УДК 517.932

# ПОКРЫТИЕ ОБЛАСТЕЙ В $R^2$
# $R^2$де ОБЛАСТТАРДЫ КАПТОО
# COVERING AREAS IN $R^2$

Алыбаев К.С. – ЖАМУ
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Нарымбетов Т.К. – ИИМСИ
talant83@mail.ru

***Аннотация:*** *В данной работе вводится понятия покрытия областей в $R^2$. Покрытия осуществляется множеством кривых. Уточнены понятия кривой по Жордану, Кантору и Урысону. Далее рассматриваются сопряженно гармонические функции, определенные в некоторой области плоскости $R^2$. Показано, что рассматриваемый область полностью покрывается ортогональными линиями уровня сопряженно гармонических функций. Рассмотрены покрытие областей несколькими парами сопряженно гармонических функций.*

***Аннотация:*** *Бул жумушта $R^2$ тегиздигиндеги областтарды каптоо түшүнүгү киргизилет. Каптоо ийрилердин көптүгү аркылуу жүргүзүлөт. Жордан, Кантор жана Урысон боюнча ийрилер түшүнүктөрү такталды. $R^2$ тегиздигинин кандайдыр бир областында аныкталган түйүндөш гармоникалык функциялар каралган. Каралып жаткан област түйүндөш гармоникалык функциялардын ортогоналдык деңгээл сызыктары аркылуу толугу менен каптала тургандыгы көрсөтүлдү. Түйүндөш гармоникалык функциялардын бир нече жуптары аркылуу областардын каптальшы каралган.*

***Annotation:*** *In this paper, the concepts of covering regions in $R^2$ are introduced. Coverage is carried out by many curves. The concepts of a curve according to Jordan, Cantor and Uryson are refined. Next, we consider conjugate harmonic functions defined in a certain region of the plane $R^2$. It is shown that the region under consideration is completely covered by orthogonal level lines conjugate of harmonic functions. The coverage of regions by several pairs of conjugate harmonic functions is considered.*

***Ключевые слова:*** *покрытие области, множества, кривая, аналитические и гармонические функции, линии уровня.*

***Ачкыч сөздөр:*** *областы каптоо, көптүк, ийри, аналитикалык жана гармоникалык функциялар, деңгээл сызыктар.*

***Key words:*** *coverage of the area, sets, curve, analytical and harmonic functions, level lines.*

Пусть $D$ область плоскости $R^2$ и $\{(p)\}$ – множество плоских кривых.

*Определение 1.* Если множество $\{(p)\}$ заполняет собой все точки $D$, то будем говорить произведено покрытие области $D$ множеством $\{(p)\}$.

Покрытие области в терминах «размеченное множество» рассмотрены в $[1-2]$.

Сформулированное определение настолько широко, что невозможно описать топологию области $D$ в терминах кривых из множества $\{(p)\}$.

Для внесения ясности мы должны определить понятие кривой. Понятие кривой на плоскости является одним из понятий, интуитивно кажущихся простыми, но фактически очень сложно определяемых.

Наиболее современными определениями, близко связанными с теорией множеств является определение кривых по Жордану, Кантору, Урысону. Далее мы используем кривые соответствующие определению Жордана.

*Определение 2.* Множество точек плоскости, координаты которых определяется двумя уравнениями: $x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$, где $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ – непрерывные функции переменного $\alpha$, определенного на отрезке $[\alpha_1,\ \alpha_2]$; называется плоской кривой на плоскости.

Определение плоской кривой по Жордану также широка, что кривую невозможно представить как «тонкий штрих, вьющийся на плоскости». Примером доказательство широты Жордановского определения кривой, является кривая построенная Пеано, удовлетворяющей определению Жордана и заполняющей собой все точки квадрата. Кривая Пеано не является кривой по определению Кантора и Урысона.

Сузим класс кривых Жордана следующим определением.

Определение 3. Пусть дана кривая Жордана: $x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(2), \alpha\epsilon[\alpha_1,\ \alpha_2]$. если для любых двух значений $\alpha = \alpha', \alpha = \alpha''$ и $\alpha' \neq \alpha''$ соответсвующие им точки плоскости $\left(\varphi(\alpha'),\ \psi(\alpha')\right), \left(\varphi(\alpha''),\ \psi(\alpha'')\right)$ различны, то кривая называется кривой Жордана без кратных точек или простой дугой.

Из определения вытекает, что простая дуга сама себя не пересекает т.е. не имеет кратных точек. Класс простых дуг не широк, но достаточно широким является класс кривых, составленных из простых дуг, не имеющих попарно никаких общих точек кроме своих концов.

К классу кривых, составленных из простых дуг, принадлежат все алгебраические кривые определяемые уравнением вида $f(x, y) = 0$, где $f(x, y) -$ целая рациональная функция относительно $x$ и$y$.

Примерами простых дуг являются кривые определяемые гармоническими функциями. Пусть $u(x, y)$ гармоническая функция заданная в односвязной области $D \subset R^2$.

Для всякой гармонической функции $u(x, y)$ в односвязной области, можно найти сопряженную с ней гармоническую функцию $v(x, y)$[3].

Итак, любую гармоническую в односвязной области $D$ функцию можно рассматривать как действительную или мнимую часть некоторой аналитической функции определенной в области $D$. При этом эта функция определяется с точностью до постоянного слагаемого, соответственно мнимого или действительного частей.

*Определение 3.* Множество $(p) = \left\{(x, y)\epsilon D \,\middle|\, u(x, y) = p - const\right\}$ назовем линией уровня функции $u(x, y)$ в области $D$.

Линии уровня могут иметь простых или кратных точек. Случаи точек возврата, концевых, изолированных исключается (рис. 1).

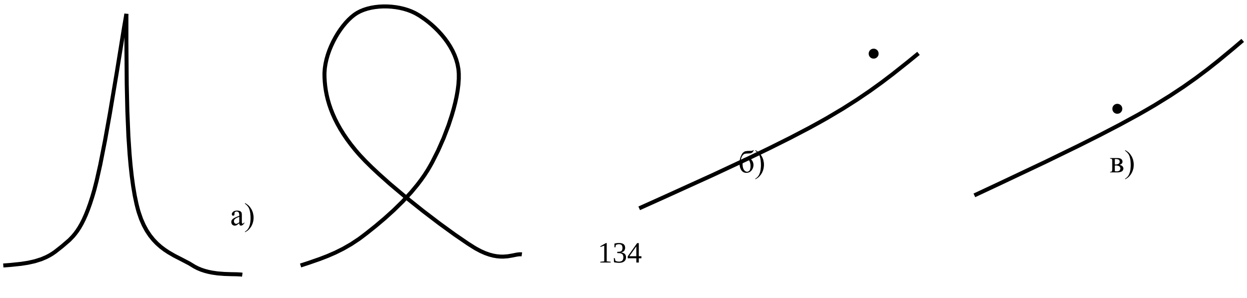

Рис. 1. Точки: возврата, концевые, изолированные

Далее будем рассматривать аналитические функции комплексного переменного в односвязной области $D \subset \mathrm{C}$.

Пусть задана $\alpha(t) \epsilon Q(D) -$ пространство аналитических функций в области $D$. $Re\alpha(t)$ и $Im\alpha(t)$ являются сопряженными гармоническими функциями.

**Примеры покрытия областей в $R^2$.**

Сначала рассмотрим покрытия областей с помощью класса кривых составленных из простых дуг.

1. Запишем уравнение эллипса в параметрической форме

$$x(\alpha) = a\ sin2\pi\alpha, y(\alpha) = b\ cos2\pi\alpha,\ \alpha\epsilon[0,1]. \qquad (1)$$

Кривая определяемая непрерывными функциями (1) не является простой дугой, но эта кривая состоит из двух простых дуг.

При различных значениях $a$ и $b$ кривые определяемые функцией (1) полностью покрывают плоскость $R^2$.

2. $x^2 - y^2 = a$, где $a$ произвольная постоянная. Если $a = 0$, то имеем $x^2 - y^2 = 0$. Кривая определяемая уравнением состоит из двух прямых проходящих через точку $(0,0)$.

При $a \neq 0$ имеем гиперболы. Кривые определяемые уравнением $x^2 - y^2 = a$ полностью покрывают плоскость $R^2$.

3. Покрытие области дугами из алгебраических кривых

$$f(x,y) = \begin{cases} y - x^2 - a = 0, & 0 \le x \le 1, \\ y - (a+1)(2-x) = 0, & 1 \le x \le 2, \\ y - \dfrac{1+a}{19}x^3 + \dfrac{8}{19}(1+a) = 0, & 2 \le x \le 3, \end{cases}$$

где $a -$ произвольное вещественное число. При $a > 0$ кривая определяемая уравнением $f(x,y) = 0$ изображена на рис. 2.

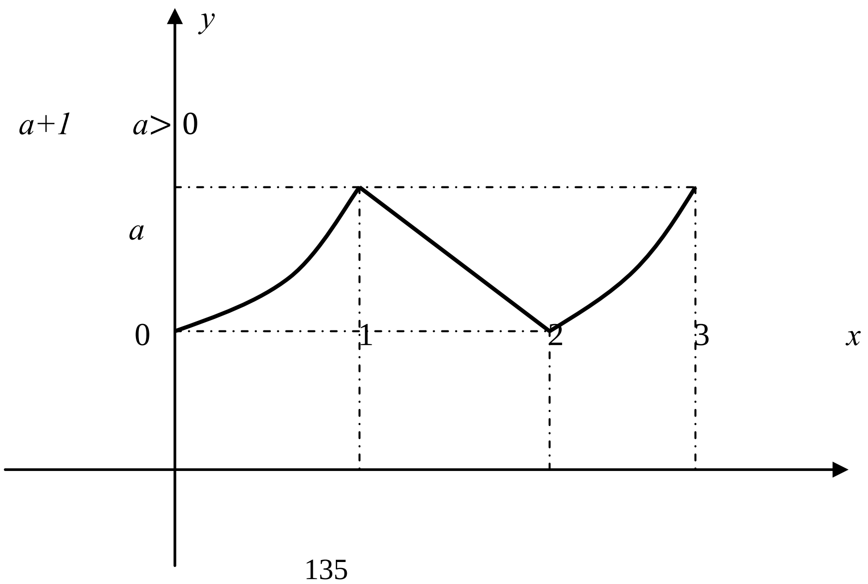

Рис. 2. Кривая составленная из простых дуг

Кривая определяемая уравнением $f(x,y)=0$ при различных значениях $a$ полностью покрывает полосу

$$D_0=\{(x,y)\,\big|\,0\le x\le 1,-\infty<y<+\infty\}.$$

Покрытие областей линиями уровней гармонических функций.

1. Пусть задана $a(t)\in Q(D)$ и выполняется
   $U1.\quad \forall t\in D(a'(t)\neq 0)$

Из условия $U1$ вытекает, что функция $a(t)$ в области $D$ не имеет кратных точек. Следовательно через любую точку области $D$ проходит единственная линия уровня функций $Re\,a(t)$ и $Im\,a(t)$. Линии уровня этих функций ортогональны в точках их пересечения.

Таким образом область $D$ покрывается сетью взаимно ортогональных линий уровня функций $Re\,a(t)$ и $Im\,a(t)$ (рис. 3).

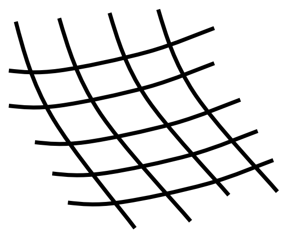

Рис. 3. Сеть ортогональных линии уровня

Теперь рассмотрим случай, когда нарушается условия $U1$. Пусть выполняется:

$U2.\ D-$ односвязная, ограниченная область, $t_0$ внутренняя точка области $D$ и функция $a(t)$ в точке $t_0$ имеет единственный нуль кратности $n$ т.е.

$a(t_0)=0,\ a'(t_0)=0,\dots,a^{(n-1)}(t_0)=0,a^{(n)}(t_0)\neq 0.$

При выполнении условия $U2$. линии уровня $Re\,a(t_0)=0$, $Im\,a(t_0)=0$ в точке $t_0$ разветвляются. Линии уровня примыкают к границе $D$. В рассматриваемом случае область $D$ полностью покрывается линиями уровней функций $Re\,a(t)$, $Im\,a(t)$, при этом ортогональность для линии уровней $Re\,a(t)=0$, $Im\,a(t)=0$ вообще говоря, не сохраняется.

Рассмотрим покрытие областей несколькими гармоническими функциями.

2. Пусть заданы функции $a_k(t)\epsilon Q(D)$ $(k=1,2,\dots,n)$ и выполняются условия:
   $U3.\quad \forall t\in D(a_k'(t)\neq 0)\ (k=1,2,\dots,n).$

Область $D$ полностью покрывается линиями уровней функций $Re\,a_k(t)$ и $Im\,a_k(t)$, согласно случая 1 при фиксированном $k$.

Если рассмотреть совокупность функций $Re\,a_k(t)$, $Im\,a_k(t)$ $(k=1,2,\dots,n)$, то область $D$ $n$ раз покрывается сетью взаимно – ортогональных линий уровня.

Покрытие областей будут использованы для асимптотического анализа решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и их систем в комплексных областях.

**Литература**

1. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. – Серия 3, Выпуск 6. – Бишкек, 2001. – С. 190-200.
2. К.С.Алыбаев, Мурзабаева А.Б. Построение областей притяжения при вырождении сингулярно возмущенных уравнений[Текст] /К.С.Алыбаев, А.Б. Мурзабаева // Международный научно-исследовательский журнал. № 9 (75). Екатеринбург, 2018. - С. 7-11.
3. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного [Текст] / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – Москва: Наука, 1973. – 739 с.