УДК 681.5

СИНТЕЗ УПРАВЛЯЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ САУ ПО ОГРАНИЧЕНИЯМ НА ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

ДЖОЛДОШЕВ Б.О.
Институт автоматики и информационных технологий НАН КР
izvestiya@ktu.aknet.kg

Рассматривается задача управления линейными многомерными объектами, когда качество синтезируемой системы автоматического управления (САУ) оценивается квадратическим критерием.

The management problem is considered by linear multidimensional objects when quality of synthesised system of automatic control is estimated by quadratic criterion.

1. Постановка проблемы. Пусть объект управления описывается линейным векторным уравнением в отклонениях

$$\dot{x}(t)=\left[A^*+\Delta A\right]x(t)+\left[B^*+\Delta B\right]u(t)+M\xi(t), \tag{1}$$

где $A=\{a_{ij}\}_{n\times n}$, $B=\{b_{i\nu}\}_{n\times m}$, $M=\{m_{i\nu}\}_{n\times r}$ – постоянные вещественные матрицы, x(t) – n-мерный вектор состояния объекта; $u(t)$ – m-мерный вектор управления; ξ (t) – r-мерный вектор внешних возмущений. ΔA, ΔB – матрицы, характеризующие неопределенности в задании объекта управления. Пусть интервалы неопределенностей для матриц $\Delta A=\{\Delta a_{ij}\}_{n\times n}$, $\Delta B=\{\Delta b_{i\nu}\}_{n\times m}$ известны:

$$\left|\Delta a_{ij}\right|=\left|a_{ij}-a_{ij}^*\right|\le\Delta a_{ij}^+,\quad \left|\Delta b_{i\nu}\right|=\left|b_{i\nu}-b_{i\nu}^*\right|\le\Delta b_{i\nu}^+, \tag{2}$$

$\left|\Delta A\right|\le\Delta A^+$, $\left|\Delta B\right|\le\Delta B^+$, $\Delta A^+=\{\Delta a_{ij}^+\}$, $\Delta B^+=\{\Delta b_{i\nu}^+\}$, Δa_{ij}^+, $\Delta b_{i\nu}^+$ - положительные числа, определяющие границы изменения параметрических возмущений Δa_{ij}, $\Delta b_{i\nu}$.

Предполагается, что объект (1) обладает свойствами полной управляемости и наблюдаемости, а вектор возмущения $\xi(t)$ доступен для измерения. Пусть известно желаемое движение объекта, определяемое вектором задающих воздействий:

$$g(t)=\left[g_1(t),g_2(t),\ldots,g_n(t)\right], \tag{3}$$

где $g_i(t)-$ требуемый закон изменения $x_i(t)$.

Точность отработки задания $g(t)$ определяется вектором ошибки управления:

$$e(t)=g(t)-x(t). \tag{4}$$

Для оценки степени близости желаемого $g(t)$ и фактического $x(t)$ движений системы управления будем использовать скалярную квадратическую функцию:

$$J_1(t)=e^T(t)Q(t)e(t), \tag{5}$$

где $Q=\{q_{ii}\}_{n\times n}$ - квадратная вещественная матрица, компоненты которой в общем случае зависят от времени. Относительно матрицы Q предполагается, что она не обязательно является положительно определенной. Считаем, что $\xi(t)$ неопределенные, но ограниченные по модулю возмущения. Предполагается, что компоненты $\xi(t)$ удовлетворяют условиям

$$\left|\xi_\nu(t)\right|\le\xi_\nu^+,\quad \nu=\overline{1,r}, \tag{6}$$

где ξ_ν^+ –– известные положительные числа.

Далее считается, что синтезируемая САУ обладает допустимым качеством, если выполнено условие:

$$J_1(t) = e^T(t)Q(t)e(t) \le \sigma_1(t), \quad t \in [t_0, t_k], \tag{7}$$

где $\sigma(t)$ – положительная непрерывно дифференцируемая функция времени, определяющая границу допустимой области $D_1(t)$ для квадратического показателя качества $J_1(t)$

$$D_1(t) = \left\{ J_1 \in R^1 : J_1(t) \le \sigma_1(t) \right\}.$$

Геометрическая иллюстрация смысла целевого условия (7) показана на рис. 1.

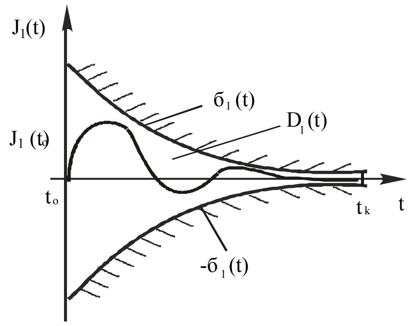

Рис. 1. Область допустимых ограничений.

Задача синтеза формулируется следующим образом: определить структуру и параметры регулятора для объекта управления (1), обеспечивающего выполнение целевого соотношения (7).

2. Структурный синтез. Рассмотрим задачу структурного синтеза регулятора для объекта управления, описываемого линейным векторным уравнением (1) по ограничениям (7) на квадратическую меру ошибки управления (5). Решение сформулированной задачи будем осуществлять на основе принципа гарантируемой динамики [1]. Для этой цели, в частности, можно использовать результаты, полученные там.

Теорема 1. Пусть $J_1(t_0) \in D_1(t_0)$. Тогда целевое соотношение (7) выполняется, если для всех $t \in [t_0, t_k]$ удовлетворяется условие

$$\int_{t_o}^{t} J_1(\tau)\, \dot{J}_1(\tau)\, d\tau \le \int_{t_o}^{t} б_1(\tau)\, \dot{б}_1(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, t_k], \tag{8}$$

Определим производную квадратической меры качества управления

$$\dot{J}(t) = \left(\frac{\partial J}{\partial e} \right)^T \dot{e}(t) = e^T(t)\, \hat{Q}\, \dot{e}(t), \tag{9}$$

где матрица $\hat{Q} = Q + Q^T$.

В дальнейшем для простоты предположим, что уравнение объекта (1) записано в терминах отклонений, т.е. $x(t) = e(t)$:

$$\dot{e}(t) = \left[A^* + \Delta A\right] e(t) + \left[B^* + \Delta B\right] u(t) + M\xi(t). \tag{10}$$

Тогда функциональное соотношение (8) с учетом (1), (7) и (9) имеет вид

$$\int_{t_o}^{t} \left[e^T(\tau) Q e(\tau)\right] e^T(\tau) \hat{Q} \left[\left(A^* + \Delta A\right) e(t) + \left(B^* + \Delta B\right) u(\tau) + M\xi(\tau)\right] d\tau \le \Gamma_1(t), \tag{11}$$

где

$$\Gamma_1(t) = \int_{t_o}^{t} б_1(\tau) \dot{б}_1(\tau) d\tau. \tag{12}$$

Теперь потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\widehat{Q}\left[\left(A^* + \Delta A\right) e(t) + \left(B^* + \Delta B\right) u(t) + M\,\xi(t)\right] = q_1\, Qe(t)\,, \tag{13}$$

где q_1 – вещественное число, определяемое далее. С учетом соотношения (13) условие (11) имеет вид

$$\int_{t_o}^{t} [e^T(\tau)Qe(\tau)][e^T(\tau)q_1Qe(\tau)]d\tau \;\le\; \Gamma_1(t)\,,$$

что эквивалентно следующему неравенству:

$$q_1 \int_{t_o}^{t} J_1^2(\tau)d\tau \le \Gamma_1(t)\,. \tag{14}$$

По условию теоремы 1 в начальный момент времени $t = t_0$ выполняется условие

$$\left|J_1(t_o)\right| \le б_1(t_o)\,.$$

Для того, чтобы при $t > t_0$ и попадании значения квадратического показателя $J_1(t)$ на верхнюю или нижнюю границы допустимой области $D_1(t)$, т.е. при $J_1(t) = \sigma_1(t)$ или $J_1(t) = -\sigma_1(t)$, гарантировать $J_1(t) \in D_1(t)$, должно выполняться условие

$$q_1 \int_{t_o}^{t} б_1^2(\tau)d\tau \le \Gamma_1(t)\,. \tag{15}$$

В частном случае, когда граничная функция $\sigma_1(t)$ задается уравнением

$$\dot{б}_1(t) = \alpha_1 б_1(t)\,, \tag{16}$$

соотношение (15) с учетом (16) имеет вид

$$q_1 \int_{t_o}^{t} б_1^2(\tau)d\tau \le \; \alpha_1 \int_{t_o}^{t} б_1^2(\tau)d\tau\,, \tag{17}$$

где вещественное число $\alpha_1 < 0$. Поскольку в интервале управления (t_0, t_k) функция

$$\int_{t_o}^{t} б_1^2(\tau)d\tau > 0\,,$$

из (17) получаем, что для того, чтобы обеспечивалось целевое соотношение (8), достаточно выполнения неравенства

$$q_1 - \alpha_1 \le 0.. \tag{18}$$

Соотношение (18) представляет собой уравнение синтеза регулятора, определяющее структуру и параметры искомого закона управления.

На основе полученных результатов можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\left|J_1(t_o)\right| \le б_1(t_o)$ Тогда для объекта управления с математической моделью вида (1) закон управления u(t), обеспечивающий гарантированное выполнение целевых соотношений (8), описывается соотношением

$$u(t) = G^{-1}\left[q_1 Q - \widehat{Q} \cdot \left(A^* + \Delta A^+\right)\right]e(t) - G^{-1}\widehat{Q}M \cdot \xi^+(t)\,, \tag{19}$$

где обратная матрица

$$G^{-1} = \left[\widehat{Q} \cdot \left(B^* + \Delta B^+\right)\right]^{-1}. \tag{20}$$

3. Параметрический синтез. Рассмотрим объект управления, описываемый векторным уравнением (1). Предположим, что объект является полностью управляемым и наблюдаемым, а вектор внешних возмущений отсутствует, т.е. $\xi(t) = 0$:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_o) = x^o, \qquad t \in [t_o, t_k], \tag{21}$$

где вектор отклонений $x(t) = e(t)$.

Пусть структура закона управления $u(t)$ задана и определяется линейной обратной связью:

$$u(t) = K \cdot x(t), \tag{22}$$

где матрица регулятора $K = \{k_{li}\}_{m \times n}$.

Уравнение замкнутой системы управления имеет вид

$$\dot{x}(t) = Px(t) + \Delta Px(t), \tag{23}$$

где вещественные матрицы

$$P = A^* + B^* K, \quad \Delta P = \Delta A + \Delta B \cdot K, \quad \Delta P^+ = \Delta A^+ + \Delta B^+ \cdot K,$$

а их элементы

$$p_{ij} = a_{ij}^* + \sum_{\nu=1}^{m} b_{i\nu}^* \cdot k_{\nu j} \quad, \quad \Delta p_{ij} = \Delta a_{ij} + \sum_{\nu=1}^{m} \Delta b_{i\nu} \cdot k_{\nu j}\,, \quad \Delta p_{ij}^+ = \Delta a_{ij}^+ + \sum_{\nu=1}^{m} \Delta b_{i\nu}^+ \cdot k_{\nu j}\,, \quad i = \overline{1,n}.$$

Задача синтеза состоит в определении матрицы K, обеспечивающей выполнение целевых соотношений (8):

$$J_1(t) = x^T(t)Qx(t) \le \sigma_1(t), \tag{24}$$

где все обозначения имеют прежний смысл.

Для решения сформулированной задачи структурного синтеза воспользуемся формализмом принципа гарантируемой динамики [1]. Согласно теореме 1, целевое соотношение (24) выполняется, если выполняется условие (8).

Условия, при выполнении которых удовлетворяется неравенство (8), дается следующей теоремой.

Теорема 3. Пусть $|J_1(t_o)| \le б_1(t_o)$. Тогда условие допустимого качества управления (8) обеспечивается, если для всех $t \in [t_0, t_k]$ выполняются соотношения

$$\dot{J}_1(t) = p_1 J_1(t), \tag{26}$$

$$p_1 \int_{t_o}^{t} б_1^2(\tau)d\tau \le \int_{t_o}^{t} б_1(\tau)\, \dot{б}_1(\tau)d\tau + \Delta, \tag{27}$$

где p_1 и $\Delta -$ вещественные числа; $\Delta = \dfrac{б_1^2(t_o) - J_1^2(t_o)}{2}$.

Теперь на основе соотношения (26) получим уравнение синтеза регулятора. Производная

$$\dot{J}_1(t) = x^T(t)\widehat{Q}\dot{x}(t), \tag{28}$$

где матрица $\widehat{Q} = Q + Q^T$.

С учетом динамики объекта (23), выражений для $J_1(t)$ и $\dot{J}_1(t)$, определяемых формулами (24) и (28), соотношение (26) можно записать в виде

$$x^T \widehat{Q}((A^* + \Delta A) + (B^* + \Delta B) \cdot K)\, x = x^T Q_1 x$$

или

$$x^T[\widehat{Q}((A^* + \Delta A) + (B^* + \Delta B) \cdot K) - Q_1]x = 0, \tag{29}$$

где матрица $Q_1 = p_1 Q$.

Из соотношения (29) получаем матричное уравнение для определения K.

$$\widehat{Q}(B^* + \Delta B)K = Q_1 - \widehat{Q}(A^* + \Delta A). \tag{30}$$

Предположим, что существует обратная матрица

$$G^{-1} = [\widehat{Q}(B^* + \Delta B^+)]^{-1},$$

тогда искомая матрица регулятора определяется по формуле

$$K = G^{-1}\left(Q_1 - \widehat{Q}(A^* + \Delta A^+)\right). \tag{31}$$

Определение параметра p_1, входящего в соотношение (27), можно осуществить на основе неравенства, подобного (31). Для этой цели, как и в 2, граничную функцию $\sigma_1(t)$ необходимо задавать уравнением вида

$$\dot{б}_1(t) = \alpha_1 б_1(t),$$

где α_1 – параметр, имеющий отрицательное значение $(\alpha_1 < 0)$. Тогда аналогично изложенному выше случаю получаем неравенство

$$p_1 - \alpha_1 \le 0. \tag{32}$$

Замечание. Эффективное решение задачи параметрического синтеза регулятора достигается, если каждое уравнение динамики объекта в форме Коши (1) включает хотя бы одно управляющее воздействие $u_1(t)$. В случае, когда это условие не выполняется, синтез регулятора целесообразно осуществлять из условия приближенного обеспечения условия (26):

$$|\beta_1(t)| = |\dot{J}(t) - p_1 J(t)| \le \beta_1^+(t), \tag{33}$$

где $\beta_1^+(t)$ – положительная непрерывно дифференцируемая функция, задающая точность воспроизведения соотношения (33). При этом производная квадратической меры качества управления $\dot{J}(t)$ описывается формулой

$$\dot{J}(t) = p_1 J(t) + \beta_1(t). \tag{34}$$

Определение параметра p_1 осуществляется на основе использования соотношения (8).

Путем аналогичных преобразований для определения p_1 получим следующее неравенство:

$$\int_{t_o}^{t} б_1(\tau)\cdot\beta_1^+(\tau)d\tau \le \int_{t_o}^{t} б_1(\tau)[\dot{б}_1(\tau) - p_1 б_1(\tau)]d\tau. \tag{36}$$

В случае, когда

$$\dot{б}_1(t) = \alpha_1 б_1(t),$$

для выполнения соотношения (36) достаточно, чтобы

$$\beta_1^+(t) \le (\alpha_1 - p_1) б_1(t). \tag{37}$$

Для определения уравнения синтеза закона управления $u(t)$, т.е. матрицы K, будем использовать известное соотношение вида

$$\int_{t_o}^{t} \beta_1(\tau)\dot{\beta}_1(\tau)d\tau \le \int_{t_o}^{t} \beta_1^+(\tau)\dot{\beta}_1^+(\tau)d\tau, \tag{38}$$

обеспечение которого гарантирует выполнение условия (33).

При этом функция

$$\begin{aligned}\beta_1(t) &= \dot{J}(t) - p_1 J(t) = x^T \widehat{Q}\dot{x} - p_1 x^T Q x = x^T \widehat{Q}\left[\left(A^* + \Delta A\right) + \left(B^* + \Delta B\right)\cdot K\right]x - \\ &- x^T Q_1 x = x^T[\widehat{Q}\left((A^* + B^* K) + (\Delta A + \Delta B\cdot K)\right) - Q_1]x = x^T F x,\end{aligned} \tag{39}$$

а производная

$$\dot{\beta}_1(t) = x^T \widehat{F}\dot{x} = x^T \widehat{F}(A + BK)x, \tag{40}$$

где

$$F = (Q + Q^T)\cdot((A^* + \Delta A) + (B^* + \Delta B)\cdot K) - p_1 Q,$$

$$\widehat{F} = F + F^T, \qquad F = \widehat{Q}(\left(A^* + \Delta A\right) + \left(B^* + \Delta B\right)K) - Q_1.$$

Потребуем выполнения соотношения

$$\dot{\beta}_1(t) = \gamma_1 \beta_1(t), \tag{41}$$

где γ_1.– скалярный параметр, определяемый как решение неравенства

$$\gamma_1 \int_{t_o}^{t} (\beta_1^+)^2(\tau)d\tau \le \int_{t_o}^{t} \beta_1^+(\tau)\dot{\beta}_1^+(\tau)d\tau. \tag{42}$$

В случае, когда

$$\dot{\beta}_1^+(t) = \mu_1 \beta_1^+(t)$$

неравенство (42) упрощается и имеет вид

$$\gamma_1 - \mu_1 \le 0, \tag{43}$$

где μ_1 – отрицательное число.

С учетом выражений для $\beta_1(t)$ и $\dot{\beta}_1(t)$, определяемых формулами (39) и (40), равенство (41) можно записать в виде

$$x^T \widehat{F}((A^* + \Delta A) + (B^* + \Delta B)K)x^T = x^T F_1 x, \tag{44}$$

где $\widehat{F} = \gamma_1 F$.

Предположим, что матрица F является симметричной. Тогда с учетом выражения для матрицы F имеем

$$\begin{gathered}[2\widehat{Q}((A^* + \Delta A^+) + (B^* + \Delta B^+) \cdot K - 2Q_1] \cdot (A^* + \Delta A^+) + (B^* + \Delta B^+)K) - \\ -\gamma\widehat{Q}((A^* + \Delta A^+) + (B^* + \Delta B^+)K) - \gamma Q_1 = 0.\end{gathered} \tag{45}$$

Соотношение (45) представляет собой *нелинейное матричное уравнение*, решение которого и определяет искомую матрицу регулятора K.

4. Синтез регулятора с учетом ограничений на управление. Выше рассматривался случай, когда синтез САУ осуществлялся только по ограничениям на значения квадратического критерия качества, т. е. из условия обеспечения соотношения (8) без учета возможных ограничений на управления $u(t)$. Традиционно в теории оптимального управления учет этих ограничений осуществляется путем введения в выражение для критерия качества дополнительной функции - квадратической формы от вектора $u(t)$. Далее рассмотрим следующий вариант формализации цели управления и учета ограничений на величины управляющих воздействий:

$$J(t) = x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) \le \sigma(t), \tag{46}$$

где Q, R – матрицы соответствующих размерностей; $\sigma(t)$ – положительная, непрерывно дифференцируемая функция, определяющая в каждый момент времени t максимально допустимые значения функций $J(t)$.

Рассмотрим задачу синтеза САУ многомерными объектами по критерию (46). Пусть требуется определить закон управления $u(t) = K \cdot x(t)$ для объекта (1), обеспечивающий целевое соотношение (46).

На основе теоремы 3 имеем, что для обеспечения целевого условия (8) достаточно выполнения равенства :

$$\dot{J}(t) = p_1 J(t), \tag{47}$$

где вещественный параметр p_1 должен удовлетворять неравенству (33). Производная критерия (46)

$$\dot{J} = \left(\frac{\partial J}{\partial e}\right)^T \dot{e}(t) + \left(\frac{\partial J}{\partial u}\right)^T \dot{u}(t),$$

где вектор-градиенты

$$\frac{\partial J}{\partial e} = (Q + Q^T)e = \widehat{Q}\, e, \quad \frac{\partial J}{\partial u} = (R + R^T)u = \widehat{R}\, u\ . \tag{48}$$

С учетом (48) имеем

$$\dot{J}(t) = e^T \widehat{Q}\, \dot{e} + u^T \widehat{R}\, \dot{u}\ . \tag{49}$$

Соотношение (47) при этом примет вид

$$e^T \widehat{Q} \dot{e} + u^T \widehat{R}\, \dot{u} = p_1 (e^T Q\, e + u^T R\, u)\ . \tag{50}$$

С учетом (21) и выражения для производной вектора управления, можно записать

$$\dot{u}(t) = -K\dot{x}(t) = -K[P + \Delta P] \cdot x(t),$$

где вещественные матрицы

$$P=A^*+B^*K,\quad \Delta P=\Delta A+\Delta B\cdot K,\quad \Delta P^+=\Delta A^+ +\Delta B^+\cdot K,$$

а их элементы

$$p_{ij}=a_{ij}^*+\sum_{\nu=1}^{m}b_{i\nu}^*\cdot k_{\nu j}\ ,\quad \Delta p_{ij}=\Delta a_{ij}+\sum_{\nu=1}^{m}\Delta b_{i\nu}\cdot k_{\nu j}\ ,\quad \Delta p_{ij}^+=\Delta a_{ij}^+ +\sum_{\nu=1}^{m}\Delta b_{i\nu}^+\cdot k_{\nu j}\ ,\quad i=\overline{1,n}.$$

Соотношение (50) можно записать в виде

$$x^T\widehat{Q}\left(\left(A^*+\Delta A\right)-\left(B^*+\Delta B\right)K\right)x+x^TK^T\widehat{R}K\left(\left(A^*+\Delta A\right)-\left(B^*+\Delta B\right)K\right)x==x^TQ_1x+x^TK^TR_1Kx,$$

где $Q_1=p_1Q,\quad R_1=p_1R.$

Последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$x^T\left[\widehat{Q}\left(P+\Delta P^+\right)+K^T\widehat{R}K\left(P+\Delta P^+\right)-Q_1-K^TR_1K\right]x=0. \qquad (51)$$

Отсюда получаем матричное уравнение для определения искомой K:

$$\left(\widehat{Q}+K^T\widehat{R}K\right)\left(P+\Delta P^+\right)-Q_1-K^TR_1K=0. \qquad (52)$$

Решение нелинейного матричного уравнения (52) можно осуществлять известными методами [4-6, 8, 11-14] или на основе процедур принципа гарантируемой динамики [1].

5. Пример. Рассмотрим задачу построения регулятора системы управления смесительным резервуаром, входящим в состав многих технологических процессов. Он имеет два входа, через которые поступают потоки жидкости с расходами $q_1(t)$ и $q_2(t)$. Последние могут регулироваться вентильными устройствами. Каждый поток содержит растворимое вещество с постоянной концентрацией. После перемешивания в резервуаре раствор жидкости отводится по единственному отверстию. Выходной поток характеризуется расходом $q(t)$ и концентрацией $C(t)$ [10].

Задача управления состоит в поддержании номинальных значений расхода q^* и концентрации C^* выходного потока жидкости путем изменения входных расходов $q_1(t)$ и $q_2(t)$.

Введем векторы состояния $x(t)=[x_1(t),\ x_2(t)]^T$ и управления $u(t)=[u_1(t),u_2(t)]^T$, компоненты которых представляют собой отклонения рассмотренных выше переменных от их номинальных значений:

$$x_1(t)=q^*-q(t),\quad x_2(t)=C^*-C(t),\quad u_1(t)=q_1^*-q_1(t),\quad u_2(t)=q_2^*-q_2(t).$$

Динамика объекта управления в терминах переменных состояния описывается векторным уравнением вида

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), \qquad (53)$$

$$x_0=[0.1\quad 0.2]^T,$$

где матрицы

$$A^*=\begin{bmatrix}0.009 & 0\\ 0 & 0.018\end{bmatrix},\quad \Delta A=\begin{bmatrix}0.001 & 0\\ 0 & 0.002\end{bmatrix},\quad B^*=\begin{bmatrix}0.009 & 0.009\\ 0.225 & 0.675\end{bmatrix},\quad \Delta B=\begin{bmatrix}0.001 & 0.001\\ 0.025 & 0.075\end{bmatrix},$$

Структуру закона управления зададим в виде линейной обратной связи

$$u(t)=Kx(t)=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}x(t). \qquad (54)$$

Задача синтеза регулятора состоит в определении элементов матрицы K, обеспечивающих выполнение квадратического целевого соотношения

$$J(t)=x^T(t)Qx(t)\le б_1(t), \qquad (55)$$

где матрица

$$Q=\begin{bmatrix}q_{11} & 0\\ 0 & q_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

а функция

$$б_1(t)=б_1^0e^{\alpha_1 t},\qquad \alpha_1<0,\qquad б_1^0>0.$$

где $\sigma_1^0 = 1, \quad \sigma_2^0 = 1, \quad \alpha_1 = -2.$

Определим следующие матрицы

$$\left[\hat{Q}(B^* + \Delta B)\right]^{-1} = G^{-1} = \begin{bmatrix} 37.5000 & -0.5000 \\ 12.5000 & 0.5000 \end{bmatrix}, \qquad \hat{Q}(A^* + \Delta A) = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix},$$

пусть $p_1 = -500;$ тогда искомая матрица регулятора определяется по формуле (31)

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} 1.8749 & 0.025 \\ 0.625 & 0.025 \end{bmatrix}$$

Проведено компьютерное моделирования САУ при заданных начальных условиях: и построены графики управляемых процессов $x_i(t), \quad i = 1,2$ (рис. 2.) с учётом обеспечения заданных инженерных требований (требуемого качества и точности.

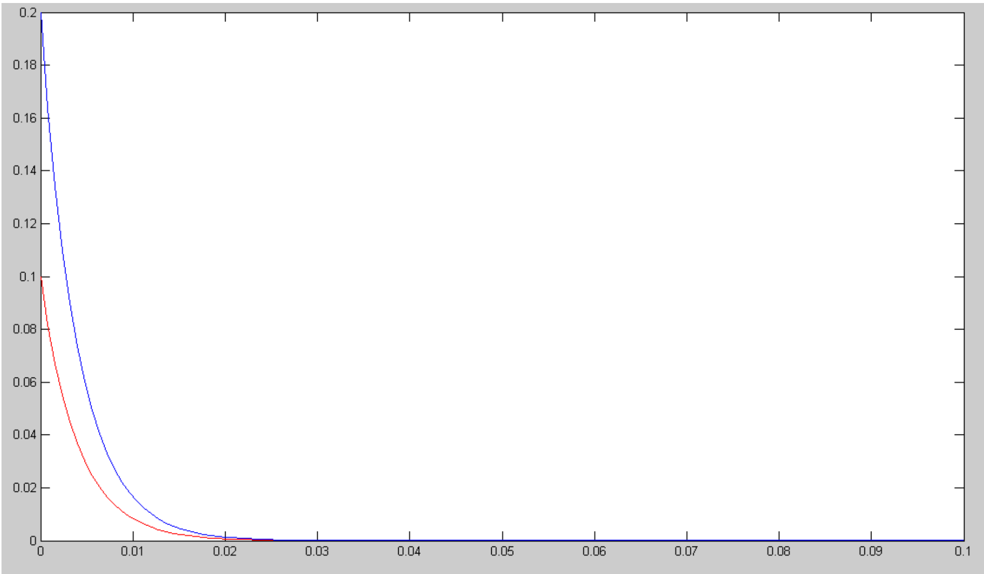

Рис. 2. Управляемые процессы $x_i(t), \quad i = 1,2.$

Выводы. В данной статье рассматривается задача управления линейными многомерными объектами, когда качество синтезируемой системы автоматического управления (САУ) оценивается квадратическим критерием. Сама постановка задачи синтеза существенным образом отличается от традиционной, принятой в теории оптимального управления, поскольку вместо интегрального показателя качества вводится критерий, ограничивающий значения квадратической меры ошибки регулирования во всем интервале управления. Это дает возможность синтезировать высококачественные САУ.

Для целей синтеза получены аналитические условия, выполнение которых гарантирует достижение заданных целевых соотношений. На их основе выведены уравнения синтеза искомых законов управления. Рассмотрены особенности учета ограничений на величины управляющих воздействий.

Процедуры синтеза регуляторов САУ основаны на методах принципа гарантируемой динамики. Эффективность разработанных методов иллюстрируется путем расчета законов управления конкретными техническими системами и их компьютерного моделирования.

Литература

1. Оморов Т.Т. Принцип гарантируемой динамики в теории систем управления. – Бишкек: Илим, 2001. – 130 с.
2. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимообратных матриц // Автоматика и телемеханика, 2005. – № 1. – С. 82–99.
3. Беллман Р. Введение в теорию матриц.– М.: Наука, 1976.– 352 с.

4. Бобцов А.А. Алгоритм робастного управления в задаче слежения за командным сигналом с компенсацией паразитного эффекта внешнего неограниченного возмущения // А и Т. 2005. – № 8. –С. 8-117.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. –М.: Наука, 1988.
6. Голуб Дж., Ван Лоун. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
7. Зелых Я.И., Лычак М.М. Компьютерная технология интервально-множественного анализа в MATLAB // Кибернетика и системный анализ, 2003. – №1. – С. 122–138.
8. Кунцевич В.М., Кунцевич А.В. Синтез робастно-адаптивных систем управления линейными нестандартными объектами при ограниченных возмущениях // Проблемы управления и информатики. 2006. – №1-2. – С.87-107.
9. Ларин В.Б. О синтезе стабилизирующих регуляторов с использованием линейных матричных неравенств // Проблемы управления и информатики, 2000. – №5. –С.18–23.
10. Отчёт о научно-исследовательской работе по проекту «Методы и технологии автоматического управления и информационной системы энергоучета». Направление 1 (Промежуточный) // Институт автоматики НАН КР, Бишкек. 2008. -110 с.
11. Поляк Б.Т., Назин С.А. Оценивание параметров в линейных многомерных системах с интервальной неопределённостью // Проблемы управления и информатики. 2006. – №1-2.
12. Поляк Б.Ф., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. –М.: Наука, 2002. –303 с.
13. Zakian V. New formulation for the Method of Inequalities. – Proc. IEE, 1979. v.126, № 6, pp. 579–584.
14. Zames G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses // IEEE Trans. Autom. Control. 1981. V26. P.301–320.