УДК 624.042.7

Э.В. БУБНОВИЧ, А.Т. БУПЕБАЕВА
E.V. BUBNOVICH, A.T. BUPEBAYEVA
E.mail. ksucta@elcat.kg

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ ВМНОГОЭТАЖНЫХЗДАНИЯХ

TO THE QUESTION OF DEFORMATIONS' WAVES PROPAGATION IN MULTISTORY BUILDINGS

Макалада бирченемдүү мезгилдик чатыраш менен моделденген көп кабаттуу имараттардагы калыбын жоготуу толкундары кандай тарагандыгы каралган[1]. Е.С.Сорокиндин гипотезасына таянып, ички серпилгич эмес каршылыкты эсепке алуу менен жана аны эсепке албай туруп ушул системалар үчүн чечим кабыл алынган.
Ачкыч сөздөр: *калыбын жоготуу толкундары, мезгилдүү чатыраштар,бир ченемдүү мезгилдүү система, энергия агымы, энергия жыштыгы, мүнөздүү импеданс.*

Рассматривается распространение волн деформаций в многоэтажных зданиях, моделируемых одномерными периодическими решетками [1]. Получены решения для систем без учета, а также с учетом внутреннего неупругого сопротивления по гипотезе Е.С.Сорокина.
Ключевые слова: *волны деформаций, периодические решетки, одномерная периодическая система, поток энергии, плотность энергии, характеристический импеданс.*

In this article discusses the propagation of deformations' waves in multistory buildings, which simulated with one-dimensional periodic gratings [1]. There are solutions with and without internal inelastic resistance by E.S. Sorokin's hypothesis.
Keywords: *deformations' waves, periodic gratings, one-dimensional periodic systems, flow of energy, energy density, characteristic impedance.*

1. Рассмотрим свободные поперечные колебания ограниченной одномерной периодической системы, состоящей из k одинаковых масс, соединенных между собой упругими связями без учета внутреннего неупругого сопротивления (рис.1). Жесткость связи, т.е. силу взаимодействия между двумя смежными массами при единичном взаимном поперечном их смещении в направлении оси *y*, принимается равной ρ_y(кН/м). Предполагаем, что взаимодействие имеет место только между соседними массами и что первая масса упруго связана с фиксированной точкой, а -ая масса свободна.

Пусть – поперечные перемещения различных масс от положения равновесия.

Учитывая, что сила, действующая на *n*-ую массу со стороны (*n*-1)-й при отклонении системы от положения равновесия равна

$$F_{n,n-1} = \rho_y(y_n - y_{n-1}),$$

запишем уравнения колебаний системы в виде

$$\left\{\begin{array}{c} m\ddot{y}_1 + \rho_y(2y_1 - y_2) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m\ddot{y}_n + \rho_y(-y_{n-1} + 2y_n - y_{n+1}) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m\ddot{y}_k + \rho_y(y_k - y_{k-1}) = 0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Решение ищется в виде бегущих волн:

$$y_n(t) = A_n e^{i(\omega t - \varphi)}, \qquad n = \overline{1,k}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) получим однородную систему k алгебраических уравнений, из условия существования нетривиального решения которой находится выражение для определения собственных частот системы

$$\nu_j = \sqrt{\rho_y / m\pi^2} cos\frac{\pi j}{2k+1}, \qquad \mathrm{j} = \overline{1,k}. \tag{3}$$

Каждой собственной частоте системы, показанной на рис.1, отвечает своя собственная форма колебаний, ординаты которой под любой *n*-ой массой определяются выражением

$$y_{n,j}(t) = A_{n,j} e^{i(\omega_j t - \varphi_j)}, \qquad \mathrm{j} = \overline{1,k} \tag{4}$$

или после определения входящих сюда амплитуд $A_{n,j}$, в общем случае имеем

$$y_n(t) - (-1)^{k+n} \sum_{j-1}^{k} A_j sin\frac{2\pi j n}{2k+1} cos\left[2t\sqrt{\frac{\rho_y}{m}} cos\frac{\pi j}{2k+1} - \varphi_j\right] \tag{5}$$

2k – произвольных постоянные типа; $A_j; \varphi_j$ – находятся из начальных условий движения каждой массы при *t=0.*

Заменим дискретную систему (1) непрерывной системой, аналогичной по своей геометрии и механическим свойствам. Такой системой в данном случае является жестко защемленный консольный стержень с конечной по величине сдвиговой жесткостью *GF* и бесконечно большой изгибной жесткостью *EJ.*

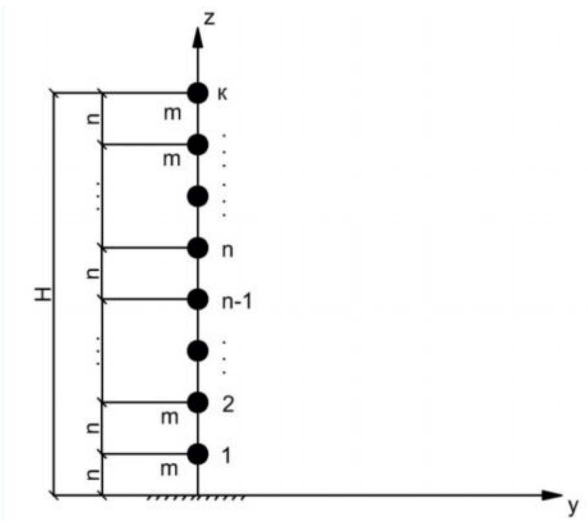

Рис.1. Одномерная периодическая система

Замечая, что $h = \frac{H}{K}$; $\rho_y = \frac{GF}{h} = \frac{GF_k}{K}$; $m = \frac{\rho H}{K}$ где H – длина стержня, ρ – масса на единицу длины непрерывной структуры, перепишем (3) в виде:

$$v_j - \sqrt{\frac{GF}{\rho}}\frac{j-1/2}{2H}\frac{\sin\dfrac{(j-1/2)\pi}{2k+1}}{\dfrac{\pi(j-1/2)}{2k+1}} - \frac{GF}{\rho}\frac{1}{2\pi H}\sin\frac{(j-1/2)\pi}{2k+1}$$

Устремляя $k \to \infty$, найдем:

$$v_j = \frac{j-1/2}{2H}\sqrt{\frac{GF}{\rho}} \tag{6}$$

Такое выражение можно получить также из решения уравнения в частных производных, описывающих движение консольного стержня при $EJ = \infty$ и $GF \neq \infty$. Таким же образом могут быть осуществлены предельные переходы от дискретных систем к непрерывным, а также для выражений перемещений отдельных масс, для собственных форм перемещений отдельных масс, для собственных форм колебаний и т.д.

В приведенном исследовании собственных колебаний одномерных периодических систем предполагалось, что взаимодействие имеет место только между соседними массами. В отношении строительных конструкций и зданий, расчетные схемы которых можно представить в виде одномерной периодической решетки, можно сказать, что это предположение оказывается справедливым по отношению к довольно широкому классу зданий и конструкций, деформации которых от действия статических и динамических поперечных нагрузок определяются в основном приведенной сдвиговой жесткостью конструкций в целом [4].

Это справедливо для многих строительных конструкций, когда речь идет об их продольных или крутильных колебаниях. Таким образом, принятая гипотеза о взаимодействии только между смежными массами предполагает сдвиговую форму перемещений, при которой деформированная ось системы при действии единичной силы представляет собой в общем случае ломаную прямую, точка перелома которой совпадает с точкой приложения силы. На участке между точкой приложения силы и свободным краем система перемещается параллельно своему первоначальному положению до деформации.

Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что горизонтальные перемещения большинства существующих видов зданий при действии сейсмических нагрузок имеет чисто сдвиговой характер [2].

Полученные результаты могут быть использованы для изучения собственных колебаний как для крупнопанельных, так и для каркасных зданий.

2. Рассмотрим распространение волн в системах с внутренним неупругим сопротивлением, учитываемым по гипотезе Сорокина Е.С. [3].

При изучении распространения волн в периодических системах необходимо рассматривать их отражение и преломление на краях и в зонах контакта решеток. Если рассматривается поведение падающей, проходящей и отраженной в месте контакта волн, используют два соотношения, одним из которых является условие отсутствия потерь энергии в точке контакта решеток

$$\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 \tag{7}$$

Ф – потоки энергии падающей, проходящей и отраженной волны.

Потоки энергии связаны с характеристическими импедансами решеток, а также с такими характеристиками, как средняя плотность энергии, скорость распространения энергии и т.д.

Уравнение колебаний для системы, показанной на рис.1, с внутренним трением записывается в следующем виде

$$M\ddot{y}_n = (u+iv)\rho(y_{n+1}+y_{n-1}-2y_n), \qquad (8)$$

где $u; v$ – характеристики внутреннего трения, принятыми по Сорокину;

ρ – жесткость связей между массами и взаимное смещение.

Решение (8) ищется в виде

$$y_n(t) = Aexp[i(\omega t-\mu^* n];$$
$$\mu^* = 2\pi ha = 2\pi h(\alpha+i\beta). \qquad (9)$$

Здесь *a* – комплексное волновое число, $a=\alpha+i\beta$.

После подстановки (9) в (8) получим систему двух уравнений:

$$\sin\mu sh\lambda = -\gamma_1\gamma_2/2\ (1+\gamma_2^2);$$
$$\cos\mu ch\lambda = 1-\gamma_1/2(1+\gamma_2^2), \qquad (10)$$

где $\gamma_1 = M\omega^2\rho u$; $\gamma_2 = \frac{v}{u}$; $\mu = 2\pi h\alpha$; $\lambda = 2\pi h\beta$.

Из (10) можно найти величины α, β , т.е. комплексное число *a*..

Средняя плотность энергии равна

$$\text{E} = \Pi + \text{K}, \qquad (11)$$

где $\overline{\Pi}$ – средняя плотность потенциальной энергии, равная средней плотности потенциальной энергии одной ячейки, деленной на ее длину

$$\overline{\Pi} = Re[(u+iv)0.5\rho(y_n-y_{n-1})^2]/h = 0.25h^{-1}A^2\rho u\, exp2\lambda n[1-2cos\mu\exp(-\lambda)+\exp(-2\lambda)]. \qquad (12)$$

Средняя плотность кинетической энергии равна

$$\overline{\text{K}} = Re0.5\text{M}\overline{\dot{y}_n}^2/h = 0.5h^{-1}\text{M}Re = 0.5h^{-1}A^2\rho(u-ucos\mu ch\lambda - vsin\mu sh\lambda)exp2\lambda \qquad (13)$$

Отсюда видно, что средняя плотность энергии в системе с внутренним трением изменяется от одной ячейки к другой, о чем говорит наличие множителя $exp2\lambda$.

Поток энергии, выходящий из ячейки, равен средней мощности, поглощенной при переходе от данной ячейки к следующей.

Пусть $F_{n.n+1}$ – сила, действующая на *n*-ую массу со стороны *(n-1)*-ой массы. Тогда поток энергии равен произведению действительной части на действительную часть скорости массы, находящейся в точке *n*.

Поскольку

$$F_{n.n+1} = (u+iv)\rho(y_{n+1}-y_n), \qquad (14)$$

то средняя за период мощность, поглощенная *(n+1)*-ой ячейкой, равна

$$\Phi - -ReF_{n,n+1}Re\dot{y}_n - 0.5Re\left(F_{n,n+1}\dot{y}_n\right) - 0.5\rho A^2\omega[exp\lambda\sin(\mu-\varphi)+v]exp2\lambda \quad (15)$$

,

где $\varphi - arctg(v/u)$.

Определим скорость распространения энергии

$$U_g = \Phi/\bar{E}. \quad (16)$$

Характеристический импеданс для здания, моделируемого ограниченной периодической системой будет равен отношению силы, действующей на массу в данной точке n к скорости этой массы. Таким образом, характеристический импеданс в точке системы, где находится масса n равен

$$Z_n = -F_{n,n+1}/\dot{y}_n \quad (17)$$

Подставляя (14) в (17) получим

$Z_n - Z_{nz} + iZ_{nt}$,

где

$$Z_{nz} = \rho[exp\lambda\sin(\mu - \varphi) + v]/\omega;$$
$$Z_{nt} - \rho[u - exp\lambda\sin(\mu+\varphi)]/\omega. \quad (18)$$

Таким образом

$$F_{n,n+1} = -\dot{y}_n Z_n = -Z_{nz}\dot{y}_n - \rho[u - exp\lambda\sin(\mu+\varphi)]\dot{y}_n \quad (19)$$

Величина Z_{nz} имеет физическую интерпретацию. Сила, действующая на массу состоит из силы трения с коэффициентом Z_{nz} и упругой силы с коэффициентом упругости.

Из (15) и (19) получим соотношение, связывающее поток энергии с действительной частью характеристического импеданса

$$\Phi = 0.5Re(Z_n\dot{y}_n\overline{\dot{y}_n}) = 0{,}5Z_{nz}|\dot{y}_n|^2 \quad (20)$$

Полученные результаты позволяют рассматривать вопросы отражения и преломления волн в ступенчатых периодических системах с внутренним неупругим сопротивлением.

Список литературы

1.Бриллюэн Л.М.Распространение волн в периодических структурах [Текст] / Л.М. Бриллюэн,М.М.Пароди. ИЛ, 1959.

2. Медведева Е.С. Деформации, возникающие в жилых зданиях при прохождении сейсмических волн[Текст] / Е.С.Медведева // Строительство и архитектура Узбекистана. - Ташкент: 1966, №9.

3. Сорокин Е.С. Теория внутреннего трения при колебаниях упругих систем[Текст] / Е.С.Сорокин. – М.: Госстройиздат, 1960.

4. Крауклис П.В.О распространении волн в тонких слоях, расположенных в упругой среде[Текст] П.В. Крауклис,А.А.Молотков // В сб. V Всесоюзного симпозиума по распространению упругих и упруго-пластических волн. – Алматы: 1971.