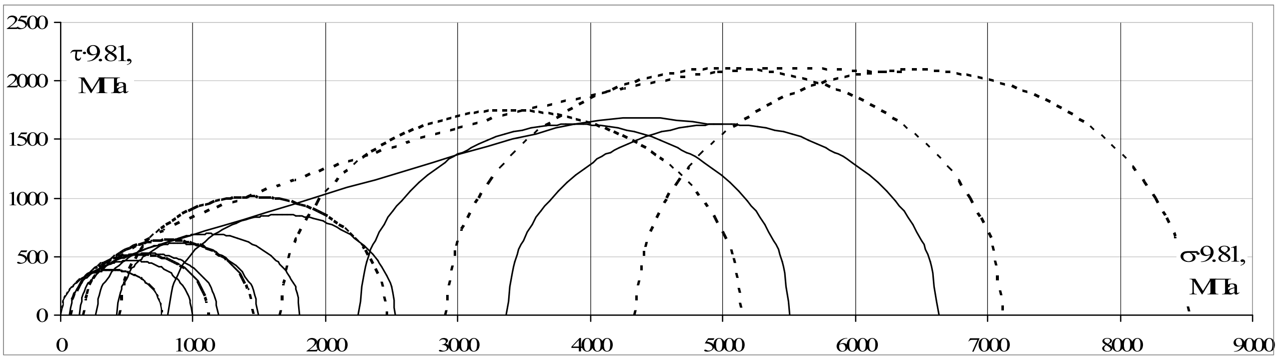
Решая систему из трех уравнений (3.50) – (3.51), получим:

$$\xi_{II} = 6{,}35;\ \eta_{II} = -7{,}93;\ S_{0II}^0 = 586{,}565.$$

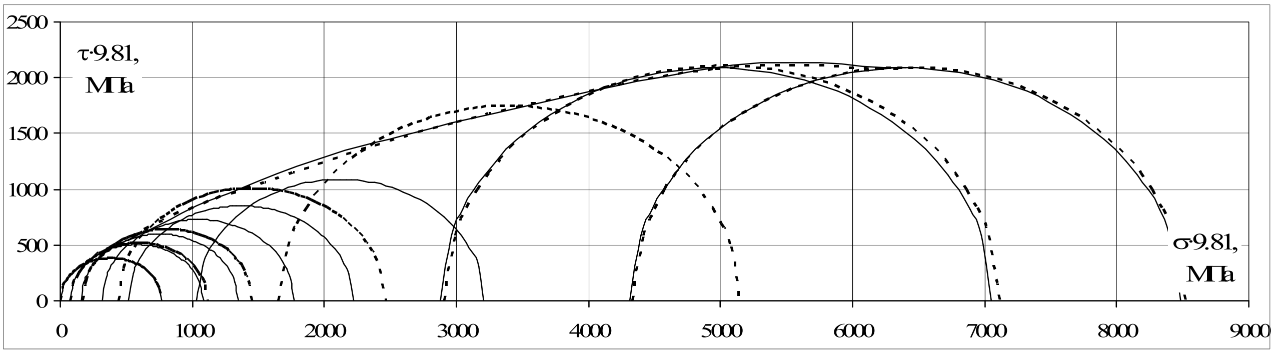
Таблица 5.13. б - Расчетные (согласно отношению σ_0/τ_{β_0}) значения пределов прочности и координат огибающей на пределе прочности для мрамора II

σ_0/τ_{β_0}				
c	$S_0^s \cdot 9{,}81$(МПа)	$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)
0,116	1100,9	1349,6	502,2	541,2
0,178	1412,1	1773,7	806,2	688,9
0,232	1669,0	2218,6	1150,4	824,0
0,321	2087,9	3208,6	1885,0	1063,8
0,408	-	7054,1	4834,7	2083,9
0,508	-	8487,8	6291,8	2085,2

Данные табл. 5.12 и 5.13 представлены в виде предельных кругов Мора и огибающих к ним (согласно предложенным аналитическим зависимостям – сплошная линия, согласно экспериментальным данным А.Н. Ставрогина [3] – штриховая линия) на рис. 5.18 а и б, соответственно.



а)



б)

Рис. 5.18. Предельные круги Мора для пределов прочности и огибающие к ним для мрамора II.

Предел упругости, с учетом аппроксимации упругого участка линейной зависимостью (рис. 5.19) и допуска ($0{,}01\cdot10^{-3}$) на остаточную осевую деформацию принимается равным 657·9,81 МПа (экспериментальное значение предела упругости составляет 600 МПа).

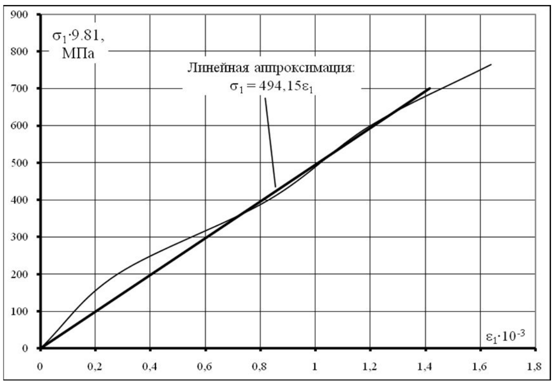


Рис. 5.19. Диаграмма продольной деформации при одноосном сжатии мрамора II.

При рассмотрении экспериментальных данных [3] пределов упругости мрамора II не наблюдается резкого скачка в значениях (в отличие от пределов прочности), поэтому расчет пределов упругости осуществляется по соотношению $\sigma_{\beta_0}/\tau_{\beta_0} = k_n\big|_{c_n=0,4} = 2{,}333$.

Полагая отношение $\sigma_{\beta_0}/\tau_{\beta_0} = 2{,}333$ постоянным, угол среза при c=0 будет равен $\alpha_0^0 =$ 23,2^0.

Вычисленные значения пределов упругости (σ_1^e) и координат огибающей на пределе упругости (σ, τ):

– через известное значение угла среза при c=0 ($S_0^e = 766{,}39 \cdot 9{,}81$ МПа; $\chi = 4{,}07$; $\rho = -5{,}09$) представлены в табл. 5.14:

Таблица 5.14 - Расчетные значения пределов упругости и координат огибающей на пределе упругости для мрамора II

c	0	0,069	0,116	0,178	0,232	0,321	0,408	0,508
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$ (МПа)	657	727	787	890	1015	1385	2592	3118
$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	101,96	194,32	263,71	368,57	480,25	885,39	1910,13	2372,1
$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	237,89	277,16	300,45	331,04	361,72	469,18	762,30	766,81

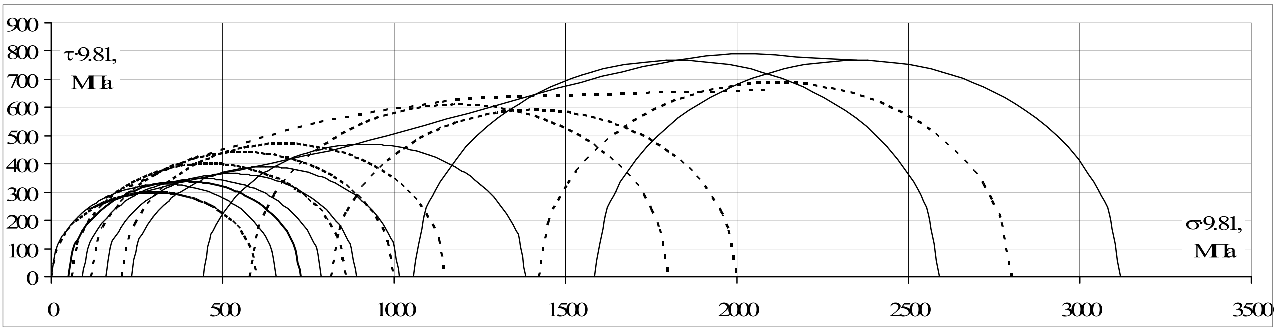
– через известное значение пористости в табл. 5.15. ($S_0^e = 766{,}39 \cdot 9{,}81$ МПа; $\xi = 3{,}8$; $\eta = -5{,}7$):

Таблица 5.15 - Расчетные значения пределов упругости и координат огибающей на пределе упругости для мрамора II

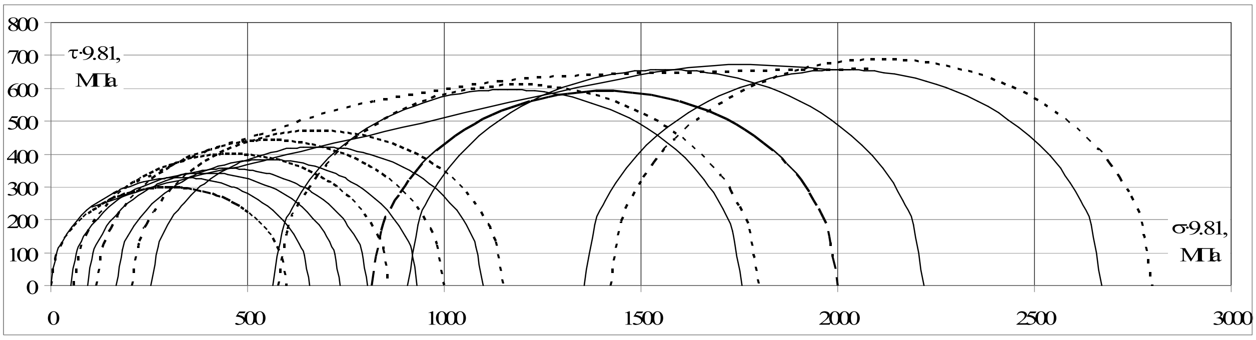
c	0	0,069	0,116	0,178	0,232	0,321	0,408	0,508
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$ (МПа)	657	727	787	890	1015	1385	2220	2671
$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	104,3	196,76	266,08	382,01	494,09	770,28	1583,5	2031,2
$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	240,1	278,86	301,82	337,03	366,96	447,40	656,67	656,77

Значения пределов упругости, подсчитанные с использованием величины угла среза $\alpha_0\big|_{c=0} = 23{,}2^0$. имеют несколько лучшее соответствии с экспериментальными данными.

На рис. 5.20 а и б показаны предельные круги Мора и огибающие к ним (для напряженных состояний с=0; 0,069; 0,116; 0,178; 0,232; 0,321; 0,408; 0,508), построенные по данным табл. 5.14 и 5.15 (по предложенным аналитическим зависимостям (сплошная линия) и экспериментальными данными А.Н. Ставрогина [3] (штриховая линия))



а)



б)

Рис. 5.20. Предельные круги Мора для пределов упругости и огибающие к ним для мрамора II.

Константы, необходимые для определения упругой составляющей деформации определялись при напряженных состояниях 0,116 и 0,321:

$$E_1 = 6{,}78 \cdot 9{,}81 \cdot 10^5 \text{ МПа; } \nu_{12} = \nu_{13} = 0{,}16\,;$$

$$\left[\frac{\nu_{12}}{E_2} + \frac{\nu_{31}}{E_3}\right]^{-1} = 9{,}52 \cdot 9{,}81 \cdot 10^5 \text{ МПа; } \left[\frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{32}}{E_3}\right]^{-1} = 23{,}71 \cdot 9{,}81 \cdot 10^5 \text{ МПа.}$$

Упругие участки диаграмм деформирования при этих напряженных состояниях аппроксимируются линейными зависимостями (рис. 5.21).

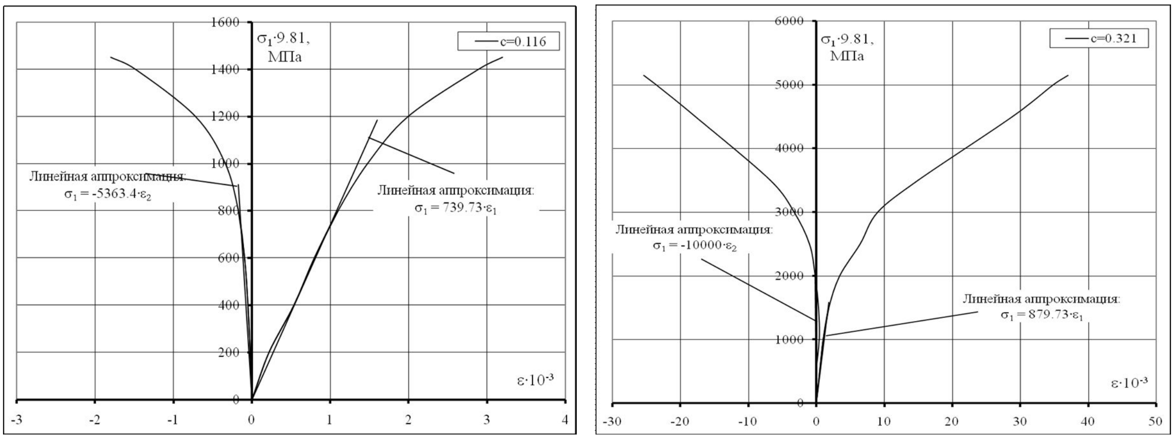


Рис. 5.21. Диаграммы продольной и поперечной деформаций мрамора II при а) c=0,116; б) c=0,321.

Зависимость $\lambda - c$ (рис. 5.22), полагая при этом напряженное состояние, при котором разрыхление материала отсутствует равное 0,4.

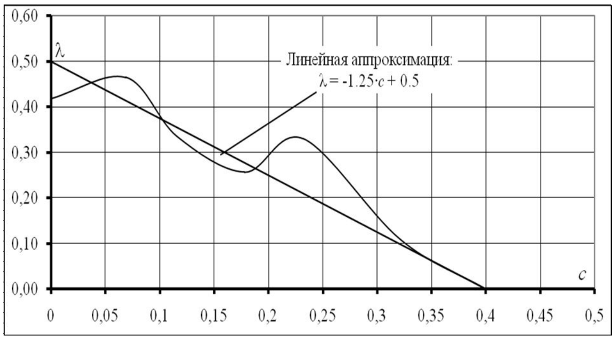


Рис. 5.22. Диаграмма зависимости коэффициента разрыхления от вида напряженного состояния ($\lambda - c$).

На рис. 5.23 изображена единая диаграмма деформирования для чистопластической деформации.

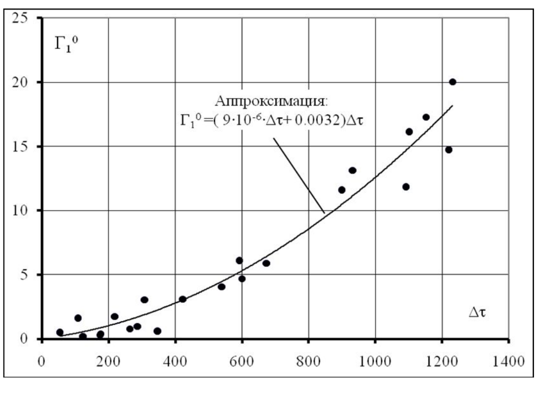


Рис. 5.23. Единая диаграмма деформирования мрамора II ($\Gamma_1^0 = (1/2\psi)\Delta\tau$).

Далее, используя выражения (4.7) – (4.9) и (4.3) определим расчетные значения Γ_1^0, Γ_1, Γ_2, ε_1, ε_2.

Единую кривую деформирования, следуя подходу А.Н. Ставрогина, в координатах $\varepsilon_1^p - \Delta\tau$ представим на рис. 5.24.

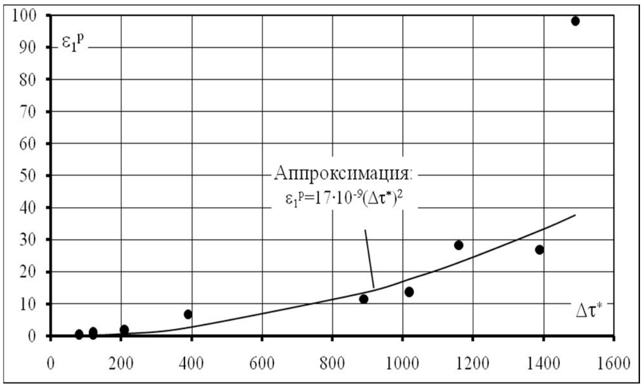


Рис. 5.24. Единая диаграмма деформирования мрамора II ($\varepsilon_1^p - \Delta\tau^*$).

Полученные результаты значений деформирования материала, следуя представлениям об ортотропности и изотропности материала, сведены в табл. 5.16.

На рис. 5.25 приведены диаграммы деформационного упрочнения мрамора II при разных напряженных состояний (c=0; 0,069; 0,116; 0,178; 0,232; 0,321; 0,408; 0,508) (по данным табл. 5.16) согласно:

– результатам рассматриваемой модели поведения горных пород (сплошная линия);

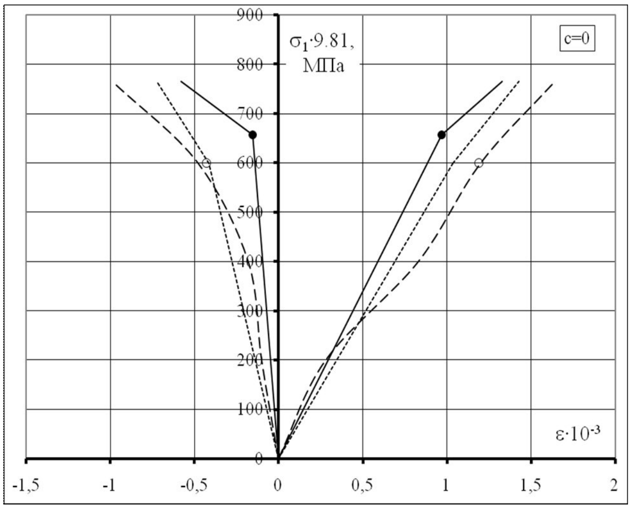
– подходу А.Н.Ставрогина (пунктирная линия), рассматривая горные породы как изотропный материал;

– экспериментальным данным (штриховая линия) [3].

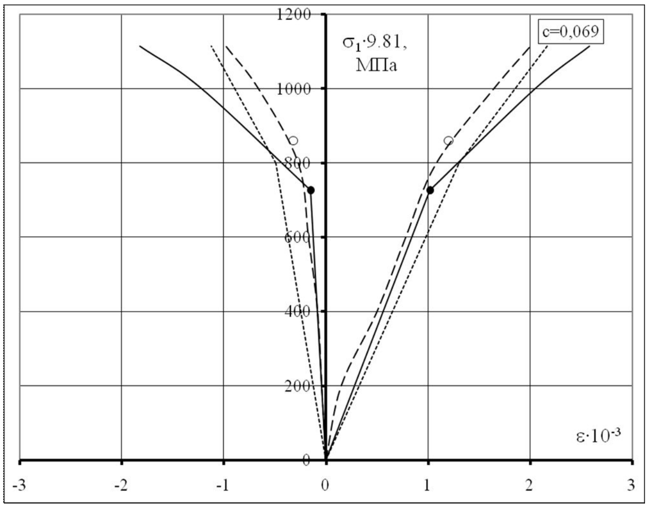
Отмечены значения пределов упругости: расчетные значение – черная точка; установленные А.Н. Ставрогиным – полая точка.

Таблица 5.16 (в отдельном файле)

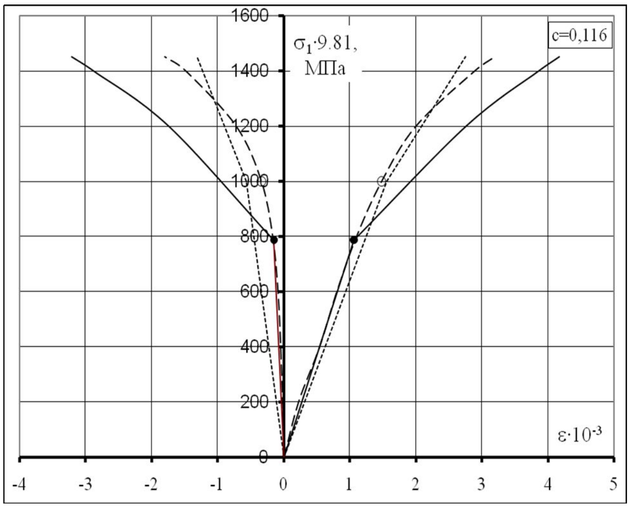
Продолжение таблицы 5.16


σ1·9.81,
МПа
c=0
ε·10-3

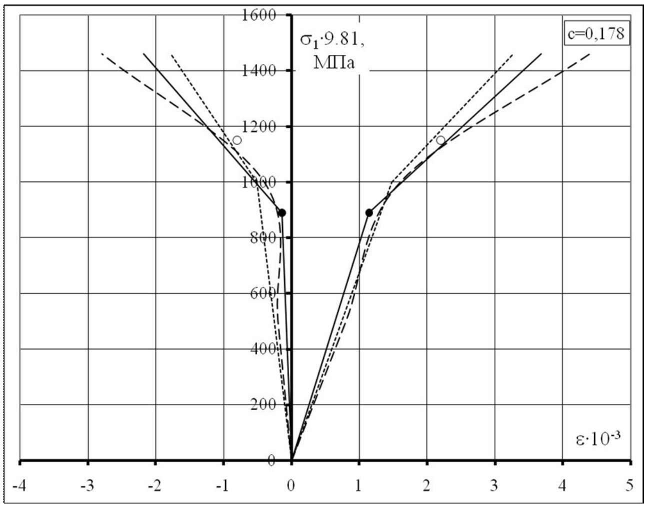
а)


σ1·9.81,
МПа
c=0,069
ε·10-3

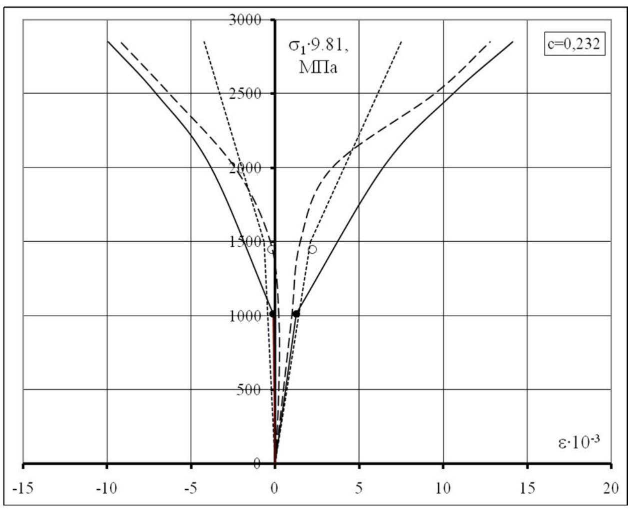
б)


σ1·9.81,
МПа
c=0,116
ε·10-3

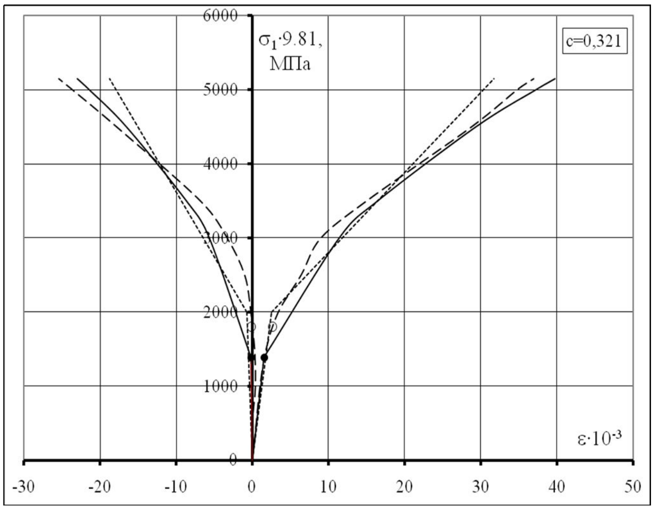
в)


σ1·9.81,
МПа
c=0,178
ε·10-3

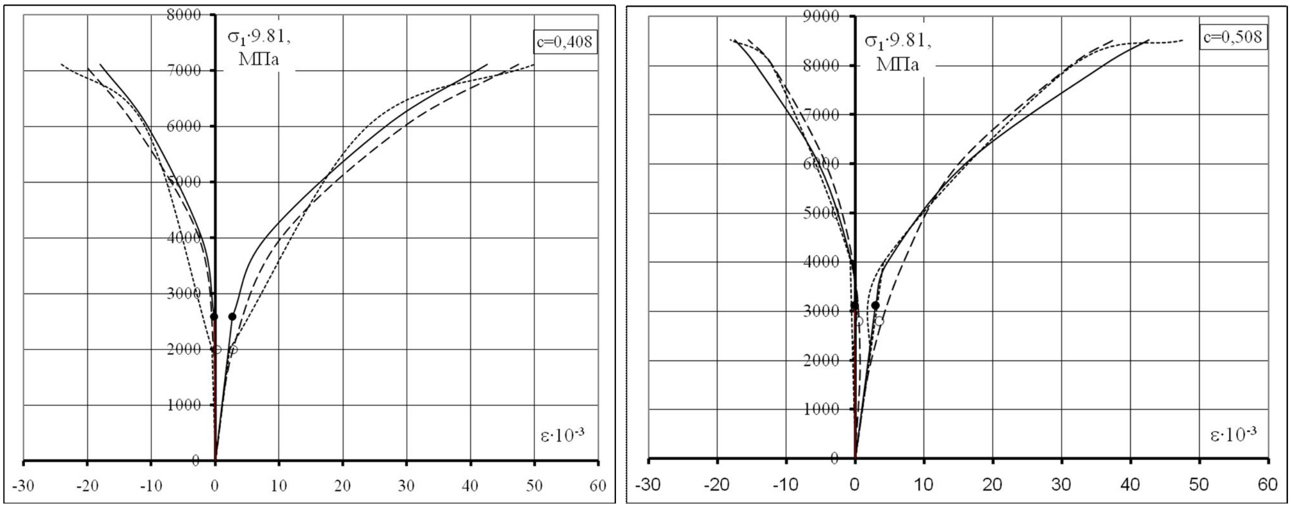
г)


σ1·9.81,
МПа
c=0,232
ε·10-3

д)


σ1·9.81,
МПа
c=0,321
ε·10-3

е)



ж) з)

Рис. 5.25. Диаграммы деформационного упрочнения мрамора II при разных напряженных состояниях: а) c=0; б) c=0,069; в) c=0,116; г) c=0,178; д) c=0,232; е) c=0,321; ж) c=0,408; з) c=0,508.

Расчетные значения предельных характеристик, деформаций и т.д. рассмотренных горных пород приведены в приложениях 1 и 2.

5.4. Анализ исследований K. Mogi

K. Mogi [4] приводит экспериментальные данные, полученные при трехосном сжатии (по схеме Кармана) образцов из dunham dolomite и westerly granite. В [4, с.36, табл. 2.3] сведены предельные значения разности главных напряжений $(\sigma_1 - \sigma_3)$, при различном боковом давлении $\sigma_2 = \sigma_3$ и значении углов среза, полученных экспериментальным путем и вычисленных автором согласно теории прочности Мора.

По данным в [4, с.36, табл. 2.3] определим напряженное состояние, соответствующее приводимым значениям напряжений. Далее, используя данные одноосного сжатия, определим, согласно предлагаемой зависимости (3.43), пределы прочности и соответствующие значения углов среза при других напряженных состояниях [128, 129].

Причем, считается, что в плоскости среза отношение $\sigma_0 / \tau_{\beta_0}$ является постоянным и для dunham dolomite принимается равным 1,667 (при этом $\alpha_0 = 18{,}4^0$), как и для выделенных нами материалов второй группы, а для westerly granite наиболее приемлемый результат получается, если принять $\sigma_0 / \tau_{\beta_0} = 2$ (при этом $\alpha_0 = 15^0$). Полученные результаты для двух горных пород (табл. 5.17) позволяют сделать вывод, что расчет по предлагаемому методу с достаточным приближением отражает экспериментальные значения пределов прочности и углов среза для указанных горных пород.

Таблица 5.17 - Сопоставление расчетных и экспериментальных (по данным K. Mogi) значений угла среза и пределов прочности

Горная порода	Экспериментальные данные напряжений (K. Mogi)		Эксперим. угол среза (K. Mogi)	Вид напр. сост.	Расчетн. значение угла среза (K.Mogi)	Расчетные значения по соотн. $\sigma_0 / \tau_{\beta_0}$	
Dunham dolomite	$\sigma_1 - \sigma_3$ (МПа)	$\sigma_2 = \sigma_3$ (МПа)	α_0 (град.)	c	α_0 (град.)	α_0 (град.)	σ_1^s (МПа)
	209	0,1	20	0,00	19	18,4	209,1
	289	8,2	20	0,03	20.5	19,7	266,1
	296	10,8	21	0,04	21	20,0	283,6
	344	18	20	0,05	22	20,8	319,3
	367	21,6	22	0,06	24.5	21,1	334,5
	412	33	25	0,07	26	22,1	386,1
Westerly granite	239	0,1	19	0,00	-	15,0	239,1
	378	9,5	19.5	0,02	15	15,8	333,2
	467	17	20.5	0,04	17,5	16,2	382,3
	555	27,5	22.5	0,05	20	16,7	445,3
	720	51	24	0,07	22	17,4	560,2
	840	77	-	0,08	23	18,1	688,4
	977	108	26	0,10	24,5	18,8	817,7
	1308	207	-	0,14	27	20,6	1197,8
	1597	321	32	0,17	30,5	22,3	1597,2
	1717	400	35	0,19	34,5	23,6	1927,9

В табл. 3.4 - 3.10 [4] приведены данные (предельные напряжения) испытаний образцов из dunham dolomite (block 2), solnhofen limestone, yamaguchi marble, mizuho trachyte, manazuru andesite, inada granite, orikabe monzonite. Вполне приемлемый результат (табл. 5.18) был получен при расчете пределов прочности в соответствии с предложенным нами разделением горных пород на определенные группы:

– если dunham dolomite (block 2), yamaguchi marble, mizuho trachyte отнести ко второй группе материалов;

– если solnhofen limestone отнести к первой группе материалов (когда в плоскости среза выполняется соотношение $\sigma_{\beta_0} / \tau_{\beta_0} = 2$).

При расчете пределов прочности таких материалов, как manazuru andesite, orikabe monzonite, inada granite соответствие расчетных и экспериментальных данных (табл. 5.18) достигается, когда, аналогично westerly granite, в плоскости среза принимается отношение $\sigma_0 / \tau_{\beta_0} = 2$.

Таблица 5.18 - Сопоставление расчетных и экспериментальных (по данным K. Mogi) значений пределов прочности

Горная порода	Экспериментальные данные напряжений (K. Mogi)		Вид напряж. сост.	Расчетные значения
	σ_1 (МПа)	σ_3 (МПа)	c	σ_1^s (МПа)
Solnhofen limestone	310	0	0,000	310
	397	20	0,050	335,9
	447,5	40	0,089	360,4
	473	60	0,127	388,8
	528	80	0,152	411,2
Dunham dolomite (block 2)	261,5	0	0,000	261,5
	400	25	0,063	441,6
	487	45	0,092	552,7
	540	60	0,111	631,3
	568	65	0,114	646,1
	620	85	0,137	754,0

	682	105	0,154	843,5
	725	125	0,172	953,4
Yamaguchi marble	82	0	0,000	82,0
	118	6	0,051	126,3
	140	12,5	0,089	169,4
	189	25	0,132	228,9
	243	40	0,165	283,8
Mizuho trachyte	100	0	0,000	100,0
	196	15	0,077	188,0
	259	30	0,116	249,5
	302	45	0,149	312,2
	341	60	0,176	373,3
	368	75	0,204	453,7
	437	100	0,229	562,5
Manazuru andesite	140	0	0,000	140,0
	349	16	0,046	253,2
	364	20	0,055	281,8
	381	20	0,052	273,9
	552	40	0,072	342,7
	671	70	0,104	473,4
	806	100	0,124	566,4
	875	110	0,126	574,5
	881	130	0,148	687,1
Orikabe monzonite	234	0	0,000	234,0
	339	5	0,015	286,0
	504	20	0,040	392,9
	583	40	0,069	549,3
	571	40	0,070	558,0
	600	40	0,067	537,7

Горная порода	Экспериментальные данные напряжений (K. Mogi)		Вид напряж. сост.	Расчетные значения
	σ_1, МПа	σ_3, МПа	c	σ_1^s, МПа
	718	80	0,111	845,4
	742	80	0,108	817,7
	794	80	0,101	764,7
	943	140	0,148	1156,5
	981	140	0,143	1105,5
	1107	200	0,181	1455,8
Inada granite	226	0	0,000	226,0
	232	0	0,000	226,0
	508	20	0,039	378,0
	692	40	0,058	470,1
	841	70	0,083	620,0
	879	70	0,080	597,1
	1003	100	0,100	731,1
	1023	100	0,098	717,4
	1138	150	0,132	976,7
	1198	150	0,125	923,3
	1301	200	0,154	1162,8
	1398	200	0,143	1070,7
	1438	200	0,139	1037,0
	1388	200	0,144	1079,4
	1334	200	0,150	1129,6
	1497	230	0,154	1162,1

Заключение.

Достигнутый результат объясняется следующим.

В отличие от подхода А.Н. Ставрогина и Б.Г. Тарасова, с единых позиций отображается продольная и поперечная деформации при неравномерном трехосном сжатии цилиндрических образцов горных пород. Правомерность выделения из общей неупругой деформации чисто пластической ее составляющей согласуется с превращением горных пород в пластичный материал при определенных условиях, когда (при некотором предельном напряженном состоянии) происходит переход от критерия Кулона-Мора к критерию Треска. Именно такая пластическая деформация характеризуется только уровнем напряжений и не зависит от вида напряженного состояния. Сопротивление пластическому сдвигу сопровождается разрыхлением материала вплоть до указанного предельного состояния, при котором разрыхление стремится к нулю. Предлагаемое аналитическое представление сопротивления сдвигу доставляет значение соответствующей компоненты чисто пластической деформации. С последней связана деформация разрыхления, которая развивается равномерно во всех направлениях в соответствии с гипотезой В.В, Новожилова.

ВЫВОДЫ

В рамках концепции скольжения рассмотрены вопросы деформационного упрочнения пластичных и полухрупких материалов. Основной прочностной характеристикой материала считается сопротивление сдвигу (скольжению). Полученные результаты состоят в следующем.

1. Анизотропия деформационного упрочнения пластичного материала исследована на примере испытания на кручение с растяжением тонкостенных трубчатых образцов стали 40Х. Показано, что после закручивания образца за предел текучести и разгрузки, при повторном нагружении растяжением возникает (пластическая) раскрутка образца. Установлено, что это явление происходит за счет смены знака приращения деформации в одном из направлений, которое было главным при предварительном кручении. Таким образом, такое проявление деформационной анизотропии, обычно называемое ортогональным эффектом Баушингера, следует оценивать не только по величине вторичного предела текучести, но и по изменению предварительно накопленной пластической деформации.

2. Для полухрупких материалов (для ряда горных пород) установлены единые соотношения связи между напряжениями и чисто пластическими деформациями (не вызывающими изменение объема тела) при произвольном пропорциональном нагружении, а наблюдаемое явление дилатансии учтено через коэффициент разрыхления, определенным образом зависящим от вида напряженного состояния. В результате определена полная картина деформирования для рассмотренных материалов.

3. Предложены аналитические зависимости для составления паспорта прочности горных пород на основе экспериментальных данных только одноосного сжатия и установленных свойств огибающей предельных кругов Мора.

4. Показано, что (при стандартном построении огибающей семейства кругов) координаты огибающей на диаграмме Мора могут быть найдены, если

заданы предел прочности на сжатие и точка касания огибающей круга Мора на сжатие при наличии известной функциональной зависимости минимального главного напряжения от максимального главного напряжения. Предложен простой способ конкретизации этой функциональной зависимости.

Согласно предлагаемому подходу, в качестве исходных данных для «восстановления» предельных кругов Мора при произвольном напряженном состоянии могут служить либо пределы прочности при растяжении и сжатии, либо один из этих пределов и отношение нормального напряжения к касательному в точке касания огибающей круга Мора на сжатие. Имея для конкретной горной породы диаграмму одноосного сжатия, а также предел прочности на сжатие и точку касания огибающей соответствующего круга Мора, можно с достаточной для практики точностью прогнозировать значение предела прочности на растяжение.

Достигнуто соответствие расчетных и экспериментальных значений пределов прочности.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю – д.ф.-м.н., профессору Б.А. Рычкову за постановку задач исследования, консультации и постоянное внимание к настоящей работе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 21153.3-85. Породы горные. Метод определения предела прочности при одноосном растяжении. – Введ. 1985–27–11. – М.: Изд-во стандартов, 1985. – 18 с.

2. ГОСТ 21153.2-84. Породы горные. Метод определения предела прочности при одноосном сжатии. – Введ. 1984–19–06. – М.: ИПК Изд-во стандартов, 2001. – 8 с.

3. Ставрогин А.Н., Пластичность горных пород [Текст] / А.Н Ставрогин, А.Г. Протосеня. – М.: Недра, 1979. – 301 с.

4. K. Mogi. Experimental Rock Mechanics. – London: Taylor&Francis, 2007. –

5. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении [Текст] / В.В. Новожилов // ПММ. – 1965. – Т. 29. – Вып. 4. – С. 681-689.

6. Русинко К.Н. Теория пластичности и неустановившейся ползучести [Текст] / К.Н. Русинко. – Львов: Вищ. шк., 1981. – 148 с.

7. Новожилов В.В. Пути развития теории деформирования поликристаллов [Текст] / В.В. Новожилов // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1984. – С. 11–24.

8. Васин Р.А. Определяющие соотношения теории пластичности [Текст] / Р.А. Васин // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНИТИ, 1990. – Т. 21. – С. 3-75.

9. Леонов М.Я. К теории монотонной пластической деформации [Текст] / М.Я. Леонов, Б.А. Рычков, Ж. Сулайманов // Проблемы прочности. – 1977. – № 5. – С. 3–7.

10. Новожилов В.В. Теория пластичности, учитывающая микродеформации [Текст] / В.В. Новожилов, Ю.И. Кадашевич, Ю.А. Черняков // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 284. – № 4. – С. 821–823.

11. Кадашевич Ю.И. Об учете микронапряжений в теории пластичности [Текст] / Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов // Инженерный журнал. МТТ. – 1968. – № 3. – С. 82–91.

12. Леонов М.Я. Устойчивость и прочность элементов конструкций [Текст] / М.Я. Леонов, Б.А. Рычков // Основы механики пластических материалов. – Илим, 1987. – Гл.8.

13. Рычков Б.А. Сложная деформация упругопластических материалов при нагружении без поворота главных осей тензора напряжения [Текст] / Б.А. Рычков // Известия РАН. МТТ. – 1993. – №1. – С. 112-119.

14. Рычков Б.А. Концепция скольжения и механика ортотропного материала [Текст] / Б.А. Рычков // Известия РАН. МТТ. – 1996. – №1. – С. 70-79.

15. Рычков Б.А. О деформационном упрочнении горных пород [Текст] / Б.А. Рычков // Известия РАН. МТТ. – 1999. – №2. – С. 115-124.

16. Вакуленко А.А. Связь микро- и макросвойств в упругоспластических средах [Текст] / А.А. Вакуленко // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНИТИ, 1991. – Т.22. – С. 3-54.

17. Леонов М.Я., Швайко Н.Ю. Сложная плоская деформация [Текст] / М.Я. Леонов, Н.Ю. Швайко // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 159. – №5. – С. 1007-1010.

18. Швайко Н.Ю. К теории пластичности, основанной на концепции скольжения [Текст] / Н.Ю. Швайко // Прикладная механика. – 1976. – Т.12. – № 11. – С. 12-24.

19. Рудаев Я.И. О сложной деформации линейно упрочняющихся материалов и решении некоторых граничных задач теории пластичности для кругового цилиндра [Текст]: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Я.И. Рудаев. – Фрунзе, 1971.

20. Абдрахманов С.А. О деформировании материалов, обладающих площадкой текучести, при одноосном нагружении [Текст] / С.А. Абдрахманов // Некоторые вопросы прочности и пластичности. – Фрунзе, 1979. – С. 27-40.

21. Салиев А.Б. Структурные представления в механике материалов [Текст]: автореф. дис. … доктора физ.-мат. наук: 01.02.04 / А.Б. Салиев. – Чебоксары, 1996.

22. Рычков Б.А. Сопротивление сдвигу поликристаллических материалов [Текст] / Б.А. Рычков // Современные проблемы механики сплошной среды: тр. междунар. научн. конф. – Бишкек, 2012. – С. 35-40.

23. Шемякин Е.И. Две задачи механики горных пород, связанные с освоение глубоких месторождений угля и руды [Текст] / Е.И. Шемякин // ФТПРПИ. – 1975. – №5. – С. 29-45.

24. Чирков С.Е. Зависимость прочности горных пород при сдвиге от вида напряженного состояния [Текст] / С.Е. Чирков // Физ. мезомех. – 2007. – Т.10. – №4. – С. 39-40.

25. Кадашевич Ю.И. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения [Текст] / Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов // ПММ. – 1958. – Т.22. – № 1. – С. 78-89.

26. Фейгин М. Неупругое поведение при совместном действии растяжения и кручения [Текст] / М. Фейгин // Сб. перев.: «Механика», 1956. – №3. – С. 125-139.

27. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением [Текст] / А.Ю. Ишлинский // Украин. матем. журнал. – 1954. – №3. – С. 314-325.

28. Комарцов Н.М. Анизотропия от скольжений при сложной деформации пластичных материалов [Текст]: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Н.М. Комарцов. – Бишкек, 2009. – 18 с.

29. Рычков Б.А. Анизотропия от скольжений при нагружениях с частичными разгрузками [Текст] / Б.А. Рычков, В.М. Жигалкин, Н.М. Комарцов, О.М. Усольцева // Физ. мезомех. – Т. 12. – № 1. – 2009. – С. 107-113.

30. Рычков Б.А. Сложная деформация стали 45 [Текст] / Б.А. Рычков // Сб. К проблеме механики реального твердого тела. – Фрунзе, 1984. – С. 66-78.

31. Лужанская Т.А. Начальная и деформационная анизотропия пластического материала [Текст] / Н.М. Комарцов, Т.А. Лужанская, Б.А. Рычков // Известия КГТУ. – №15. – 2009.– С. 67-71.

32. Лужанская Т.А. Кинематика пластической деформации при переходе от кручения к растяжению трубчатых образцов из стали 45 [Текст] / Н.М. Комарцов, Т.А. Лужанская, Б.А. Рычков // Тезисы докл. XVI Зимней школы по механике сплошных сред «Механика сплошных сред как основа современных технологиий». – Пермь, 2009. – С. 210.

33. Лужанская Т.А. Эффект Баушингера при сложном нагружении [Текст] / Н.М. Комарцов, Т.А. Лужанская, Б.А. Рычков // Тезисы XI Всероссийской научно-технической конференции и школы молодых ученых, аспирантов и студентов. – Воронеж, 2010. – С. 86-87.

34. Лужанская Т.А. Эффект Баушингера при сложном нагружении [Текст] / Н.М. Комарцов, Т.А. Лужанская // Тезисы докладов ежегодной конференции молодых ученых и студентов «Современные техника и технологии в научных исследованиях». – Бишкек, 2010. – С. 20-21.

35. Лужанская Т.А. Эффект Баушингера при сложном нагружении [Текст] / Н.М. Комарцов, Т.А. Лужанская, Б.А. Рычков // Вестник Тамбовского Университета. – 2010. – Т. 15. – Вып. 3. – С. 853-855.

36. Лужанская Т.А. Ортогональный эффект Баушингера [Текст] / А.В. Волков, Т.А. Лужанская, Б.А. Рычков // Тезисы докладов ежегодной конференции молодых ученых и студентов «Современные техника и технологии в научных исследованиях». – Бишкек, 2011. – С. 29-31.

37. Лужанская Т.А. Эффект Баушингера и сопутствующие явления [Текст] / Н.М. Комарцов, Т.А. Лужанская, Б.А. Рычков // Известия КГТУ. – 2011. – № 22. – С. 201-204.

38. Лужанская Т.А. Аналитическое описание ортогонального эффекта [Текст] / Н.М. Комарцов, Т.А. Лужанская, Б.А. Рычков // Сборник материалов IV международной конференции «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов». – М.: ИМЕТ РАН, 2011. – С. 901-903.

39. Лужанская Т.А. Деформационная анизотропия при ортогональном эффекте Баушингера [Текст] / Н.М. Комарцов, Т.А. Лужанская, Б.А. Рычков // Тезисы докладов XYII Зимней школы по механике сплошных сред. – Пермь, 2011. – С. 168.

40. Robertson E.C. Experimental study of the strength of rocks, Geol. Soc. Am. Bull., 1955.

41. Donath F.A. Experimental study of shear failure in anisotropic rocks. Geol. Soc. Am. Bull., 1961.

42. Paterson M.S. Experimental Rock Deformation. Springer-Verlag, 1978.

43. Караман Т. Опыты на всестороннее сжатие [Текст] / Т. Караман // Сб. Новые идеи в технике. – М.: Образование, 1915. – №1. – С. 51-102.

44. Бриджмен П. Исследования больших пластических деформаций и разрыва [Текст] / П. Бриджмен – М.: Изд-во иностр. лит., 1955 – 444 с.

45. Протодьяконов М.М. Методы исследования механических свойств горных пород в условиях объемного напряженного состояния [Текст] / М.М. Протодьяконов, Е.И. Ильницкая, В.И. Карпов // Сб. Механические свойства горных пород – М.: Академиздат, 1963.

46. Спивак А.И. Механика горных пород [Текст] / А.И. Спивак, А.Н. Попов. – М.: Недра, 1975. – 200 с.

47. Карташов Ю.М. Прочность и деформируемость горных пород [Текст] / Ю.М. Карташов, Б.В. Матвеев, Г.В. Михеев, А.Б. Фадеев. – М.: Недра, 1979. – 272 с.

48. K. Mogi. Fracture and flow of rocks under high triaxial compression. J. Geophys. Res. 76, #5, 1971.

49. Алексеев А.Д. Предельное состояние горных пород [Текст] / А.Д. Алексеев, Н.В. Недодаев. – Киев: Наук. думка, 1982. – 200 с.

50. Ильницкая Е.И. Свойства горных пород и методы их определения [Текст] / Е.И. Ильницкая, Р.И. Тедер, Е.С. Ватолин, М.Ф. Кунтыш. – М: Недра», 1969. – 392 с.

51. Епифанцев О.Г. Оценка прочности горных пород по минеральному составу [Текст] / О.Г. Епифанцев, Н.С. Плетенчук // Метод. указания по выполнению лаб. работ для студентов горных и строительных специальностей. – Новокузнецк: Изд-во СибГИУ, 2007. – 15 с.

52. Кочарян Г.Г. Деформационные процессы в массивах горных пород [Текст] / Г.Г. Кочарян // Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2009. – 378 с.

53. Протодьяконов М.М. Обобщенное уравнение огибающих к предельным кругам напряжений Мора [Текст] / М.М. Протодьяконов // Сб. Исследование физико-механических свойств горных пород применительно к задачам управления горным давлением. – М.: Издательство АН СССР, 1962. – С. 27-38.

54. Руппенейт К.В. Механические свойства горных пород [Текст] / К.В. Руппенейт. – М.: Углетехиздат, 1956. – 324 с.

55. Кузнецов Г.Н. Механические свойства горных пород [Текст] / Г.Н. Кузнецов. – М.: Углетехиздат, 1947. – 175 с.

56. Улинич Ф.Р. Некоторые вопросы теории хрупкого разрушения горных пород [Текст] / Ф.Р. Улинич // В кн. Разрушение углей и пород. – М.: Углетехиздат, 1958. – С. 401-510.

57. Серенсен С.В. Пластичность и прочность материала [Текст] / С.В. Серенсен // Энциклопедический справочник «Машиностроение». – М.: Машгиз. – 1947. – Т. I. – Кн. II.

58. Дуйшеналиев Т.Б.. Уравнение огибающей линии предельных кругов напряжений [Текст] / Т.Б. Дуйшеналиев, К.Т. Койчуманов. – Бишкек: Илим, 2006. – 130 с.

59. Гун Бэнь-И. Определение приближенного паспорта прочности горных пород по результатам испытаний пород на одноосное сжатие [Текст]: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 56464 / Гун Бэнь-И.–.Л., 1962. – с.

60. Драгон А. Континуальная модель пластически хрупкого поведения скальных пород и бетона [Текст] / А. Драгон , З. Мруз // Механика

деформируемых твердых тел: Направления развития. – М.: Мир, 1983. – С. 163-188.

61. Работнов Ю.Н. Механика деформирования твердого тела [Текст] / Ю.Н. Работнов – М.: Наука, 1979.

62. Тарасов Б.Г. Суперхрупкость горных пород при высоких всесторонних напряжениях [Текст] / Б.Г. Тарасов // Вестник инженерной школы ДВФУ. – 2012. – №1(10). – С. 57-89.

63. Цой П.А. Деформирование и разрушение квазипластичных геоматериалов в условиях простого и сложного нагружений [Текст]: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / П.А. Цой. – Новосибирск, 2009. – 18 с.

64. Чанышев А.И. К вопросу построения паспортных зависимостей для горных пород [Текст] / А.И. Чанышев, Б.О. Куренкеева // Проблемы и перспективы развития горных наук: сб. статей междунар. конф. – Новосибирск, 2004. – С. 308-312.

65. Дамаскинская Е.Е. Компьютерное моделирование процесса разрушения горных пород [Текст] / Е.Е. Дамаскинская, В.С. Куксенко // Вестник Дальневосточного государственного технического университета. – 2011. – №3/4. – С. 68-91.

66. Старотиторов И.Ю. Анализ процесса разрушения горных пород в объемном напряженном состоянии на численной модели [Текст] / И.Ю. Старотиторов // Перспективы освоения подземного пространства: материалы 3-й межд. научно-практ. конф. молодых ученых, аспирантов и студентов. – Д.: Национальный горный университет, 2009. – С. 34-38.

67. Шашенко А.Н. Механика горных пород [Текст] / А.Н. Шашенко, В.П. Пустовойтенко // Учебник для вузов. – К.: Новий друк, 2003. – 400 с.

68. Расчеты на прочность в машиностроении [Текст] / [С.Д. Пономарев, В.Л Бидерман. и др.]. – М: Машгиз, 1956. –Т.1. – 884 с.

69. Еременко В.А. Исследование физико-механических свойств и динамических характеристик горных пород на Ждановском месторождении

[Текст] / В.А. Еременко, В.М. Жигалкин, А.В. Потапов, В.В. Атанов // ГИАБ. – 2011. – № 4. – С. 133-140.

70. Федоренко А.И. Исследование прочностных и деформационных свойств горных пород Казского месторождения [Текст] / А.И. Федоренко // ГИАБ. – 2005. – № 9. – С. 235-237.

71. Ширманкин Ю.А. Определение пределов прочности пород при объемном сжатии для обоснования моделирования на эквивалентных материалах [Текст] / Ю.А. Ширманкин, С.А. Толмачев, Н.Т. Бедарев // ГИАБ. – 1995. – №4. – С. 98-100.

72. Кузнецова Т.Ю. Определение физических свойств горных пород по образцам малых размеров (микропробам) [Текст] / Т.Ю. Кузнецова // ГИАБ. – 2002. – №2. – С.43-45.

73. Сукнёв С.В. Применение интегрального критерия для оценки прочности пород [Текст] / С.В. Сукнёв // ГИАБ. – 2010. – № 2. – С. 301-307.

74. Ануфриев В.Е. Экспресс-метод определения прочностных и деформационных свойств пород [Текст] / В.Е. Ануфриев, Н.Ф. Денискин, В.Н. Федоринин, В.Н. Цыцаркин // ГИАБ. – 2004. – № 2. – С. 77-82.

75. Волков М.А. Изучение физико-механических свойств горных пород на разных этапах разрушения [Текст] / М.А. Волков, Д.В. Соловьев, Л.А. Белина, А.Г. Пимонов // Вестник КузГТУ. – 2007. – №2. – С. 16-19.

76. Стефанов Ю.П. Некоторые особенности численного моделирования поведения упруго-хрупкопластичных материалов [Текст] / Ю.П. Стефанов // Физическая мезомеханика. – 2005. – Т. 8. – № 3. – С. 129-142.

77. Шемякин Е.И. Синтетическая теория прочности I [Текст] / Е.И. Шемякин // Физическая мезомеханика. – 1999. – Т. 2. – №6. – С. 59-65.

78. Шемякин Е.И. Критерии необратимого деформирования и разрушения горных пород [Текст] / Е.И. Шемякин // Геомеханика и разрушение горных пород: науч. сообщ. – М.: ИГД им. А.А. Скочинского, 2000. – Вып. 317. – С. 3-12.

79. Шемякин Е.И. О паспорте прочности горных пород [Текст] / Е.И.Шемякин // Измерение напряжений в массиве горных пород: материалы IV семинара. – Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1974. –Ч.1. – С. 9-20.

80. Чирков С.Е. Основные зависимости прочностных и деформационных характеристик горных пород от вида напряженного состояния [Текст] / С.Е. Чирков // Механика горных пород: науч. сообщ. – М.: ИГД им. А.А. Скочинского, 1999. – Вып. 313. – С. 47-62.

81. Адигамов Н.С. О самоорганизации структурообразования при деформировании горных пород [Текст] / Н.С. Адигамов, Я.И. Рудаев // Геординамика и напряженное состояние недр земли: тр. международ. конф. – Новосибирск, 1999. – С. 51-58.

82. Адигамов Н.С. Уравнение состояния, учитывающее разупрочнение материала [Текст] / Н.С. Адигамов, Я.И. Рудаев // ФТПРПИ. – 1991. – №4. – С. 24-32.

83. Шашенко О.М. Деформируемость и прочность массивов горных пород [Текст] / О.М. Шашенко, О.О. Сдвижкова, С.М Гапеев. – Д.: Национальный горный университет, 2008. – 224 с.

84. Гольдштейн Р.В. Модель хрупкого разрушения пористых материалов при сжатии [Текст] / Р.В. Гольдштейн, Н.М. Осипенко // Математическое моделирование систем и процессов. – 2009. – № 17. – С. 47-57.

85. Манаков А.В. Построение паспортов прочности по опытным данным [Текст] / А.В. Манаков // ГИАБ. – 2004. – № 11. – С. 94-95.

86. Присташ В.В. Изменение параметров паспорта прочности горных пород от скорости их деформации [Текст] / В.В. Присташ // ГИАБ. – 2003. – № 11. – С. 36-38.

87. Еремин Г.М. Повышение точности и надежности определения прочностных характеристик пород и их свойств при деформациях массивов горных пород [Текст] / Г.М. Еремин // ГИАБ. – 2000. – № 9. – С. 31-33.

88. Мирошников В.И. О деформационном критерии прочности горных пород [Текст] / В.И. Мирошников, И.Ю. Рассказов // ГИАБ. – 2007. – № 9. – С. 246 – 253.

89. Широколобов Г.В. Разработка методов определения предельных и запредельных характеристик горных пород [Текст]: автореф. дис. … канд. техн. наук: 25.00.20 / Г.В. Широколобов – Кемерово, 2004. – 18 с.

90. Байбурова М.М. Решение задач прочности и разрушения анизотропных материалов и горных пород [Текст]: автореф. дис. … канд. техн. наук:01.02.04 / М.М. Байбурова – Саратов, 2008. – 16 с.

91. Алиев М.М. Новый подход к разработке полиномиальных критериев прочности для изотропных полимеров и горных пород [Текст] / М.М. Алиев, Н.Г. Каримова, С.В Шафиева. // Известия вузов. Нефть и газ. – 2009. – №3. – С. 77-82.

92. Кондратьева Е.И. Уточнение прочностных и деформационных характеристик горных пород [Текст]: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Е.И. Кондратьева. – Бишкек, 2008. – 19 с.

93. Ильюшин А.А. Сопротивление материалов [Текст] / А.А. Ильюшин, В.С. Ленский – М.: Физматгиз, 1959. – 373 с.

94. ГОСТ 4543-71. Прокат из легированной конструкционной стали. Технические условия. – Введ. 1971–18–06. – М.: ФГУП Стандартинформ, 2008. – 41 с.

95. Лужанская Т.А. О теоретическом и экспериментальном построении огибающей предельных кругов Мора [Текст] / В.М. Жигалкин, Т.А. Лужанская, Б.А. Рычков, О.М. Усольцева, П.А. Цой // ФТПРПИ. – 2010. – №6. – С. 25-36.

96. Luzhanskaya T.A. Tracing of stress circle envelope based on the calculation and experiment data [Text] / V.M. Zhigalkin, T.A. Luzhanskaya, B.A. Rychkov, O.M. Usol’tseva, P.A. Tsoi // Journal of Mining Science. – 2010. – T. 46. – №6. – С. 612-620.

97. Аннин Б.Д. Одна плоская упруго-пластическая задача при экспоненциальном условии текучести [Текст] / Б.Д. Аннин // Изв. АН СССР МТТ. – 1966. – №3. – С. 122-123.

98. Лужанская Т.А. Аналитическое исследование предела прочности при растяжении горных пород [Текст] / Б.А. Рычков, Т.А. Лужанская // ИЗВЕСТИЯ КГТУ. – 2014. – Часть 2. – № 32. – С. 141-145.

99. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1977. – 831 с.

100. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия [Текст] / А.В. Погорелов – М.: Наука, 1974. – 176 с.

101. Рычков Б.А. Определение предела прочности на растяжение для горных пород по экспериментальным данным трехосного [Текст] / Б.А. Рычков, Ж.Ы. Маматов, Е.И. Кондратьева // ФТПРПИ. – 2009. – №3. – С. 40-45.

102. Рычков Б.А. О прочностных характеристиках горных пород / Б.А. Рычков // Современные проблемы механики [Текст]/ Ин-т геомеханики и освоения недр НАН КР. – Бишкек, 2011. – Вып. 13. – С. 310-317.

103. Тарасов Б.Г. Закономерности деформирования и разрушения горных пород при высоких давлениях [Текст]: автореф. дис. … д-ра техн. наук: 05.15.11 / Б.Г. Тарасов. – СПб., 1991. – 46 с.

104. Мор О. Чем обусловлены предел упругости и временноесопротивление материалов [Текст]/ О. Мор // Новые идеи в технике. – С-Пб.: Образование, 1915. – 75 с.

105. Лужанская Т.А. Упругость и неупругость горных пород [Текст] / Б.А. Рычков, Т.А. Лужанская // Сборник материалов научных чтений им. чл-корр. РАН И.А. Одинга «Механические свойства современных конструкционных материалов». – М.: ИМЕТРАН, 2012. – С. 220-222.

106. Лужанская Т.А. Об одном методе конкретизации критерия прочности Кулона-Мора [Текст] / Б.А. Рычков, Т.А. Лужанская // Сборник материалов международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы механики сплошных сред». – Бишкек, 2012. – Вып. 16. – С. 228-232.

107. Лужанская Т.А. К построению паспортов прочности горных пород [Текст] / Т.А. Лужанская // Тезисы докладов XXI Всероссийской школы-конференции молодых ученых и студентов «Математическое моделирование в естественных науках».– Пермь, 2012. – С. 110-112.

108. Лужанская Т.А. Определение пределов прочности горных пород в состоянии трехосного сжатия по экспериментальным данным одноосного сжатия [Текст] / Т.А. Лужанская // Тезисы докладов Всероссийской конференции молодых ученых «Неравновесные процессы в сплошных средах». – Пермь, 2012. – С. 49.

109. Рычков Б.А. Кинематические и прочностные характеристики горных пород [Текст] / Б.А. Рычков // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли: тр. межд. конф. – Новосибирск: ИГД СО РАН, 1999. – С. 71-76.

110. Лужанская Т.А. О пределах прочности горных пород [Текст] / Б.А. Рычков, Т.А. Лужанская, О.М. Усольцева, М.К. Чыныбаев // Труды международной научной конференции, посв. памяти академика М.Я. Леонова «Современные проблемы механики сплошной среды». – Бишкек, 2012. – С. 318- 322.

111. Лужанская Т.А. О пределах упругости и прочности горных пород [Текст] / Н.М. Комарцов, Т.А. Лужанская // ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА. – 2013. –№2. – С.110-121.

112. Лужанская Т.А. Об одном методе определения пределов прочности горных пород [Текст] / Н.М. Комарцов, Т.А. Лужанская // ВЕСТНИК КРСУ. – 2013. – Т.13. – №7. – С. 55-59.

113. Лужанская Т.А. Способ определения предельных характеристик горных пород [Текст] / Н.М. Комарцов, Т.А. Лужанская // Труды международной научной конференции «Рахматулинские - Ормонбековские чтения». – Бишкек, 2013. – №2. – С. 166-169.

114. Лужанская Т.А. Разработка модели перехода горных пород в предельное состояние [Текст] / Т.А. Лужанская // Материалы XXIII Всероссийской школы-конференции молодых ученых и студентов

«Математическое моделирование в естественных науках». – Пермь, 2014. – С. 151-154.

115. Лужанская Т.А. Деформационное упрочнение горных пород [Текст] / Т.А. Лужанская // Материалы докладов 6-ой международной конференции молодых ученых и студентов «Современные техника и технологии в научных исследованиях». – Бишкек, 2014. – С. 59-62.

116. Лужанская Т.А. К вопросу определения предельных характеристик горных пород [Текст] / Т.А. Лужанская // Сборник материалов XI Российской ежегодной конференции молодых научных сотрудников и аспирантов "Физико-химия и технология неорганических материалов". – М.: ИМЕТРАН, 2014. – С. 143-145.

117. Ставрогин А.Н. Каталог механических свойств горных пород [Текст] / А.Н. Ставрогин, В.С. Георгиевский // ВНИМИ. – Л., 1972 – 2-е изд. – 267 с.

118. Капустянский С.М. Упругопластическая дилатансионная модель анизотропных сред [Текст] / С.М. Капустянский // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1985. – №8. – С. 50-59.

119. Лужанская Т.А. О деформации и разрушении горных пород [Текст] / Б.А. Рычков, Т.А. Лужанская // Сборник материалов III Всероссийской конференции «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций». – Новосибирск, 2014. –С. 94-95.

120. Макламур Р. Механические свойства анизотропных осадочных пород [Текст] / Р. Макламур, К.Е. Грей / Конструирование и технология машиностроения: тр. американского общества инжинерного. Серия B. – 1967. – Т. 89. – №1. – С.

121. Bieniawski Z. T. Deformational behaviour of fractured rock under multiaxial compression [Text] / Z. T. Bieniawski. // Proc. Struct. Solid Mech. Engng. Design. Southhamptom. Part 1. – 1969. – P. 589-598.

122. Лужанская Т.А. О деформации и разрушении горных пород [Текст] / Б.А. Рычков, Т.А. Лужанская // Тезисы 2-й межд. конференции, посв. 20-и

летию образования КРСУ и 100-летию пр. Я.В. Быкова «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». – Бишкек, 2013. – С. 137.

123. Лужанская Т.А. О деформации и разрушении горных пород [Текст] / Б.А. Рычков, Т.А. Лужанская // Материалы 2-й межд. конференции, посв. 20-и летию образования КРСУ и 100-летию пр. Я.В. Быкова «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений». – Бишкек, 2013. – Т.2. – С. 163-166.

124. Лужанская Т.А. Моделирование диаграмм упрочнения горных пород [Текст] / Б.А. Рычков, Т.А. Лужанская // ВЕСТНИК КРСУ. – 2014. – Т.14. – №7. – С. 77-80.

125. Комарцов Н.М. Деформация сдвига как основной аргумент прочностной характеристики материала [Текст] / Н.М. Комарцов, Б.А. Рычков // Вестник КРСУ. – 2007. – Т. 7. – №8. – С. 123-129.

126. Стефанов Ю.П. Режимы дилатансии и уплотнения развития деформации в зонах локализованного сдвига [Текст] / Ю.П. Стефанов // Физическая мезомеханика. – 2010. – №13. – С. 44-52.

127. Зарецкий – Феоктистов Г.Г. Об экспериментальных кривых деформирования горных пород в сложном напряженном состоянии [Текст] / Г.Г. Зарецкий – Феоктистов // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1989. – №6. – С. 43-49.

128. Лужанская Т.А. К предельным характеристиками горных пород [Текст] / Б.А. Рычков, Т.А. Лужанская // Сборник материалов международных научных чтений им. чл.-корр. РАН И.А. Одинга «Механические свойства современных конструкционных материалов». – М.: ИМЕТРАН, 2014. – С. 252-254.

129. Лужанская Т.А. О пределах прочности горных пород при сложном напряженном состоянии [Текст] / Б.А. Рычков, Т.А. Лужанская // Материалы IV международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения». – Алматы, 2014. – Т.2. – С. 197-202.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Песчаник П-03

$\sigma_p = 250 \cdot 9{,}81$МПа ($\sigma_{p\,эксп} = 255 \cdot 9{,}81$ МПа)

Пределы прочности					
I метод[3]: $\xi = 6{,}43$; $\eta = -12{,}85$					
c	0	0,07	0,116	0,178	0,227
α_0 (град.)	18,4	21,8	24,6	29,7	36,1
$\alpha_{0\,эксп}$ (град.)	28	31	30	-	-
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	2810	5028	7019	10637	15521
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	280,0	1134,7	2096,6	4045,3	6478,7
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	841,6	1745,6	2512,4	3766,2	5169,5
II метод[4]: P=1,49%; $\xi = 4{,}98$; $\eta = -9{,}1$					
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	2810	4630	6247	9271	13582
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	334,7	1119,8	1955,2	3648,0	5854,4
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	910,2	1671,2	2298,0	3351,7	4627,6
Пределы упругости $k_0 = k_2 = 1{,}667$					
I метод: $\xi = 6{,}43$; $\eta = -12{,}85$					
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	2010	3596	5021	7609	11102
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	200,3	811,6	1499,7	2893,6	4634,2
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	602,0	1248,7	1797,1	2694,0	3697,8
II метод: P=1,49%; $\xi = 4{,}98$; $\eta = -9{,}1$					
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	2010	3312	4468	6632	9715
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	239,4	801,0	1398,5	2609,4	4187,6
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	651,0	1195,4	1643,8	2397,5	3310,1

[3] Отношение σ^0 / τ^0, входящее в выражение для определения параметра ξ определяется через известный угол среза при одноосном сжатии.

[4] Отношение σ^0 / τ^0 определяется через известное значение пористости материала (P).

Известняк Д-6

$$\sigma_p = 123 \cdot 9{,}81\,\text{МПа}\ (\sigma_{p\,эксп} = 120 \cdot 9{,}81\,\text{МПа})$$

Пределы прочности					
I метод: $k_0 = 2{,}74$; $\xi = 5{,}47$; $\eta = -8{,}2$; $S_0^{0s} = 2534{,}6 \cdot 9{,}81\,\text{МПа}$					
c	**0**	**0,069**	**0,116**	**0,185**	**0,233**
α_0 (град.)	20,0	22,7	25,0	29,1	32,7
$\alpha_{0\,эксп}$ (град.)	-	21	24	-	-
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	1845	3017	4094	6210	8250
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	215,8	710,2	1256,6	2474,8	3724,2
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	593,0	1076,2	1489,3	2225,4	2855,7
II метод: P=1%; $k_0 = 1{,}51$; $\xi = 5{,}6$; $\eta = -10{,}2$; $S_0^{0s} = 2441{,}1 \cdot 9{,}81\,\text{МПа}$					
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	1845	2897	3772	5270	6496
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	230,6	725,2	1238,3	2278,8	3216,5
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	610,1	1068,1	1424,4	1974,8	2363,2
Пределы упругости					
I метод: $k_0 = 2{,}74$; $\xi = 5{,}47$; $\eta = -8{,}2$; $S_0^{0e} = 1579{,}8 \cdot 9{,}81\,\text{МПа}$					
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	1150	1881	2552	3870	5142
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	134,5	442,7	783,2	1542,5	2321,3
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	369,6	670,8	928,3	1387,1	1780,0
II метод: P=1%; $k_0 = 1{,}51$; $\xi = 5{,}6$; $\eta = -10{,}2$					
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	1150	1806	2351	3285	4049
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	143,7	452,1	771,8	1420,4	2004,8
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	380,3	665,8	887,8	1230,9	1473,0

Песчаник П-026

$\sigma_p = 101 \cdot 9{,}81$ МПа ($\sigma_{p\,эксп} = 70 \cdot 9{,}81$ МПа)

Пределы прочности $k_0 = k_2 = 1{,}667$					
I метод: $\xi = 6{,}43$; $\eta = -12{,}85$					
c	0	0,069	0,116	0,178	0,232
α_0 (град.)	18,4	21,8	24,6	29,7	36,1
$\alpha_{0\,эксп}$ (град.)	21	26	27	-	36
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	1369	2431	3420	5182	7974
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	136,4	544,5	1021,4	1970,8	3336,1
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	410,0	843,1	1224,0	1834,9	2625,4
II метод: P=5,5%; $\xi = 6{,}54$; $\eta = -11{,}93$					
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	1369	2461	3508	5444	8602
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	137,6	553,7	1054,8	2103,7	3701,1
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	411,6	855,6	1260,7	1946,8	2891,0
Пределы упругости $k_0 = k_2 = 1{,}667$					
I метод: $\xi = 6{,}43$; $\eta = -12{,}85$					
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	930	1651	2323	3520	5417
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	92,7	369,9	693,9	1338,8	2266,3
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	278,5	572,7	831,5	1246,5	1783,5
II метод: P=5,5%; $\xi = 6{,}54$; $\eta = -11{,}93$					
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	930	1672	2383	3698	5843
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	93,5	376,1	716,5	1429,1	2514,3
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	279,6	581,2	856,4	1322,5	1964,0

Песчаник П-01

$$\sigma_p = 191 \cdot 9{,}81\,\text{МПа}\ (\sigma_{p\,эксп} = 200 \cdot 9{,}81\,\text{МПа})$$

Пределы прочности $k_0 = k_2 = 1{,}667$					
I метод: $\xi = 6{,}43$; $\eta = -12{,}85$					
c	0	0,069	0,116	0,168	0,227
α_0 (град.)	18,4	21,8	24,6	29,7	36,1
$\alpha_{0\,эксп}$ (град.)	22	23	24	27	30
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	2320	4119	5795	8214	12815
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	231,2	922,8	1731,0	3030,7	5348,9
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	694,9	1428,7	2074,3	2925,2	4268,1
II метод: P=0,68%; $\xi = 4{,}24$; $\eta = -7{,}74$					
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	2320	3630	4817	6573	10154
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	303,3	905,2	1542,2	2540,6	4386,5
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	782,0	1335,7	1794,6	2406,6	3464,9
Пределы упругости $k_0 = k_2 = 1{,}667$; $S_0^{0e} = 2400 \cdot 9{,}81$МПа					
I метод: $\xi = 6{,}43$; $\eta = -12{,}85$					
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	1600	2841	3997	5665	8838
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	159,4	636,4	1193,8	2090,2	3688,9
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	479,2	985,3	1430,6	2017,4	2943,5
II метод: P=0,68%; $\xi = 4{,}24$; $\eta = -7{,}74$					
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	1600	2503	3322	4533	7003
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	209,1	624,3	1063,6	1752,1	3025,2
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	539,3	921,1	1237,7	1659,7	2389,6

Песчаник выбросоопасный

$$\sigma_p = 81 \cdot 9{,}81\,\text{МПа}\ (\sigma_{p\,эксп} = 84 \cdot 9{,}81\,\text{МПа})$$

Пределы прочности $k_0 = k_2 = 1{,}667$					
I метод: $\xi = 6{,}43$; $\eta = -12{,}85$					
c	0	0,069	0,116	0,178	0,227
α_0 (град.)	18,4	21,8	24,6	29,7	36,1
$\alpha_{0\,эксп}$ (град.)	20	25	30	36	40
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	1220,0	2166,2	3047,4	4618,1	6738,7
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	121,6	485,3	910,2	1756,3	2812,8
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	365,4	751,3	1090,8	1635,2	2244,4
II метод: *P*=6%; $\xi = 6{,}67$; $\eta = -12{,}15$					
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	1220	2209	3161	4922	7367
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	121,1	494,8	947,7	1899,6	3160,6
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	364,9	766,1	1134,0	1758,8	2502,1
Пределы упругости $k_0 = k_2 = 1{,}667$					
I метод: $\xi = 6{,}43$; $\eta = -12{,}85$					
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	900	1598	2248	3407	4971
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	89,7	358,0	671,5	1295,6	2075,0
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	269,6	554,2	804,7	1206,3	1655,7
II метод: *P*=6%; $\xi = 6{,}67$; $\eta = -12{,}15$					
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	900	1629	2332	3631	5435
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	89,4	365,0	699,2	1401,3	2331,6
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	269,2	565,1	836,6	1297,5	1845,8

Диабаз

$$\sigma_p = 202 \cdot 9{,}81\,\text{МПа}\ (\sigma_{p\,эксп} = 150 \cdot 9{,}81\,\text{МПа})$$

Пределы прочности					
I метод: $\xi = 6{,}43$; $\eta = -12.85$					
c	0	0,068	0,116	0,182	0,227
α_0 (град.)	18,4	21,8	24,6	29,7	36,1
$\alpha_{0\,эксп}$ (град.)	24	25	30	27	33
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	2020	3559	5046	7856	11158
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	201,3	791,3	1507,1	3021,3	4657,3
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	605,0	1233,1	1806,1	2773,9	3716,2
II метод: P=0,98%; $\xi = 4{,}57$; $\eta = -8{,}34$					
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	2020	3204	4324	6510	9241
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	253,0	780,2	1370,0	2602,1	3988,2
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	668,7	1167,4	1601,6	2353,4	3151,3
Пределы упругости $k_0 = k_2 = 1{,}667$; $S_0^{0e} = 1980 \cdot 9{,}81$МПа					
I метод: $\xi = 6{,}43$; $\eta = -12{,}85$					
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	1320	2326	3297	5134	7291
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	131,5	517,1	984,9	1974,3	3043,4
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	395,4	805,8	1180,2	1812,7	2428,4
II метод: P=0,98%; $\xi = 4{,}57$; $\eta = -8{,}34$					
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	1320	2094	2826	4254	6039
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	165,3	509,8	895,2	1700,4	2606,2
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	436,9	762,9	1046,6	1537,9	2059,2

Песчаник П-0

$$\sigma_p = 174 \cdot 9{,}81\,\text{МПа}\ (\sigma_{p\,эксп} = 208 \cdot 9{,}81\,\text{МПа})$$

Пределы прочности					
I метод: $k_0 = 1{,}494$; $\xi = 5{,}31$; $\eta = -7{,}97$					
c	0	0,069	0,116	0,178	0,223
α_0 (град.)	22,0	23,8	25,3	27,8	30,1
$\alpha_{0\,эксп}$ (град.)	21	25	-	-	30
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	2350	3646	4767	6590	8243
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	301,8	901,5	1522,4	2656,4	3743,8
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	786,2	1335,4	1773,6	2415,6	2928,1
II метод: P=0,36%; $k_0 = 1{,}44$; $\xi = 4{,}9$; $\eta = -8{,}95$					
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	2350	3493	4416	5804	6966
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	329,8	921,9	1503,5	2508,5	3415,0
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	816,3	1323,1	1699,2	2205,0	2571,2
Пределы упругости					
I метод: $k_0 = 1{,}494$; $\xi = 5{,}31$; $\eta = -7{,}97$					
k	1,49	1,60	1,67	1,76	1,83
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	1860	2885	3773	5216	6524
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	238,9	713,5	1204,9	2102,6	2963,1
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	622,3	1057,0	1403,8	1911,9	2317,5
II метод: P=0,36%; $k_0 = 1{,}44$; $\xi = 4{,}9$; $\eta = -8{,}95$					
k	1,44	1,56	1,63	1,74	1,81
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	1860	2765	3495	4594	5514
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	261,0	729,7	1190,0	1985,5	2703,0
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	646,1	1047,2	1344,9	1745,2	2035,1

Кварцевый диорит Д-2

$$\sigma_p = 159 \cdot 9{,}81 \text{МПа} \ (\sigma_{p\,эксп} = 190 \cdot 9{,}81 \text{МПа})$$

Пределы прочности					
I метод: $\xi = 6{,}43$; $\eta = -12{,}85$					
c	0	0,068	0,116	0,176	0,227
α_0 (град.)	18,4	21,8	24,6	29,7	36,1
$\alpha_{0\,эксп}$ (град.)	-	22	27	35	41
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	2385	4202	5957	8907	13174
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	237,6	934,3	1779,5	3368,0	5498,8
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	714,3	1455,9	2132,4	3158,0	4387,7
II метод: P=0,36%; $\xi = 3{,}72$; $\eta = -6{,}78$					
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	2385	3594	4720	6671	9734
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	334,7	917,4	1537,7	2656,6	4211,9
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	828,4	1342,2	1775,1	2439,6	3325,2
Пределы упругости $k_0 = k_2 = 1{,}667$					
I метод: $\xi = 6{,}43$; $\eta = -12{,}85$					
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	1460	2573	3647	5453	8064
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	145,5	572,0	1089,3	2061,8	3366,1
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	437,3	891,2	1305,4	1933,2	2685,9
II метод: P=0,36%; $\xi = 3{,}72$; $\eta = -6{,}78$					
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	1460	2200	2889	4084	5959
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	204,9	561,6	941,3	1626,2	2578,3
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	507,1	821,7	1086,7	1493,4	2035,6

Песчаник Д-8

Пределы прочности						
I метод: $\xi = 6{,}43$; $\eta = -12{,}85$						
c	0	0,069	0,116	0,176	0,232	0,321
α_0 (град.)	18,4	21,8	24,6	29,7	36,1	-
$\alpha_{0\,эксп}$ (град.)	-	27	28	33	40	45
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$ (МПа)	1340	2379	3347	5005	7805	-
$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	133,5	533,0	999,8	1892,3	3265,5	-
$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	401,3	825,2	1198,1	1774,3	2569,8	-
II метод: P=7,4%; $\xi = 6{,}96$; $\eta = -12{,}7$						
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$ (МПа)	1340	2470	3568	5524	8907	-
$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	129,2	547,4	1062,8	2111,5	3829,4	-
$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	395,5	851,4	1275,1	1971,7	2992,0	-
Пределы упругости $k_0 = k_2 = 1{,}667$						
I метод: $\xi = 6{,}43$; $\eta = -12{,}85$						
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$ (МПа)	850	1509	2123	3175	4951	-
$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	84,7	338,1	634,2	1200,4	2071,4	-
$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	254,6	523,4	760,0	1125,5	1630,1	-
II метод: P=7,4%; $\xi = 6{,}96$; $\eta = -12{,}7$						
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$ (МПа)	850	1567	2264	3504	5650	-
$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	82,0	347,2	674,1	1339,4	2429,1	-
$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	250,9	540,1	808,8	1250,7	1897,9	-

Мрамор I

$\sigma_p = 199 \cdot 9{,}81$ МПа ($\sigma_{p\,эксп} = 45 \cdot 9{,}81$ МПа)

Пределы прочности					
I метод: $\xi = 2{,}49$; $\eta = -3{,}73$					
c	α_0 (град.)	$\alpha_{0\,эксп}$ (град.)	$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)
0	27	30	1160	232,56	464,4
0,069	29	31	1515	458,01	611,2
0,116	30	33	1805	653,79	715,2
$m = 1{,}846$; $h = -0{,}949$; $d = -1{,}082$; $n = 0{,}542$; $\xi_{II} = 5{,}14$, $\eta_{II} = -6{,}43$					
0,116	30	33	1805	744,7	753,3
0,178	31	36	2263	1100,0	900,3
0,232	31	40	2742	1486,0	1033,1
0,313	-	44,5	3709	2197,1	1251,6
0,405	-	-	8312	5682,9	2467,9
0,515	-	-	10198	7598,6	2469,7

II метод: P=0,92%; $\xi = 5{,}42$; $\eta = -8{,}14$			
c	$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)
0	1160	146,4	385,2
0,069	1816	445,0	662,1
0,116	2391	757,7	885,8
$m = 1{,}846$; $h = -0{,}949$; $d = -1{,}082$; $n = 0{,}542$; $\xi_{II} = 7{,}84$, $\eta_{II} = -9{,}8$			
0,116	2391,2	812,5	919,1
0,178	3332,0	1425,4	1259,7
0,232	4334,7	2155,8	1583,0
0,313	6286,2	3618,3	2098,6
0,405	14453,3	9881,4	4291,3
0,515	17731,4	13212,4	4294,3

Пределы упругости ($k_0 = k_3 = 2{,}333$)								
I метод: $\xi = 4{,}07$; $\eta = -5{,}09$								
c	0	0,069	0,116	0,178	0,232	0,313	0,405	0,515
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$ (МПа)	850	941	1019	1152	1313	1728	3336	4092
$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	131,9	251,4	341,2	476,8	621,3	1091,7	2454,1	3137,1
$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	307,7	358,5	388,7	428,3	467,9	592,0	986,2	991,7
II метод: P=0,92%; $\xi = 5{,}56$; $\eta = -8{,}33$								
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$ (МПа)	850	941	1019	1152	1313	1728	3178	3898
$\sigma \cdot 9{,}81$ (МПа)	107,2	232,0	326,2	469,3	621,8	950,0	2322,4	2976,4
$\tau \cdot 9{,}81$ (МПа)	282,3	344,2	379,6	424,7	468,2	564,2	941,0	945,0

Известняк

$$\sigma_p = 42 \cdot 9{,}81\,\text{МПа}$$

Пределы прочности						
I метод: $k_0 = 3{,}08$; $\xi = 7{,}21$; $\eta = -10{,}8$						
c	0	0,07	0,116	0,192	0,245	0,322
α_0 (град.)	18,0	20,9	23,1	28,0	32,5	42,7
$\sigma_1^s \cdot 9{,}81$(МПа)	792	938	1064	1368	1725	3099
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	75,6	205,3	310,0	541,9	786,5	1597,5
$\tau \cdot 9{,}81$(МПа)	232,8	319,9	375,2	480,4	584,3	948,9
Пределы упругости						
I метод: $k_0 = 3{,}08$; $\xi = 7{,}21$; $\eta = -10{,}8$; $S_0^{0e} = 838{,}7 \cdot 9{,}81\,\text{МПа}$						
$\sigma_1^e \cdot 9{,}81$(МПа)	545	646	732	942	1187	2132
$\sigma \cdot 9{,}81$(МПа)	52,0	141,3	213,3	372,9	541,2	1099,3