УДК 539.3

ДЕФОРМАЦИИИ И НАПРЯЖЕНИЯ ПОЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМОГО АНТИСИММЕТРИЧНЫМ ТЕНЗОРОМ

Дуйшеналиев Т.Б., Жакыпбеков А.Б., Рабидинова Ж.Д., Султанов Н.А.

Градиенты перемещения обычно разлагаются на симметричный и антисимметричный тензоры. Деформированные и напряженные состояния определяются на основе симметричного тензора. Принято считать, что антисимметричный тензор описывает жесткое вращение окрестности рассматриваемой точки, которое не создает напряжений. Но так ли это?

Рассмотрим преобразование, определяемое как

$$X_i = h_{ij} x_j \,. \tag{1}$$

Тензор h задан в виде

$$h = \begin{pmatrix} 1 & -a & b \\ a & 1 & -c \\ -b & c & 1 \end{pmatrix},$$

где a,b,c - константы.

Вектор перемещения этого преобразования

$$u_i = x_i - X_i = (\delta_{ij} - h_{ij}) x_j \,. \tag{2}$$

Здесь δ_{ij} - тензор Кронекера. Градиент этого поля перемещения является антисимметричным тензором.

Выделим в координатах конечного состояния x_i область v

$$2 \le x_1 \le 5,\;\; 2 \le x_2 \le 4,\;\; 3 \le x_3 \le 7\,. \tag{3}$$

Эта область является прямоугольным параллелепипедом, который показан на правом верхнем углу рисунка 1 . Там же показано начальное состояние V этого параллелепипеда, определяемое преобразованием (1), в котором положено

$$a = 3,\;\; b = 2,\;\; c = 5\,.$$

На этом рисунке красными линиями показаны векторы перемещения вершин параллелепипеда.

Следует подчеркнуть одно важное обстоятельство, которое нельзя упускать из виду – *началом векторов перемещения являются точки области V, а концом их служат точки области v (3). Эти векторы преобразуют область V в область v, следовательно, они создают деформации только в области v, а не в области V.*

Пространственный градиент перемещения

$$e_{ij} = \delta_{ij} - h_{ij}\,. \tag{4}$$

Ротор поля перемещения (2)

$$rot u = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}. \tag{5}$$

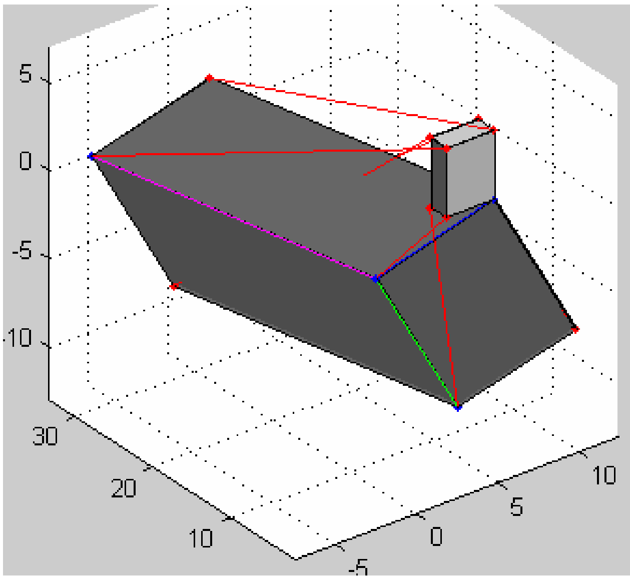

Рис.1. Конечное (малый параллелепипед) и начальное (большой параллелепипед) состояния преобразования (1).

Проведем обычное разбиение этого тензора на симметричный и антисимметричный тензоры

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji}) \tag{6}$$

В развернутом виде эти тензоры имеют вид

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Как видно из рисунка 1, произошло вращение тела. Однако это не то вращение, которое называют жестким (вращение абсолютно твердого тела). Жесткое вращение не создает никаких деформаций, а определяемое выражением (2) поле перемещения создает таковые. Это обстоятельство рассмотрено ниже.

Выше приведено, что

$$\varepsilon_{ij} \equiv 0. \tag{8}$$

Если напряжения определять как

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \tag{9}$$

то выходит, что перемещения (2) не создают напряжений.

$$\sigma_{ij} \equiv 0. \tag{10}$$

Обратимся к уравнениям статической краевой задачи в обычной постановке. В области v должны удовлетворяться:

- уравнения равновесия (равенство нулю главного вектора и главного момента усилий, приложенных к материальной точке)

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0, \quad x_i \in v$$
$$\sigma_{ij} - \sigma_{ji} = 0, \quad x_i \in v \tag{11}$$

- уравнение совместности деформации

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \frac{\nu}{1-\nu} f_{k,k} + f_{i,j} + f_{j,i} = 0, \quad x_i \in v\,; \tag{12}$$

- граничные условия

$$\sigma_{ji} n_j = p_i, \quad x_i \in s\,. \tag{13}$$

В задаче (11)-(13) напряжения определяются уравнением (9). При такой постановке положении вещей уравнения этой задачи удовлетворяются, если

$$f_i \equiv 0, \ x_i \in v$$
$$p_i \equiv 0, \ x_i \in s \tag{14}$$

Таким образом, обычное определение напряжений уравнением (9) и решение соответствующей статической краевой задачи (11)-(13) приводят к абсурду – косоугольный параллелепипед V преобразуется в прямоугольный параллелепипед v, в котором нет никаких напряжений. Сравнение этих фигур говорит, что произошли значительные деформации. Эти деформации должны создать напряжения. Для того, чтобы параллелепипед v , с имеющимися в нем деформациями, находился в равновесии, к нему должны быть приложены внешние усилия. Определим эти усилия с помощью уравнений статической краевой задачи.

Пространственный градиент (4) в развернутой записи

$$e = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

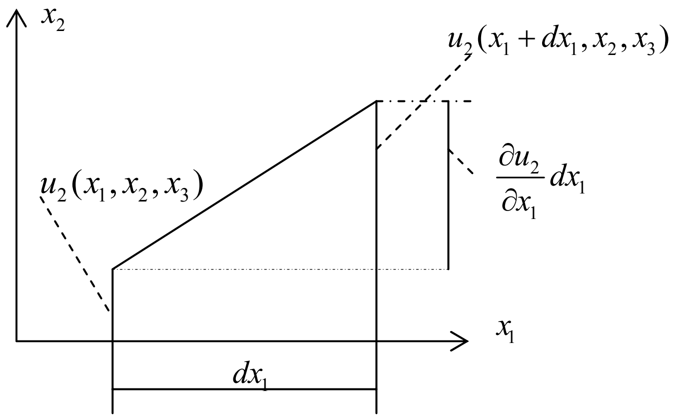

Рис.2. Геометрическое представление линейного перемещения $\frac{\partial u_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} dx_1$.

Элементы этого тензора, расположенные не на главной диагонали,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -a, \ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = a, \ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = b, \ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = -b, \ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -c, \ \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = c \tag{15}$$

являются величинами частных производных функций перемещения, которые описывают относительные деформации сдвига. Они должны восприниматься как деформации, изменяющие линейные размеры при преобразовании начального состояния V в конечное состояние v. На рис.2 приведено геометрическое представление величины перемещения $\frac{\partial u_2(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}dx_1$. Относительная линейная деформация такого перемещения равна величине производной $\frac{\partial u_2(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}$. В каждой точке области v известны деформации сдвига (15) и, пользуясь ими, можно вычислить величины функции перемещения, что показано ниже

$$du=\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_j}dx_j\\ \frac{\partial u_2}{\partial x_j}dx_j\\ \frac{\partial u_2}{\partial x_j}dx_j\end{pmatrix},\quad u(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}u_1(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\\ u_2(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\\ u_3(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1+\int_{x_2^0}^{x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2+\int_{x_3^0}^{x_3}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}dx_3\\ \int_{x_1^0}^{x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1+\int_{x_2^0}^{x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}dx_2+\int_{x_3^0}^{x_3}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}dx_3\\ \int_{x_1^0}^{x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}dx_1+\int_{x_2^0}^{x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}dx_2+\int_{x_3^0}^{x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}dx_3\end{pmatrix}.$$

Здесь (x_1^0,x_2^0,x_3^0), (x_1,x_2,x_3) соответственно начальная и конечная точки интегрирования.

Пусть $(2,2,3)$ координаты начальной, а $(5,4,7)$ - конечной точек.

$$u(5,4,7)=\begin{pmatrix}u_1(2,2,3)\\ u_2(2,2,3)\\ u_3(2,2,3)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\int_2^4-3dx_2+\int_3^7 2dx_3\\ \int_2^5 3dx_1+\int_3^7-5dx_3\\ \int_2^5-2dx_1+\int_2^4 5dx_2\end{pmatrix},\quad u(5,4,7)=\begin{pmatrix}0\\-9\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-11\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-20\\10\end{pmatrix}$$

Вычисления по формулам (2) приводят к этому же результату.

Деформации сдвига (15), таким образом, по своей сути являются деформациями, изменяющими линейные размеры. В таком свете, напряжения по обобщенному закону Гука должны определяться с учетом этих деформаций сдвига. Это можно сделать, если при определении напряжений исходить из пространственного градиента деформации e_{ij}, а не из тензора Коши ε_{ij}.

$$\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}e_{kk}+2\mu e_{ij} \tag{16}$$

Приведем уравнения статической краевой задачи в напряжениях, решением которой является функция напряжений (16).

Уравнение равновесия (равенство нулю главного вектора и главного момента усилий, приложенных к материальной точке):

$$\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_i}+f_i=0,\quad x_i\in v$$
$$\begin{pmatrix}\sigma_{23}-\sigma_{23}\\ \sigma_{31}-\sigma_{13}\\ \sigma_{12}-\sigma_{21}\end{pmatrix}+m=0,\quad x_i\in v \tag{17}$$

Уравнение совместности деформации:

$$\sigma_{ij,kk}+\frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij}+\frac{\nu}{1-\nu}f_{k,k}+f_{i,j}+f_{j,i}=0,\quad x_i\in v \tag{18}$$

Граничные условия:
внешние усилия на гранях прямоугольного параллелепипеда (2), с указанными ниже нормалями

$$n_1=-1,\ n_2=n_3=0,\ \ p1l=\begin{pmatrix}0\\ -\sigma_{12}\\ -\sigma_{13}\end{pmatrix},\quad n_1=1,\ n_2=n_3=0,\ \ p1p=\begin{pmatrix}0\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\end{pmatrix}$$
$$n_1=n_3=0,\ n_2=-1,\ \ p2p=\begin{pmatrix}-\sigma_{21}\\ 0\\ -\sigma_{23}\end{pmatrix},\quad n_1=n_3=0,\ n_2=1,\ \ p2z=\begin{pmatrix}0\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\end{pmatrix} \tag{19}$$
$$n_1=n_2=0,\ n_3=-1,\ \ p3n=\begin{pmatrix}-\sigma_{31}\\ -\sigma_{32}\\ 0\end{pmatrix},\quad n_1=n_2=0,\ n_3=1,\ \ p3b=\begin{pmatrix}\sigma_{31}\\ \sigma_{32}\\ 0\end{pmatrix}$$

Компоненты напряжения постоянны, ибо деформации (15) являются постоянными. Из этого следует, что первое из уравнений (13) удовлетворяется, если

$$f_i\equiv 0,\ \ x_i\in v\,.$$

Второе из уравнений (13) удовлетворяется, если момент m определить как

$$m=-\begin{pmatrix}\sigma_{23}-\sigma_{23}\\ \sigma_{31}-\sigma_{13}\\ \sigma_{12}-\sigma_{21}\end{pmatrix},\quad x_i\in v\,. \tag{20}$$

Первое из уравнений (17) и уравнение совместности деформации (18) удовлетворены, так как напряжения постоянны, а $f_i=0$.

Таким образом, конечное состояние (рис. 1, малый параллелепипед) находится в равновесии, если во внутренних его точках приложены сосредоточенные внешние моменты (20), а на гранях имеются внешние силы (19).

Решение задачи (17)-(19) в матричной форме имеет вид

$$\sigma=2\cdot\mu\cdot\begin{pmatrix}0 & -a & b\\ a & 0 & -c\\ -b & c & 0\end{pmatrix}. \tag{20}$$

В определении напряжения уравнениями (9), как видим, не участвуют элементы тензора ω_{ij}. Это оправдывается тем, что этот тензор описывает вращение окрестности точки как жесткого тела. Такое вращение не создает напряжений, если окрестность точки рассматривать как свободное тело, не имеющее никакой связи с окружающей ее частью тела. Однако окрестность точки связана с окружающей ее частью тела, и эта связь оказывает сопротивление жесткому вращению, пусть даже бесконечно малому. В виду этого, напряжение по обобщенному закону Гука должно определяться компонентами градиента перемещения, т.е. так, как указано в выражении (16).

Отметим, что в том случае, когда тензоры h удовлетворяют условиям

$$h \cdot h' = h' \cdot h = \delta,\ \det(h) = 1,$$

считается, что преобразование

$$X = h \cdot x$$

описывает только вращение, следовательно, не создает напряжений. Однако это ошибочно. В этом можно убедиться, определяя напряженное состояние так, как это сделано выше.

Рассмотрим случай, когда преобразование задано в виде

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3)\,. \tag{21}$$

Пусть в точках области v якобиан этого преобразования не равен нулю. Этому преобразованию соответствуют перемещения

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = x_i - X_i(x_1, x_2, x_3)\,. \tag{22}$$

Пространственный градиент перемещения

$$e_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial u_i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_j}\,. \tag{23}$$

Разложим этот градиент на симметричный тензор

$$\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(e_{ij}(x_1, x_2, x_3) + e_{ji}(x_1, x_2, x_3)) \tag{24}$$

и антисимметричный тензор

$$\omega_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(e_{ij}(x_1, x_2, x_3) - e_{ji}(x_1, x_2, x_3))\,. \tag{25}$$

Обычное определение напряжений элементами тензора (24)

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(x_1, x_2, x_3) + 2\mu \varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) \tag{26}$$

игнорирует напряженное состояние, создаваемое антисимметричным тензором (25). Это основано на том представлении, по которому окрестность рассматриваемой точки может вращаться как свободное твердое тело. Однако эта окрестность не обособлена от окружающей ее части тела. Ее вращение, пусть даже малое, требует значительных усилий. В виду этого, напряжения должны определяться как

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \lambda \delta_{ij} e_{kk}(x_1, x_2, x_3) + 2\mu e_{ij}(x_1, x_2, x_3)\,. \tag{26}$$

Выделим произвольную область v конечного состояния, поверхность которой обозначим s. Известность напряженного состояния (26) позволяет определить внутренние и внешние силы, которые соответствуют состоянию равновесия выделенного объема. В любой точке области v можно определить деформацию удлинения по направлению вектора dx

$$\alpha(dx, x_1, x_2, x_3) = e_{ij} \frac{dx_i}{|dx|} \frac{dx_j}{|dx|},$$

а так же деформацию сдвига на плоскости, нормальной к вектору dx,

$$\beta(dx, x_1, x_2, x_3) = \sqrt{e_{ki}(x_1, x_2, x_3) e_{kj}(x_1, x_2, x_3) \frac{dx_i}{|dx|} \frac{dx_j}{|dx|} - \alpha(dx, x_1, x_2, x_3)^2} \ .$$

Определение деформаций элементами пространственного градиента освобождает теорию деформированного и напряженного состояния от пресловутых оговорок о бесконечной малости рассматриваемых преобразований. Это новое положение и оно требует тщательного анализа.

Литература

1. Дуйшеналиев Т.Б., Жакыпбеков А.Б., Чыныбаев М.К. Определение фуйкции перемещения по элементам тензора Коши // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И.Раззакова, №12, с. 146-150.