УДК 517.918

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЧАСТИЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА E_3, ПОРОЖДАЕМОГО ЗАДАННОЙ СЕТЬЮ ФРЕНЕ

БЕРИЛГЕН ФРЕНЕНИН ТОРЧОСУ ТАРАБЫНАН ЖАРАТЫЛГАН ЕВКЛИДДИК МЕЙКИНДИКТИ БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУ ЖӨНҮНДӨ

ABOUT A PARTIAL MAPPING OF EUCLIDEAN SPACE E_3, GENERATED BY GIVEN NET FRENET

Батырова А.Ш. – ОшГУ,
ssh.salieva.adm@mail.ru

Аннотация: *В области Ω евклидова трехмерного пространства E_3 задана сеть Френе Σ_3 [1]. На касательной X, e_3 к линии ω^3 инвариантным образом определен псевдофокус F_3^2. Когда точка X смещается в области Ω, точка F_3^2 описывает свою область $\Omega_3^2 \subset E_3$. Определяется частичное отображение $g : \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $g(X) = F_3^2$.*

Найдены необходимое и достаточное условия ортогональности образа заданной сети Френе Σ_3 в частичном отображении g.

Аннотация: *Үч ченемдүү E_3 евклиддик мейкиндиктин Ω аймагында Френенин Σ_3 торчосу берилген [1]. Анын ω^3 сызыгынын X, e_3 жанымасында F_3^2 чекити инварианттык түрдө аныкталат. X чекити Ω аймагында кыймылга келгенде, F_3^2 чекити Ω_3^2 аймагын сызып чыгат. Натыйжада $g(X) = F_3^2$ боло тургандай $g : \Omega \to \Omega_3^2$ бөлүктөп чагылтуусуна ээ болобуз.*

g бөлүктөп чагылтуусунда берилген Σ_3 торчосунун элесинен ортогоналдык болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары табылган.

Annotation: *In domain $\Omega \subset E_3$ it is considered given Σ_3 of Frenet [1]. On the tanget X, e_3 of the line ω^3 of the net Σ_3 it is defined pseudo focus F_3^2 by invariant manner. When the point X shifted in the domain Ω, the point F_3^2 describes it's domain Ω_3^2 in E_3. So it is defined the partial mapping $g : \Omega \to \Omega_3^2$ such that $g(X) = F_3^2$.*

Necessary and sufficient conditions of orthogonality of the image of the given net Σ_3 Frenet in the partial mapping g are proved.

Ключевые слова: *распределение, евклидово пространство, минимальное распределение, вектор средней кривизны.*

Ачкыч сөздөр: *бөлүштүрүү, евклиддик мейкиндик, бөлүктөп чагылтуу, орточо ийрилик.*

Key words: *distribution, Euclidean space, minimal distribution, vector of mean curvature.*

Пусть в области Ω евклидова трехмерного пространства E_3 задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия этого семейства. Область $\Omega \subset E_3$ отнесем к подвижному ортонормированному реперу

$\Re = (X, \vec{e}_i)$ (i,j,k=1,2,3), который является репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы этого репера имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \qquad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j.$$

Дифференциальные формы ω^i, ω_i^j удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad D\omega_i^k = \omega_i^l \wedge \omega_l^k, \ \omega_i^j + \omega_j^i = 0 \quad (i \neq k)$$

Интегральные кривые ω^i векторных полей $\vec{e}_i$ определяют в области Ω ортогональную сеть Френе Σ_3, называемую сетью Френе. Все формы ω_i^j главные [1], так как репер $\Re$ построен на касательных к линиям сети Френе Σ_3:

$$\omega_i^j = \Lambda_{ik}^j \omega^j \tag{1}$$

где

$$\Lambda_{ik}^j = -\Lambda_{jk}^i. \tag{2}$$

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (1) и применяя лемму Картана, получим

$$d\Lambda_{ik}^j - \Lambda_{il}^j \omega_k^l - \Lambda_{lk}^j \omega_i^l = \Lambda_{ikm}^j \omega^m \qquad (\Lambda_{ikm}^j = \Lambda_{imk}^j) \quad \text{или}$$

$$d\Lambda_{ik}^j = (\Lambda_{ikm}^j + \Lambda_{il}^j \Lambda_{km}^l + \Lambda_{lk}^j \Lambda_{im}^l)\omega^m. \tag{3}$$

Система величин $\left\{\Lambda_{ik}^j, \Lambda_{ikm}^j\right\}$ определяет геометрический объект второго порядка.

Формулы Френе [2] для линии ω^1 имеют вид:

$$d_1\vec{X} = \vec{e}_1, \ (ds = \omega^1), \qquad d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2, \tag{4}$$

$$d_1\vec{e}_2 = -\Lambda_{11}^2 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3, \qquad d_1\vec{e}_3 = -\Lambda_{21}^3 \vec{e}_2,$$

где $k_1 = \Lambda_{11}^2$ - кривизна, $\chi_1 = \Lambda_{21}^3$ - кручение этой линии ω^1.

Рассмотрим псевдофокус $F_3^2 \in (X, \vec{e}_3)$, определяемый радиус-вектором

$$\vec{F}_3^2 = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3. \tag{5}$$

Дифференцируем это равенство и, учитывая деривационные формулы имеем:

$$d\vec{F}_3^2 = \omega^i \vec{e}_i + \frac{d\Lambda_{32}^2}{\left(\Lambda_{32}^2\right)^2}\vec{e}_3 - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\omega_3^k \vec{e}_k.$$

Из (3) получим

$$d\Lambda_{32}^2 = \left(\Lambda_{32m}^2 + \Lambda_{3l}^2 \Lambda_{2m}^l + \Lambda_{l2}^2 \Lambda_{3m}^l\right)\omega^m.$$

Введем обозначение $C^2_{32m} = \Lambda^2_{32m} + \Lambda^2_{3l}\Lambda^l_{2m} + \Lambda^2_{l2}\Lambda^l_{3m}$. Тогда имеем $d\Lambda^2_{32} = C^2_{32m}\omega^m$. Учитывая это вектор $d\overrightarrow{F^2_3}$ напишем в виде

$$d\overrightarrow{F^2_3} = \omega^i \vec{c}_i + \frac{C^2_{32m}\omega^m}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\overrightarrow{e_3} - \frac{1}{\Lambda^2_{32}}\Lambda^k_{3m}\omega^m\overrightarrow{e_k}.$$

Учитывая, что $\Lambda^1_{31} = 0$ и $\omega^i_i = 0$, отсюда получим

$$d\overrightarrow{F^2_3} = \omega^1\left[\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^2_{31}}{\Lambda^2_{32}}\overrightarrow{e_2} - \frac{C^2_{321}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\overrightarrow{e_3}\right] + \omega^2\left[-\frac{\Lambda^1_{32}}{\Lambda^2_{32}}\overrightarrow{e_1} + \frac{C^2_{322}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\overrightarrow{e_3}\right] +$$

$$+\omega^3\left[-\frac{\Lambda^1_{33}}{\Lambda^2_{32}}\overrightarrow{e_1} - \frac{\Lambda^2_{33}}{\Lambda^2_{32}}\overrightarrow{e_2} + \frac{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2 + C^2_{323}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\overrightarrow{e_3}\right].$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned}
\vec{c}_1 &= \vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{31}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_2 + \frac{C^2_{321}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\vec{e}_3,\\
\vec{c}_2 &= -\frac{\Lambda^1_{32}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_1 + \frac{C^2_{322}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\vec{e}_3,\\
\vec{c}_3 &= -\frac{\Lambda^1_{33}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{33}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_2 + \frac{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2 + C^2_{323}}{\left(\Lambda^2_{32}\right)^2}\vec{e}_3
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Эти формулы были найдены в работе [3].

Тогда последнее равенство имеет вид $d\overrightarrow{F^2_3} = \omega^i\vec{c}_i$.

Когда точка X смещается в области Ω, точка F^2_3 описывает свою область Ω^2_3. Таким образом, определено отображение $f^2_3 : \Omega \to \Omega^2_3$ такое, что $f(X) = F^2_3$. Область Ω^2_3 отнесем к подвижному реперу $\breve{\Re} = \left(F^2_3, \vec{c}_i\right)$.

Интегральные линии векторных полей $\vec{c}_i$ образуют сеть $\breve{\Sigma}_F = f\left(\Sigma_F\right)$. Найдем необходимое и достаточное условия ортогональности этой сети $\breve{\Sigma}_F$. Пусть сеть $\breve{\Sigma}_F$ ортогональна, тогда векторы $\vec{c}_i$ попарно ортогональны. Из условия ортогональности векторов $\vec{c}_i$ имеем:

$$\Lambda^1_{32}\left\{\left[\left(\Lambda^2_{32}\right)^2 + C^2_{323}\right]\Lambda^2_{32} + C^2_{321}\Lambda^1_{33}\right\} = 0.$$

Возможны два случая:

1) $\Lambda^1_{32} = 0$;

2) $\left[\left(\Lambda^2_{32}\right)^2 + C^2_{323}\right]\Lambda^2_{32} + C^2_{321}\Lambda^1_{33} = 0$.

Доказана

Теорема. Сеть $g\ \Sigma_3$ ортогональна тогда и только тогда, когда выполнены условия хотя бы одного из случаев:

а) $\Lambda^2_{32}=0$; (7)

$C^2_{321} = 0$; (8)

$\left(\Lambda^2_{32}\right)^2 + C^2_{323} = 0$ (9)

$\Lambda^2_{31}\Lambda^2_{33} - \Lambda^3_{13}\Lambda^3_{22} = 0$ (10)

а) $\Lambda^1_{33}=0$; (11)

$\Lambda^1_{32} = 0$; (12)

$\left(\Lambda^2_{32}\right)^2 + C^3_{323} = 0$ (13)

$\Lambda^2_{31} = 0$ (14)

$C^2_{321} = 0$ (15)

Список использованной литературы:

1. Базылев В.Т. О фундаментальных объектах плоских многомерных сетей //Изв. вузов. Математика. 1967. Т.9. – С. 3-11.
2. Смогоржевский А.С., Столова Е.С. Справочник по теории кривых третьего порядка. //Москва: Физматгиз, 1961. – 263 с.
3. Матиева Г. Частичные отображения, сети и распределения в евклидовом пространстве// докторская диссертация, Ош– 2004 , 226 стр.