УДК 62-50

СИНТЕЗ РЕЛЕЙНО-ЗНАКОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

ДЖОЛДОШЕВ Б.О., ОМОРОВ Т.Т.
НАН КР, КГТУ им. И. Раззакова

Разработан метод построения релейно-знаковых нелинейных регуляторов для линейных стационарных многомерных объектов по инженерным требованиям к качеству управления.

The method of construction of relejno-sign nonlinear regulators is developed for linear stationary multidimensional objects under engineering requirements to quality of management.

Постановка задачи синтеза. Проектирование современных систем управления осуществляется на основе теории автоматического управления. Основы этой теории составляют такие методы, как аналитическое конструирование оптимальных регуляторов (АКОР) [1-3], модальное управление [4], теория H^{∞} [5-7], концепция обратной задачи динамики [8-10]. Разработанные в рамках этих направлений методы и алгоритмы дали возможность проектировать высокоэффективные автоматические системы для управления многочисленными сложными объектами в различных отраслях промышленности и техники. Известно, что с помощью указанных методов решаются задачи синтеза автоматических систем, когда управляющие подсистемы строятся на основе линейных обратных связей вида

$$u(t) = K\,x(t), \qquad (1)$$

или

$$\dot{u}(t) = Ru(t) + Dx(t), \qquad (2)$$

где $u(t)$ – m-мерный вектор закона управления; $x(t)$ – n-мерный вектор состояния объекта; K, R, D – матрицы регулятора соответствующих размерностей.

В то же время указанные методы не позволяют синтезировать обширный класс систем, важных с практической точки зрения. В частности, к таким системам автоматического управления (САУ) относятся классы релейных и нелинейных систем. В этом плане предложенный в работах [11] принцип гарантируемой динамики обладает более широкими возможностями.

В настоящей работе рассматривается проблема построения релейного (знакового) регулятора, имеющего закон управления вида

$$u(t) = K\,\mathrm{sign}\,x(t), \qquad (3)$$

где матрица $K = \{k_{ei}\}_{mxr}$, а компоненты вектора знаковой функции определяются формулой

$$\hat{x}_i = \mathrm{sign} x_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{åñëè } \tilde{o}_i(t) > 0, \\ 0, & \text{åñëè } \tilde{o}_i(t) = 0, \\ -1, & \text{åñëè } \tilde{o}_i(t) < 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Системы управления, реализующие законы управления вида (3) являются более надежными и технически просто реализуются, чем САУ, имеющие алгоритмы управления вида (1) и (2).

Рассмотрим многомерный объект управления, динамические свойства которого описывается векторным линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), \qquad x(t_0) = x^0,\ t \in [t_0, t_k], \qquad (5)$$

где матрицы $A = \{a_{ij}\}_{nxn}$, $B = \{b_{ej}\}_{nxm}$.

Предполагается, что качество процессов управления удовлетворяет заданным требованиям, если выполняются ограничения

$$|x_i(t)| \le \sigma_i(t), \qquad i = \overline{1,n}, \qquad (6)$$

где $\sigma_i(t)$ - положительные непрерывно дифференцируемые функции времени, через которые задаются требования к быстродействию и точности автоматической системы.

Неравенства (6) определяет допустимое

подмножество X(t) для вектора состояния x(t):

$$X(t) = \{x \in R^n : |x_i(t)| \le \sigma_i(t), i = \overline{1,n}\}.$$

Задача синтеза состоит в определении матрицы регулятора K так, чтобы выполнялись требования к качеству управления (6).

Параметрический синтез релейно-знакового регулятора. Рассмотрим возможность применения принципа гарантируемой динамики для решения сформулированной проблемы. С учетом закона управления (3) уравнение замкнутой системы управления имеет вид

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + R\,sign\,x(t), \quad (7)$$

где матрица

$$R = BK = \{r_{ij}\}_{nxn}.$$

В координатный форме последнее уравнение записывается в виде

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} r_{ij}\,signx_j(t), \quad i = \overline{1,n}. \quad (8)$$

Обозначим через $p-$ вектор размерностью $\mu = n \times m$, составленный из всех строк (элементов) матрицы K.

Тогда допустимое подмножество P для вектор параметра p определяется соотношением

$$P = \{p \in R^{\mu} : x(t) \in X(t), \; t \in [t_0, t_k]\}. \quad (9)$$

Описание подмножества P задается на основе следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $x(t_0) \in X(t_0)$. Тогда для того, чтобы $p \in P$ достаточно выполнения условий

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau)[|a_{ij}|\,\sigma_i(\tau) + |r_{ij}|]\,d\tau \le \int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau)\,\dot{\sigma}(\tau)\,d\tau - \int_{t_0}^{t} [a_{ii}\,\sigma_i^2(\tau) + r_{ii}\,\sigma_i(\tau)]\,d\tau. \quad (10)$$

Доказательство. Для этой цели будем использовать следующее фундаментальное соотношение принципа гарантируемой динамики [1]:

$$\int_{t_0}^{t} x_i(\tau)\,\dot{x}(\tau)\,d\tau \le \int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau)\,\dot{\sigma}_i(\tau)\,d\tau, \quad i = \overline{1,n} \quad t \in [t_0, t_k]. \quad (11)$$

Показано, что, если выполняются неравенства (11), то обеспечиваются и условия допустимого качества управления (6), т.е. вектор-параметр $p \in P$. Подставим выражения для $\dot{x}_i(t)$, определенные формулой (7), в левые части соотношений (11). В результате несложных преобразований получим неравенства:

$$\int_{t_0}^{t} [a_{ii}\,x^2(\tau) + r_{ii}\,|x_i(\tau)|]d\tau + \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \int_{t_0}^{t} x_i(\tau)\,[a_{ij}\,x_j(\tau) + r_{ij} signx_j]\,d\tau \le \le \tilde{A}_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \in [t_0, t_k], \quad |x_i(t_0)| \le \sigma_i(t_0), \quad i = \overline{1,n}. \quad (12)$$

где $\tilde{A}_i(t) = \int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau)\,\dot{\sigma}_i(\tau)\,d\tau$.

По условию утверждения в начальный момент времени t_o все компоненты вектора состояния x(t) лежат в допустимых областях, т. е.

В процессе управления при t>to отдельные (или все) переменные $x_i(t)$ могут попасть на границы соответствующих допустимых подмножеств. Чтобы в дальнейшем (t>to) управляемые координаты не вышли за пределы допустимых зон, должны выполняться условия (12). В случае,

когда $x_i(t) = \sigma_i(t)$, неравенства (12) преобразуются к виду:

$$\int_{t_0}^{t} [a_{ii}\sigma_i^2(\tau) + r_{ii}\sigma_i(\tau)]d\tau + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau)[a_{ij}x_j(\tau) + r_{ij} sign\, x_j(\tau)]d\tau \le \tilde{A}_i(t)$$
$$i = \overline{1,n}, \qquad t \in [t_o, t_k]. \tag{13}$$

При $x_i(t) = -\sigma_i(t)$ имеем

$$\int_{t_0}^{t} [a_{ii}\sigma_i^2(\tau) + r_{ii}\sigma_i(\tau)]d\tau - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau)[a_{ij}x_j(\tau) + r_{ij} sign x_j(\tau)]d\tau \le \tilde{A}_i$$
$$i = \overline{1,n}, \qquad t \in [t_o, t_k] \tag{14}$$

Неравенства (13) и (14) эквивалентны следующим модульным ограничениям.

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau)\,[a_{ij}\ x_j(\tau) + r_{ij}\ sign\ x_i(\tau)]\ d\tau \right| \le \Gamma_i(t) -$$
$$- \int_{t_0}^{t} [a_{ii}\ \sigma_i^2(\tau) + r_{ii}\ \sigma_i(\tau)]\ d\tau, \quad i = \overline{1,n}, \quad t \in [t_0, t_k]. \tag{15}$$

Теперь нетрудно показать, что для левой части соотношений (15) справедливы оценки

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau)\left[a_{ij}x_j(\tau) + r_{ij}\ sign\ x_j(\tau)\right]dt \right| \le$$
$$\le \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} \int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau)\left[\left[a_{ij}\right|\sigma_j(\tau) + \left|r_{ij}\right|\right]d\tau, \quad i = \overline{1,n}. \tag{16}$$

Отсюда и следует справедливость утверждения.

Введем обозначения

$$C_i(p,t) = \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{n} \int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau)\left[\left[a_{ij}\right|\sigma_j(\tau) + \left|r_{ij}\right|\right]d\tau +$$
$$+ \int_{t_o}^{t} \left[a_{ii}\sigma_i^2(\tau) + r_{ii}\sigma_i(\tau)\right]d\tau - \tilde{A}_i(t), \quad i = \overline{1,n}.$$

В результате подмножество $\hat{P} \subset P$ задается соотношением

$$\hat{P} = \left\{ p \in R^m : \quad C_i(p,t) \le 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad \forall t \in [t_0, t_k] \right\}. \tag{17}$$

Таким образом, синтез регулятора, имеющего закон управления вида (3), по ограничениям на переходные процессы можно осуществлять на основе исследования подмножества $\hat{P}$. Эту задачу можно решить с помощью известных методов [18, 19, 20] или на основе принципа гарантируемой динамики [1].

Структурно-параметрический синтез релейно-знаковых регуляторов.

Рассмотрим возможность синтеза регулятора с законом управления вида

$$u(t) = Kx(t) + sign\ x(t), \tag{19}$$

где матрицы регулятора $\tilde{K} = \{k_{ij}\}_{n\times m}$, $K = \{k_{ij}\}_{n\times m}$.

Качество управления как и ранее будем оценивать по инженерному критерию (5).

Алгоритм синтеза искомого регулятора на основе принципа гарантируемой динамики состоит из следующих основных этапов.

1. Задание первичных инженерных требований к проектируемой системе

$$\text{Ï}_{\text{i}} = \left[\sigma_{\text{i}}^{+},\ \ \text{T}_{\text{i}},\ \ \Delta_{\text{i}}\right],\qquad \text{i} = \overline{1,\text{n}}. \quad (20)$$

2. Определение по множеству векторов качества $\{\Gamma_i\}$ функции $\sigma_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, задающих границы допустимых областей $D_i(t)$.

3. Задание структуры желаемой диагностики замкнутой САУ

$$\dot{x}_i(t) = f_i^*(x),\quad i = \overline{1,n}. \quad (21)$$

Для определенности предположим, что

$$f_i^*(x) = P \cdot sign\ x(t), \quad (22)$$

где вектор-функция $f^*(x) = \left[f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*\right]$, а матрица $\text{P} = \left\{p_{ij}\right\}_{n\times n}$. Элементы p_{ij} матрицы P определяются на основе следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть $x_i(t_o) \in D_i(t_o)$. Тогда для того, чтобы решения системы уравнений (21) и (22) $x_i(t) \in D_i(t)$ для каждого момента времени $t \in (t_o, t_k)$ должны выполняться условия

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|p_{ij}\right| \int_{t_o}^{t} \sigma_i(\tau)d\tau \le \int_{t_o}^{t} \sigma_i(\tau)\dot{\sigma}_i(\tau)d\tau - p_{ii}\int_{t_o}^{t} \sigma_i(\tau)d\tau \quad (23)$$

$$\text{i} = \overline{1,\text{n}}.$$

Доказательство теоремы 2 здесь не приводится, поскольку для этой цели используется та же методика, что изложена в [1].

4. Формирование уравнения синтеза, которое в данном случае имеет вид

$$Ax(t) + Bu(t) = P \cdot sign\ x(t) \quad (24)$$

5. Решение уравнения синтеза (19)

$$\text{u(t)} = \text{C}^{-1}\left[\text{P}\cdot\text{sign x(t)} - \text{Ax(t)}\right], \quad (25)$$

где предполагается, что существует обратная матрица

$$\tilde{N}^{-1} = \left[B^T \cdot B\right]^{-1}.$$

На основе сравнения соотношений (3.25) и (3.19) получаем формулы для матриц К и $\widetilde{\text{K}}$ регулятора.

$$\tilde{\text{Ê}} = -\tilde{\text{N}}^{-1}\text{À},\qquad \text{Ê} = \tilde{\text{N}}^{-1}\text{Ð}. \quad (26)$$

Применение изложенного алгоритма синтеза релейно-знакового регулятора рассмотрим для построения системы управления технологическим резервуаром.

Расчет регулятора технологическим резервуаром. Рассмотрим построение регулятора для управления смесительным резервуаром, на основе метода предложенного в пункте 2. Обозначим через $q_1(t)$ и $q_2(t)$ расходы потоков жидкостей, которые могут регулироваться вентильными устройствами [15]. Каждый поток содержит растворимое вещество с постоянной концентрацией. После перемешивания в резервуаре раствор жидкости отводится по единственному отверстию. Выходной поток характеризуется расходом $Q(t)$ и концентрацией C(t).

Задача управления состоит в поддержании номинальных значений расхода Q^* и концентрации C^* выходного потока жидкости путем изменения входных расходов $q_1(t)$ и $q_2(t)$.

Введем векторы состояния $x(t)=[x_1(t), x_2(t)]^T$ и управления $u(t)=[u_1(t), u_2(t)]^T$, компоненты которых представляют собой отклонения рассмотренных выше переменных от их номинальных значений:

$$\begin{aligned} &\text{x}_1(\text{t}) = \text{Q}^* - \text{Q(t)},\ \ \text{x}_2(\text{t}) = \text{C}^* - \text{C(t)},\\ &\text{u}_1(\text{t}) = \text{q}_1^* - \text{q}_1(\text{t}),\ \ \text{u}_2(\text{t}) = \text{q}_2^* - \text{q}_2(\text{t}). \end{aligned} \quad (27)$$

Математическая модель объекта управления описывается дифференциальным уравнением вида (5), где матрицы

$$\text{A} = \begin{bmatrix} -0{,}01 & 0 \\ 0 & -0{,}02 \end{bmatrix},$$

$$\text{B} = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}01 \\ -0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix}.$$

Структуру закона управления зададим в виде

$$u(t) = K\ sign\ x(t).$$

Задача синтеза регулятора состоит в определении элементов матрицы К, обеспечивающих выполнение целевого

соотношения

$$|x_i(t)| \le \sigma_i(t), \qquad i = \overline{1,2}, \quad (28)$$

где функция

$$\acute{a}_1(t) = \acute{a}_1^0 e^{\alpha_1 t}, \quad \alpha_1 < 0, \quad \acute{a}_1^0 > 0.$$

Согласно обозначениям, уравнение (28) примет вид

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + R\,sign\,x(t). \quad (29)$$

Параметры p_{ii} будем определять из условия обеспечения неравенства (11) с этой целью воспользуемся соотношением (8).

В результате для определения значений p_{ii} имеем неравенство

$$p_{ii} \le \frac{\gamma_i \int_{t_o}^{t} \sigma_i^2(\tau)\,d\tau}{\int_{t_o}^{t} \sigma_i(\tau)\,d\tau}$$

Формирование вектора управления будем осуществлять на основе соотношения (24), тогда для рассматриваемого объекта компоненты вектора управления будут иметь вид

$$u_1(t) = -0.02x_2(t) - p_{22}\,signx_2(t),$$
$$u_2(t) = 25p_{11}\,signx_1(t) + p_{22}\,signx_2(t) + 0.25x_1(t) + 0.02x_2(t)$$

На рис. 1. представлены результаты компьютерного моделирования при следующих начальных значениях компонентов вектора состояния объекта x(t) и параметров p_{11}, p_{22} вектора управления

$x_1(t_o) = 0.28;$
$p_{11} = -0.355;$
$x_2(t_o) = 0.08;$
$p_{22} = -1.275.$

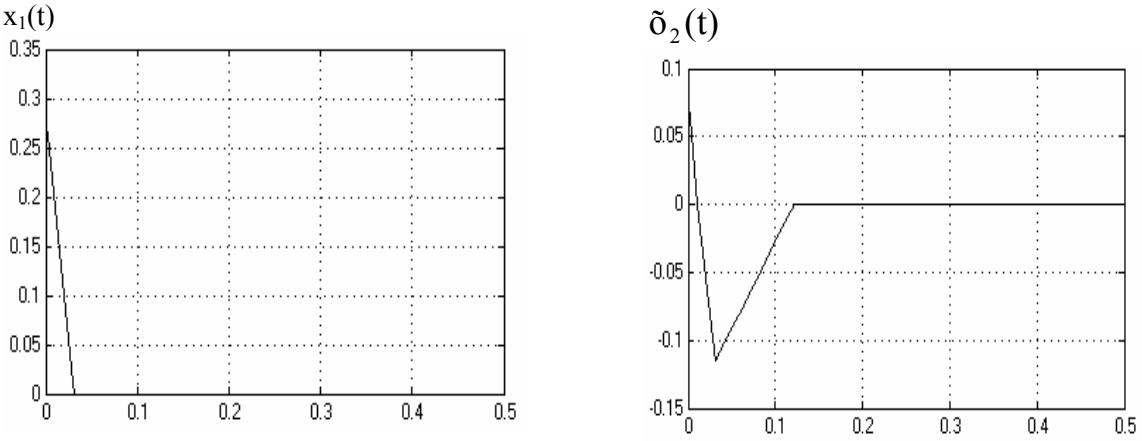

Рис. 1.

Литература

1. Александров А.Г. Синтез регуляторов многомерных систем. – М.: Машиностроение, 1986. – 272 с.
2. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977. – 650 с.
3. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов I, II, III //Автоматика и телемеханика, 1960.– № 4. – С. 436–441; № 5.– С.561–568; № 6. – С. 661–665.
4. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. – М.: Машиностроение, 1976. – 184с.
5. Киселев О.Н., Поляк Б.Т. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H^{∞}– и критерию максимальной робастности // Автоматика и телемеханика, 1999. – № 3. – С. 119–130.
6. Позняк А.С., Себряков Г.Г., Семенов А.В., Федосов Е.А. H ∞ – теория управления: феномен, на основе вход–выходных отображений. Методы H∞ – теории управления // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика, 1989.– № 2.– С. 3–16.
7. Честнов В.Н. Синтез цифровых H – регуляторов состояния многомерных систем заданной точности // А и Т. - 2005. - №5. - С.46-51.

8. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: Нелинейные модели. – М.: Наука, 1988. – 328 с.
9. Крутько П.Д. Оптимизация многомерных динамических систем по критерию минимума энергии ускорения. // Изв.РАН. Техническая кибернетика. – 1994. – № 1. – С. 32–47.
10. Шаршеналиев Ж.Ш., Батырканов Ж.И. Синтез систем управления с заданными показателями качества. – Бишкек : Илим, 1991. – 174 с.
11. Оморов Т.Т. Принцип гарантируемой динамики в теории систем управления. – Бишкек: Илим, 2001. – 130 с.
12. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975. – 319 с.
13. Черников С.Н.Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968. – 488 с.
14. Башарин А.В., Новиков В.А., Соколовский Г.Г. Управление электроприводами. – Л.: Энергоиздат, 1982. –392 с.
15. Лебедев Е.Д., Неймарк В.Е., Пистрак М.Я., Слежановский О.В. Управление вентильными электроприводами постоянного тока. – М.: Энергия, 1970. – 198 с.
16. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и SCILAB. СПб.: Наука, 2001.
17. Дьяконов В.П. Математическая система Maple V R3/R4/R5/.– М.: Солон, 1998. – 400 с.
18. Дикин И.И. Решение систем равенств и неравенств методом внутренних точек // Кибернетика и системный анализ, 2004. – №4. – С. 184 –
19. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. -М.: Наука, 1987.-712с.