ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН РАСТЯЖЕНИЯ ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ МАТЕРИАЛА ОБЛАДАЮЩЕГО ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

АБДРАХМАНОВ С.А., КОЖОШОВ Т.Т.
КГТУ им. И.Раззакова

В данной работе произведён расчет цилиндрических пружин растяжения, изготовленных из материала обладающего эффектом памяти формы при её упругой работе в линейной и нелинейной постановке, приводится анализ напряженно-деформированного состояния и определяется, та предельная нагрузка после которой появляются неупругие деформации.

Как правило, пружины изготовленные из традиционных материалов работают в упругой области деформирования. С появлением материалов обладающих эффектом памяти формы пружины изготовленные на их основе могут работать и за пределом упругих деформаций [1,2]. Причем, если при работе пружин используется эффекты обратимой памяти, генерации реактивных усилий, и т.п., то наличие неупругих деформаций является обязательным условием. Обзор технических решений применения материалов с памятью формы приведен в работе [3]. В данной работе теоретически исследуется рабочие характеристики цилиндрических пружин растяжения, изготовленных из материала обладающего эффектом памяти формы при её упругой работе в линейной и нелинейной постановке, приводится анализ напряженно-деформированного состояния и определяется, та предельная нагрузка после которой появляются неупругие деформации. Определение рабочих характеристик включает установление соотношений между изменениями диаметра, угла подъема, количества витков, а также перемещением определённой точки пружины (углового и линейного) в зависимости от нагрузки $\boldsymbol{P}$. Рассмотрим цилиндрическую винтовую, пружину, изготовленную из проволоки диаметром $\boldsymbol{d}$, обладающего эффектом памяти формы. Пусть она воспринимает продольно-растягивающую нагрузку $\boldsymbol{P}$. Известно, что цилиндрическая винтовая пружина определяется тремя основными независимыми параметрами: $\boldsymbol{D}$-диаметр пружины, $\boldsymbol{\alpha}$ – угол подъема оси винтового бруса, $\boldsymbol{l}$ – длина оси рабочей части винтового бруса. В дальнейшем учитывая малость абсолютного удлинения оси винтового бруса будем считать, что она нерастяжима, т. е. принимать его постоянной ($\boldsymbol{l}$ = const).

Рассмотрим геометрическую сторону данной задачи. Выразим необходимые геометрические характеристики пружины через основные независимые параметры. Известно [4,5], что они определяются следующими формулами:

шаг оси винтового бруса

$$h = \pi D tg\alpha \,, \qquad (1)$$

число рабочих витков

$$i = \frac{l\cos\alpha}{\pi D}\,. \qquad (2)$$

Длина рабочей части пружины, т.е. её высота

$$H = hi\,, \text{ или } H = l\sin\alpha\,. \qquad (3)$$

Введем полярный угол φ, отсчитываемый от некоторой оси перпендикулярной оси винтового бруса. Тогда его максимальное значение будет

$$\varphi_i = \psi = 2\pi i\,.$$

Или с учетом формулы (2)

$$\psi = \frac{2l}{D}\cos\alpha\,. \qquad (4)$$

Кривизна винтовой линии

$$\chi = \frac{2\cos\alpha}{D}\,. \qquad (5)$$

Кручение винтовой линии

$$\omega = \frac{\sin 2\alpha}{D}\,. \qquad (6)$$

Из этих формул видно что, при растяжении пружины её высота $\boldsymbol{H}$ и угол подъема $\boldsymbol{\alpha}$ увеличивается, при этом кручение винтовой линии возрастает, а торцы пружины получают взаимные и угловые перемещения.

Рассмотрим внутренние усилия в пружине нагруженного растягивающей осевой силой $\boldsymbol{P}$ и крутящим моментом $\boldsymbol{m}$ (рис. 1 *а*.).

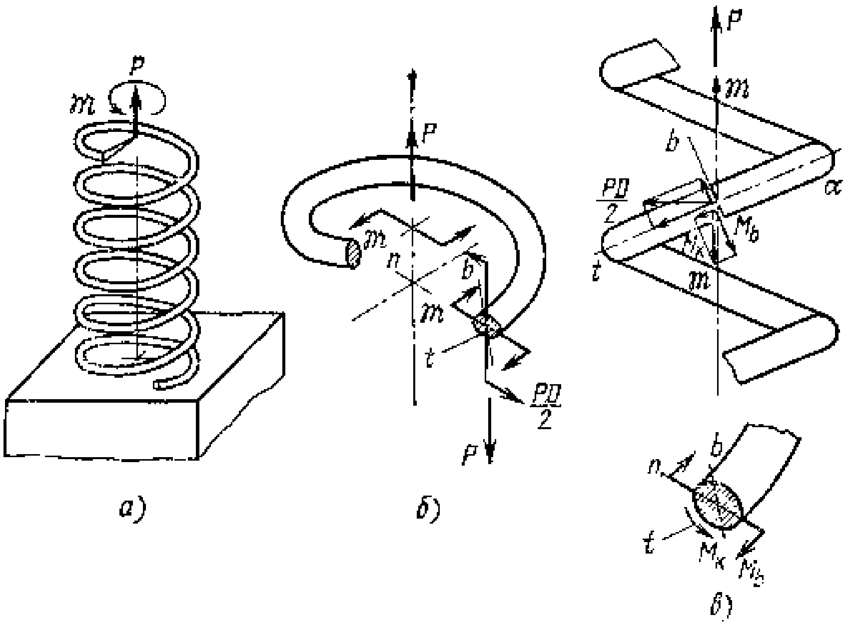

Рис. 1.

Равновесие пружины отсеченной плоскостью нормальной к винтовой линии даёт, что момент внутренних сил в осевой плоскости будет $PD/2$, а момент в плоскости перпендикулярной к оси – равен ***m***. (рис. 1*б*) Кроме этого в сечении действует сила ***P*** направленная вдоль оси пружины. Учитывая, что эта сила мало влияет на деформацию пружины, в дальнейшем её не рассматриваем.

Из рисунка (рис. 1*в*) видно, что крутящий и изгибающий момент в поперечном сечении витка будет:

$$Mкр = \frac{PD}{2}\cos\alpha + m\sin\alpha\,, \quad (7)$$

$$Миз = m\cos\alpha - \frac{PD}{2}\sin\alpha\,. \quad (8)$$

Рассмотрим случай малых перемещений пружин.

При этом изменение высоты пружины ΔH и центрального угла $\Delta\psi$ на основании формул(3) и (4) будет:

$$\Delta H = l\Delta\alpha\cos\alpha\,, \quad (9)$$

$$\Delta\psi = -\frac{2l}{D}\left(\Delta\alpha\sin\alpha + \frac{\Delta D}{D}\cos\alpha\right). \quad (10)$$

Используя (5) и (6) находим изменение кривизны, в виде:

$$\Delta\chi = -\frac{2\sin 2\alpha}{D} - \frac{2\cos^2\alpha}{D^2}\Delta D\,, \quad (11)$$

$$\Delta\omega = \frac{2\cos 2\alpha}{D}\Delta\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{D^2}\Delta D\,. \quad (12)$$

Определив из последних уравнений $\Delta\alpha$, ΔD и подставив их в (9) и(10), получаем:

$$\Delta H = \frac{1}{2}\pi D^2 i(\Delta\omega - \Delta\chi tg\alpha)\,, \quad (13)$$

$$\Delta\psi = \pi Di(\Delta\chi - \Delta\omega tg\alpha)\,. \quad (14)$$

Из этих формул видно, что при малых углах подъёма ($tg\alpha \approx 0$) изменения высоты пружины обусловлено в основном кручением винтовой линии, а изменение центрального угла $\Delta\psi$ - приращением кривизны.

Отметим, что перемещение пружины зависит от способа закрепление концов. Здесь мы рассмотрим два способа крепления.

1. Свободное крепление. В этом случае торцы пружины могут свободно поворачиваться вокруг её оси ($m = 0$). Следовательно, число её витков должно изменяться.
2. Жесткое крепление. В этом случае число витков остается постоянным, но в заделке появляется реактивный момент.

Рассмотрим перемещение пружины. Очевидно, что осадка пружины λ, равна изменению высоты ΔH, а угол поворота одного торца относительно другого θ ровна изменению центрального угла $\Delta\psi$, т. е.

$$\lambda = \frac{1}{2}\pi D^2 i(\Delta\omega - \Delta\chi tg\alpha)\,, \quad (15)$$

$$\theta = \pi Di(\Delta\chi - \Delta\omega tg\alpha)\,. \quad (16)$$

В этих формулах изменение кручения и кривизны витка пружины в упругой стадии её работы определяются законом Гука, т. е.

$$\Delta\omega = \frac{Мкр}{C}, \quad \Delta\chi = \frac{Миз}{B}, \quad (17)$$

где $C = GJ_{кр}$, $B = EJ_{из}$ - жесткость проволоки на кручение и изгиб, $J_{кр} = J_{\rho}$ - полярный момент инерции, $J_{из} = J_b$ - осевой момент инерции сечения относительно бинормали $\bar{b}$.

В случае малых перемещений в процессе деформирования пружины α и D меняются незначительно. Пренебрегая изменениями этих величин получаем **<u>линейную теорию</u>** расчета пружин. Рассмотрим этот случай. Пусть $\alpha = \alpha_0$ и, $D = D_0$, где α_0 и D_0 начальные значения этих величин. Тогда подставляя (17) в равенства (15) и (16), с учетом (7) и (8) имеем:

$$\lambda = \frac{\pi D_0^2 i_0}{4B\cos\alpha_0}\left[PD_0\left(\frac{B}{C}\cos^2\alpha_0 + \sin^2\alpha_0\right) + m\left(\frac{B}{C} - 1\right)\sin 2\alpha_0\right], \quad (18)$$

$$\theta = \frac{\pi D i_0}{B\cos\alpha_0}\left[\frac{PD_0}{4}\left(\frac{B}{C} - 1\right)\sin 2\alpha_0 + m\left(\frac{B}{C}\sin^2\alpha_0 + \cos^2\alpha_0\right)\right]. \quad (19)$$

Здесь i_0 - начальное количество витков.

Рассмотрим разные случаи закрепления концов.

1. Свободное крепление концов ($m = 0$). Тогда перемещения будут равны

$$\lambda = \frac{\pi D_0^3 i_0 P}{4C\cos\alpha_0}\left[\left(\cos^2\alpha_0 + \frac{C}{B}\sin^2\alpha_0\right)\right], (20)$$

$$\theta = \frac{\pi D_0^2 i_0 P}{B\cos\alpha_0}\left[\left(\frac{B}{C} - 1\right)\sin 2\alpha_0\right]. \quad (21)$$

2. Защемление. В этом случае $\theta = 0$, и из (19) получаем

$$m = -\frac{PD}{4}\frac{\left(\frac{B}{C} - 1\right)\sin 2\alpha_0}{\frac{B}{C}\sin^2\alpha_0 + \cos^2\alpha_0}. \quad (22)$$

Подставляя это значение m в формулу (18) для осевого перемещения λ получаем следующее выражение

$$\lambda = \frac{\pi D_0^3 i_0 P}{4C\cos\alpha_0}\frac{1}{\frac{B}{C}\sin^2\alpha_0 + \cos^2\alpha_0}. \quad (23)$$

Рассмотрим частный случай, когда $\alpha_0 = 0$, тогда формулы (20) и (23) дают одинаковый “сопроматовский” результат, т. е.

$$\lambda = \frac{\pi D_0^3 i_0 P}{4C}. \quad (24)$$

Теперь рассмотрим **<u>нелинейный случай</u>**. В этом случае уравнение равновесия составляются для деформированного состояния пружины.

Перемещения определяются на основании формул (3) и (4) следующими формулами:

$$\lambda = H - H_0 = l(\sin\alpha - \sin\alpha_0), \quad (25)$$

$$\theta = \psi - \psi \;\; = 2l\left(\frac{\cos\alpha}{D} - \frac{\cos\alpha_0}{D_0}\right). (26)$$

На основании формул (5) и (6) изменения кривизны и кручения равны

$$\Delta\chi = \chi - \chi_0 = \frac{2\cos^2\alpha}{D} - \frac{2\cos^2\alpha_0}{D_0}, \quad (27)$$

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \frac{\sin 2\alpha}{D} - \frac{\sin 2\alpha_0}{D_0}. \quad (28)$$

Учитывая формулу (17) и подставляя значения $M_{из}$ и $M_{кр}$ по формулам (7) и (8) имеем:

$$\left.\begin{aligned} 2B\left(\frac{\cos^2\alpha}{D} - \frac{\cos^2\alpha_0}{D_0}\right) &= -\frac{PD}{2}\sin\alpha + m\cos\alpha \\ C\left(\frac{\sin 2\alpha}{D} - \frac{\sin 2\alpha_0}{D_0}\right) &= \frac{PD}{2}\cos\alpha + m\sin\alpha \end{aligned}\right\}. \quad (29)$$

Решая последнее уравнение относительно α и D и подставляя их значения в формулы (25) и (26) можно найти, как угловые, так и линейные перемещения пружины [4,5,6].

Рассмотрим два частных случая закрепления концов.

1. Свободное крепление (m=0). В этом случае разрешая уравнения (29) относительно величин P и D получаем

характеристики пружины в следующей параметрической форме:

$$P=\frac{4B}{D_0^2}\sin(\alpha-\alpha_0)\frac{\cos^2\alpha_0}{\cos\alpha}\frac{\frac{B}{C}\cos\alpha\cos\alpha_0+\sin\alpha\sin\alpha_0}{\left(\frac{B}{C}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2}, \qquad (30)$$

$$D=D_0\frac{\frac{2B}{C}\cos^3\alpha+\sin\alpha\sin 2\alpha}{\frac{2B}{C}\cos\alpha\cos^2\alpha_0+\sin\alpha\sin 2\alpha_0}, \qquad (31)$$

$$\theta=\frac{\pi D_0 i_0}{\cos\alpha_0}\left(\frac{\cos\alpha}{D}-\frac{\cos\alpha_0}{D_0}\right). \qquad (32)$$

2. Защемление относительно поворота торцов пружины (θ = 0). В данном случае характеристики пружины в параметрической форме, с учетом формул(26) и (29) даются следующими выражениями

$$P=\frac{4C\cos^2\alpha_0}{D_0^2}\left[(\sin\alpha-\sin\alpha_0)-\frac{B}{C}\sin\alpha\left(1-\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha}\right)\right], \qquad (33)$$

$$D=D_0\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha}, \qquad (34)$$

$$m=\frac{2}{D_0}\left[B\cos\alpha\cos\alpha_0(\cos\alpha-\cos\alpha_0)+C\cos\alpha_0\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\alpha_0)\right]. \qquad (35)$$

В обоих рассмотренных выше случаях осадка пружины определяется по формуле

$$\lambda=\frac{\pi D_0 i_0}{\cos\alpha_0}(\sin\alpha-\sin\alpha_0). \qquad (36)$$

В формулах (30-36) параметром характеризующим систему выступает угол подъема пружины α. Таким образом, задавшись углом $\alpha > \alpha_0$, можно определить все необходимые параметры пружины и действующие на него нагрузки.

О напряжениях. Если учитывать только два основных силовых фактора действующих в поперечном сечении прутка: изгибающий и крутящий момент, то максимальные нормальные и касательные напряжения определяются по следующим формулам:

$$\sigma_{мах}=\frac{M_{из}}{W_{из}},$$

$$\tau_{мах}=\frac{M_{кр}}{W_{кр}}, \qquad (37)$$

где $W_{из}$, $W_{кр}=W_\rho$ - моменты сопротивления изгибу и кручению. Для прутка диаметром d,

$$W_{из}=\frac{\pi d^3}{32},$$

$$W_{кр}=2W_{из}. \qquad (38)$$

Крутящий и изгибающий момент действующий в сечении прутка определяется по формулам (7) и (8). Рассмотрим случай, когда m=0 (свободное растяжение пружины). Тогда

$$Mкр=\frac{PD}{2}\cos\alpha,$$

$$Миз=-\frac{PD}{2}\sin\alpha. \qquad (39)$$

С учетом формулы (38) и (39) получаем следующие значения для напряжений*

$$\sigma_{из}^{\max}=\frac{16PD}{\pi d^3}\sin\alpha,$$

$$\tau_{кр}^{\max}=\frac{8PD}{\pi d^3}\cos\alpha. \qquad (40)$$

Из последних формул получаем

$$\frac{\tau_{кр}^{\max}}{\sigma_{из}^{\max}}=\frac{ctg\alpha}{2} \qquad (41)$$

Последняя формула дает возможность сравнения и оценки максимальных нормальных и касательных напряжений при работе цилиндрических пружин растяжения.

Отметим, что напряжения в формуле (40) определяются через параметр α, после задания которого нагрузка и диаметр пружины вычисляются по формулам (30) и (31).

Для получения графических характеристик пружины нами произведен расчет цилиндрической пружины изготовленной из материала обладающего эффектом памяти формы и имеющего следующие параметры. Модуль продольной упругости $E=8{,}5\cdot10^3$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu=0{,}35$, диаметр пружины $D_0=9\cdot10^{-3}$ м. Для рассматриваемой пружины количество витков $i_0=10$, угол подъема $\alpha_0=1{,}54$; 3; 7 и 10^o.

- В формуле для нормальных напряжений опущен знак “минус”, т.к. она влияет только на определение местоположения опасной точки в сечении прутка.

На рис. 2, 3 и 4 даны величины осадки (λ), изменения диаметра(ΔD) и угла подъема α пружины в зависимости от растягивающей силы P, посчитанные по формулам (30), (31) и (36), т.е.для случая свободного крепления. На всех графиках кривым 1,2,3 и 4 соответствуют начальные углы подъёма 1,51; 3; 7 и 10^o.

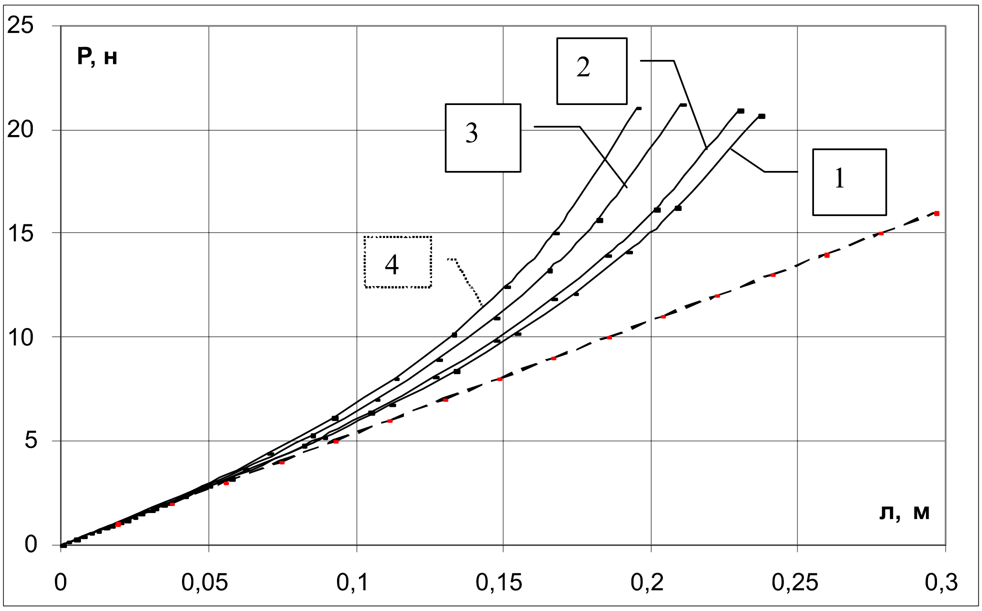

Рис. 2. Зависимость Р от λ. Пунктирная линия соответствует расчету по линейной теории для α_o=1,54^o.

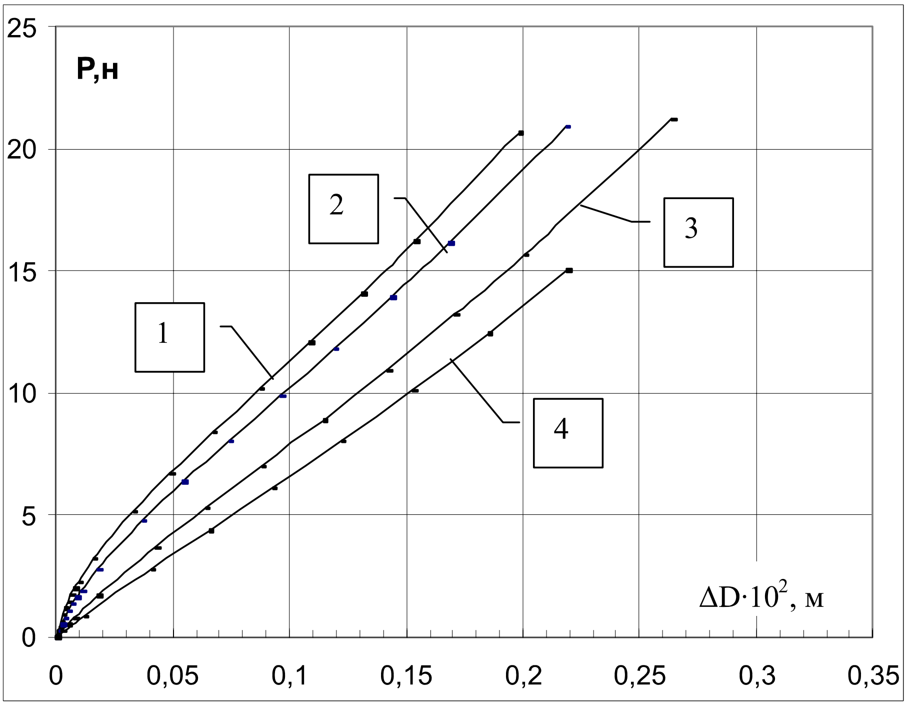

Рис. 3. Зависимость *P* от *ΔD*.

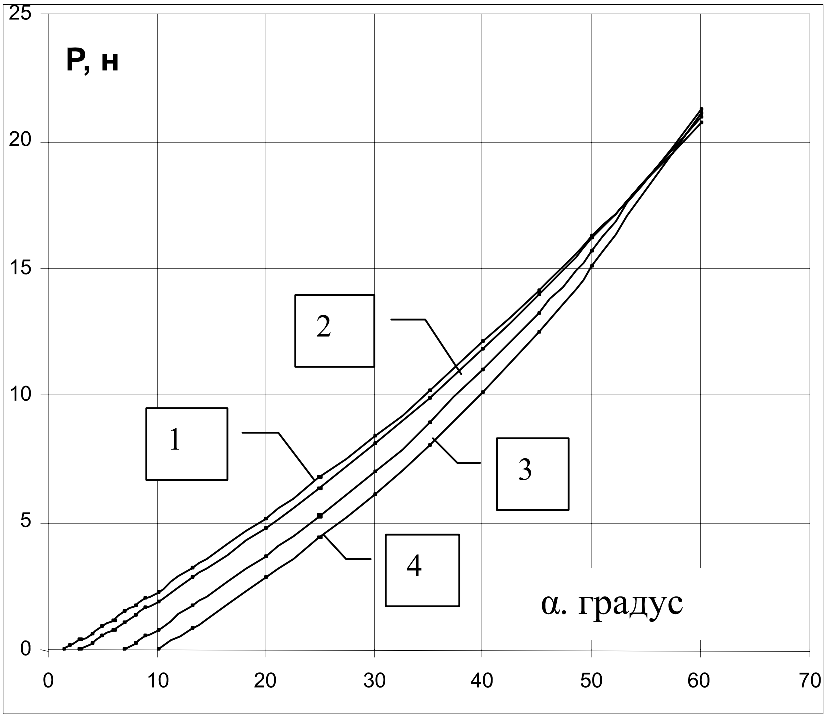

Рис. 4. Зависимость P от угла α.

Как видно из этих графиков при больших перемещениях пружин эти зависимости имеют нелинейный характер.

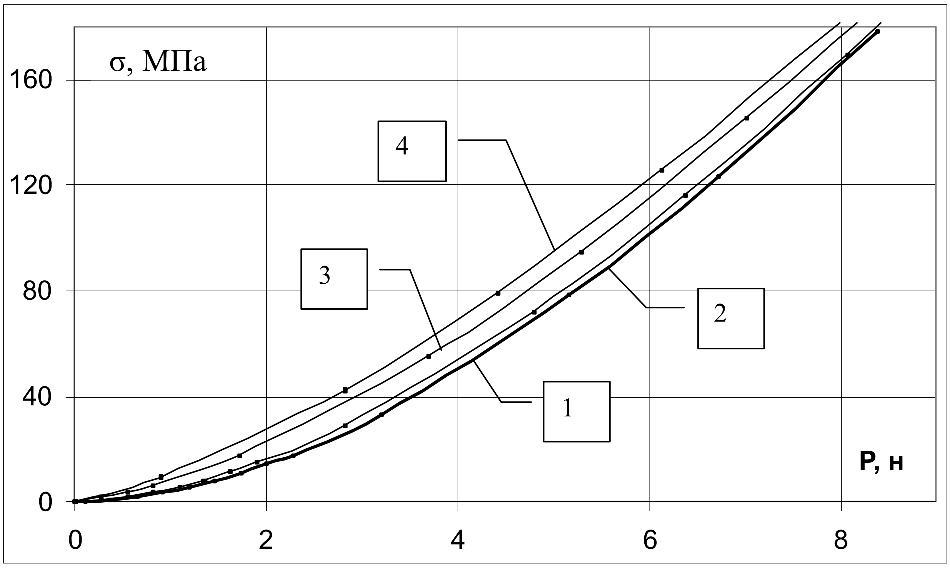

Рис. 5. Зависимость σ от P.

Графики зависимостей максимальных напряжений от растягивающей нагрузки даны на рис. 5, 6 для различных углов подъема пружин.

Как видно, эти зависимости имеют нелинейный характер.

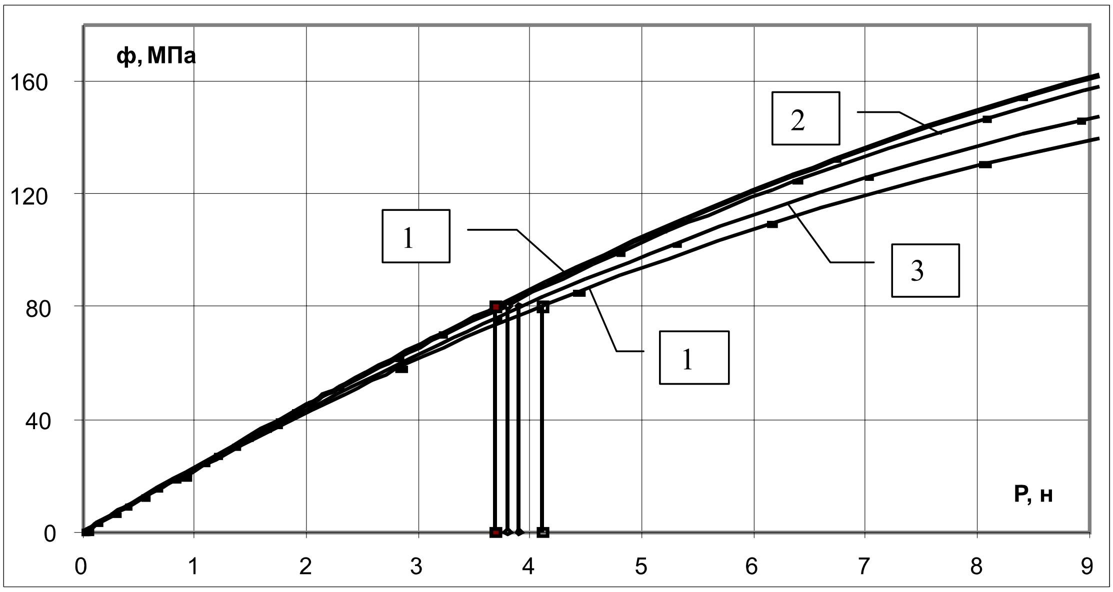

Рис. 6.

Зависимость τ от Р.

Причем в начале нагружения максимальные касательные напряжения намного больше максимальных нормальных напряжений. Их величины можно оценить с помощью формул (41). Используя рис. 6, можно из графика определить предельную нагрузку, после которой появляются неупругие деформации. Условием её определения является равенство

$$\tau^{\max} = \tau_{\phi T},$$

где $\tau_{\phi T}$ - предел фазовой текучести материала на сдвиг. Как указано в экспериментальных исследованиях [2,7,8], для рассматриваемого нами материала можно принять $\tau_{\phi T}$=80мПа. Проведя на рис. 6 горизонтальную линию на этом уровне получаем значения предельных нагрузок $P_{\text{фт}}$ для пружин с различным углом подъема. Для пружин с углом подъема 1.54, 3, 7 и 10^{o} они соответственно равны: 3.69, 3.8, 3.9 и 4.11 Н.

Литература

1. Абдрахманов С.А. Деформация материалов с памятью формы при термосиловом воздействии. – Бишкек: Илим, 1991. – 116 с.
2. Лихачев В.А. и др. Эффект памяти формы. –Л.: Из-во ЛГУ, 1987. - 216 с.
3. Материалы с эффектом памяти формы. Т.4 Справочное издание под общей ред. В.А. Лихачева. - Санкт-Петербург, 1998. - 268с. 4.1.
4. Понамрев С.Д. и др. Расчет на прочность в машиностроении, Т-1. - М.: Машгиз, 1956. - 881 с.
5. Понамрев С.Д., Андреева Л.Е. Расчет упругих элементов машин и приборов. - М.: Машиностроение,1980. - 323 с.
6. Чернышев Н.А. Напряженное состояние и деформация цилиндрических пружин, свитых из круглого прутка. – в кн. Динамика и прочность машин. - М.: АН СССР, 1950. - С. 7-78.
7. Мартенситная деформация никелида титана. /Паскаль Ю.И., Ерофеев В.Я., Монасевич Л.А. и др.// Изв. Вузов, Физика, 1982, №6. - С. 103-117.
8. Ооцука К., Симудзу К., Судзуки Ю. Сплавы сэффектом памяти формы Под ред. Фунакуба Х. Пер. с японск. – М.: Металлургия, 1990. -224 с.