УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

ТЮРЕХОДЖАЕВ А.Н., РЫСТЫГУЛОВА В.Б.
E-mail: Tyurekhodja@mail.ru, Rystygulova@mail.ru

Методом частичной дискретизации решена задача об осесимметричном изгибе тонкостенной конической оболочки постоянной толщины.

Рассматривается задача об осесимметричном изгибе тонкостенной конической оболочки постоянной толщины, решение которой приводит к значительным трудностям. Задача решена методом частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений [1].

Задачи о осесимметричной деформации конической оболочки практически применима в машиностроительных конструкциях, судостроениях и строительном деле.

Для осесимметричной деформации конической оболочки постоянной толщины (рис. 1) имеем [2]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2V_0}{ds^2}+\frac{\sin\beta}{\nu}\frac{dV_0}{ds}-\frac{\sin^2\beta}{\nu^2}V_0-\Psi_0\frac{\cos\beta}{b\nu}=\frac{1}{b\nu}\left[\mu\frac{d\Phi_1}{ds}+\frac{\sin\beta}{\nu}\Phi_1\right],\\ &\frac{d^2\Psi_0}{ds^2}+\frac{\sin\beta}{\nu}\frac{d\Psi_0}{ds}-\frac{\sin^2\beta}{\nu^2}\Psi_0+4\gamma^4\frac{\cos\beta}{b\nu}V_0=-\frac{1}{\nu b^2}4\gamma^4\Phi_2,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

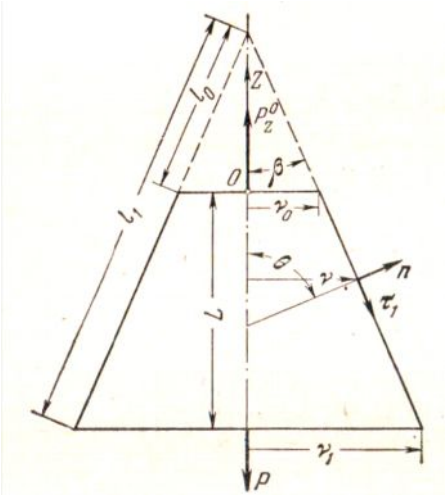

Рис. 1. Коническая оболочка.

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1 &= -\sin\beta\int_0^s \nu q_e ds + \cos\beta\left(\frac{P_z^0}{2\pi} + \int_0^s \nu q_z ds\right),\\ \Phi_2 &= -\cos\beta\int_0^s \nu q_e ds - \sin\beta\left(\frac{P_z^0}{2\pi} + \int_0^s \nu q_z ds\right).\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Здесь V_0 – функция напряжений, Ψ_0 – функция перемещений, q_e – радиальная нагрузка, q_z – осевая нагрузка, P_z^0 – постоянная интегрирования, равная осевому усилию в крайнем сечении θ_0, ν – радиус окружности, которая получается в результате пересечения поверхности плоскостью, перпендикулярной оси вращения, s – элемент длины дуги образующего.

Принимая во внимание, что $ds = \dfrac{d\nu}{\sin\beta}$, $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \theta$, $\nu = z tg\theta$, уравнения (1), (2) можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2V_0}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dV_0}{dz} - \frac{1}{z^2}V_0 - \frac{tg^2\theta}{bz\cos\theta}\Psi_0 = \frac{1}{zb\cos\theta}\left[\mu\frac{d\Phi_1}{dz} + \frac{\Phi_1}{z}\right],\\ &\frac{d^2\Psi_0}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d\Psi_0}{ds} - \frac{1}{z^2}\Psi_0 + 4\gamma^4\frac{tg^2\theta}{zb\cos\theta}V_0 = -\frac{tg\theta}{zb^2\cos^2\theta}4\gamma^4\Phi_2,\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(z) &= -tg^2\theta\int_0^L zq_e dz + \sin\theta\frac{P_z^0}{2\pi} + tg^3\theta\int_0^L zq_z dz,\\ \Phi_2(z) &= -tg^3\theta\int_0^L zq_e dz - \cos\theta\frac{P_z^0}{2\pi} - tg^2\theta\int_0^L zq_z dz.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Здесь L – высота конической оболочки, z – центральная ось конической оболочки.

Дискретизируя третье члены, решая систему уравнений (3), методом частичной дискретизации [2], получим:

$$\begin{aligned}V_0 &= \frac{1}{4}\chi_1 z^2 + \frac{1}{2}\chi_2\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{\ln z_k}{z_k}H(z - z_k) - \frac{\ln z_{k+1}}{z_{k+1}}H(z - z_{k+1})\right] +\\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{1}{z_k}V_0(z_k)\ln\frac{z}{z_k}H(z - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}}V_0(z_{k+1})\ln\frac{z}{z_{k+1}}H(z - z_{k+1})\right] +\\ &+ \frac{1}{2}\chi_3\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\Psi_0(z_k)\ln\frac{z}{z_k}H(z - z_k) - \Psi_0(z_{k+1})\ln\frac{z}{z_{k+1}}H(z - z_{k+1})\right] + C_1\ln z + C_2,\end{aligned} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= \chi_4 z + + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{1}{z_k}\Psi_0(z_k)\ln\frac{z}{z_k}H(z - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}}\Psi_0(z_{k+1})\ln\frac{z}{z_{k+1}}H(z - z_{k+1})\right] +\\ &+ \frac{1}{2}\chi_5\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[V_0(z_k)\ln\frac{z}{z_k}H(z - z_k) - V_0(z_{k+1})\ln\frac{z}{z_{k+1}}H(z - z_{k+1})\right] + B_1\ln z + B_2,\end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned}&\chi_1 = \frac{\mu\, tg^2\theta}{b\cos\theta}\left(-q_e + tg\theta\, q_z\right), \quad \chi_2 = \frac{\Phi_1}{b\cos\theta}, \quad \chi_3 = \frac{tg^2\theta}{b\cos\theta},\\ &\chi_4 = -\frac{4\gamma^4 tg\theta}{b^2\cos^2\theta}\Phi_2, \quad \chi_5 = -\frac{4\gamma^4 tg^2\theta}{b\cos\theta}.\end{aligned} \qquad (6)$$

Примем такие граничные условия:

Если считать что, вершина конической оболочки свободной, то радиальное усилие $H_e = 0$ и меридиональный изгибающий момент $M_1 = 0$ при $z = L$, а нижний край конической оболочки заделан, то радиальное перемещение $\Delta_e = 0$ и угол поворота $\vartheta_1 = 0$ при $z = 0$.

Здесь

$$H_e = \frac{V_0 \alpha^2 b}{z tg\theta} + q_e \frac{z}{\sin\theta}, \qquad M_1 = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \mu \frac{\cos\theta}{z tg\theta} \frac{\Psi_0}{Eh_0},$$

$$\Delta_e = \frac{\mu}{Eh}\left[-V_0 \alpha^2 b \cos\theta + q_e z^2 - \sin\theta \frac{P_z^0}{2\pi} - q_z \frac{z^2}{\cos\theta}\right], \qquad \vartheta_1 = \frac{\Psi_0}{Eh_0}, \qquad \alpha = \frac{h(\theta)}{h_0}.$$

Для оболочки постоянной толщины $h(\theta) = h_0 = h, \quad \alpha = 1$. В качестве параметра b можно выбрать радиус крайнего сечения v_1, так что

$$4\gamma^4 = 12(1-\mu^2)\frac{v_1^2}{h^2}, \quad b = v_1.$$

Для тонких оболочек параметр $4\gamma^4$ велик по сравнению с единицей, и это обстоятельство существенно облегчает решение задачи.

При выбранных граничных условиях решение (5) можем записать так

$$\begin{aligned}
V_0 = {} & \frac{L^2 q_e}{b\cos\theta} + \frac{1}{4}\chi_1 (z^2 - L^2) + \frac{1}{2}\chi_2 \sum_{k=1}^{n} (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{\ln z_k}{z_k} H(z - z_k) - \frac{\ln z_{k+1}}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1})\right] - \\
& - \frac{1}{2}\chi_2 \sum_{k=1}^{n} (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{\ln z_k}{z_k} H(L - z_k) - \frac{\ln z_{k+1}}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1})\right] + \\
& + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} V_0(z_k) \ln\frac{z}{z_k} H(z - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} V_0(z_{k+1}) \ln\frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1})\right] - \\
& - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} V_0(z_k) \ln\frac{L}{z_k} H(L - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} V_0(z_{k+1}) \ln\frac{L}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1})\right] + \\
& + \frac{1}{2}\chi_3 \sum_{k=1}^{n} (z_k + z_{k+1}) \left[\Psi_0(z_k) \ln\frac{z}{z_k} H(z - z_k) - \Psi_0(z_{k+1}) \ln\frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1})\right] + \\
& - \frac{1}{2}\chi_3 \sum_{k=1}^{n} (z_k + z_{k+1}) \left[\Psi_0(z_k) \ln\frac{L}{z_k} H(L - z_k) - \Psi_0(z_{k+1}) \ln\frac{L}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1})\right],
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_0 = {} & \chi_4 (z - L) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} \Psi_0(z_k) \ln\frac{z}{z_k} H(z - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} \Psi_0(z_{k+1}) \ln\frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1})\right] - \\
& - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (z_k + z_{k+1}) \left[\frac{1}{z_k} \Psi_0(z_k) \ln\frac{L}{z_k} H(L - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}} \Psi_0(z_{k+1}) \ln\frac{L}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1})\right] + \\
& + \frac{1}{2}\chi_5 \sum_{k=1}^{n} (z_k + z_{k+1}) \left[V_0(z_k) \ln\frac{z}{z_k} H(z - z_k) - V_0(z_{k+1}) \ln\frac{z}{z_{k+1}} H(z - z_{k+1})\right] - \\
& - \frac{1}{2}\chi_5 \sum_{k=1}^{n} (z_k + z_{k+1}) \left[V_0(z_k) \ln\frac{L}{z_k} H(L - z_k) - V_0(z_{k+1}) \ln\frac{L}{z_{k+1}} H(L - z_{k+1})\right].
\end{aligned}$$

Усилия и изгибающие моменты выражаются через функции $V_0, \quad \Psi_0$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{ztg\theta}\left[V_0 b\cos\theta + \Phi_1(z)\right], \\
N_1 &= \frac{1}{ztg\theta}\left[V_0 b\sin\theta + \Phi_2(z)\right], \\
M_1 &= -\frac{h^2}{12(1-\mu^2)}\frac{\cos\theta}{tg\theta}\left(\frac{d\Psi_0}{dz} + \mu\frac{\Psi_0}{z}\right), \\
M_2 &= -\frac{h^2}{12(1-\mu^2)}\frac{\cos\theta}{tg\theta}\left(\frac{\Psi_0}{z} + \mu\frac{d\Psi_0}{dz}\right).
\end{aligned}
\qquad T_2 = \frac{b\cos\theta}{tg\theta}\frac{dV_0}{dz}, \tag{7}
$$

Подробно расписывая все усилия и изгибающие моменты, получим

$$
\begin{aligned}
T_1 = \frac{1}{ztg\theta}\Bigg\{ & L^2 q_e + \frac{b\cos\theta}{4}\chi_1(z^2 - L^2) + \frac{b\cos\theta}{2}\chi_2\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{\ln z_k}{z_k}H(z - z_k) - \right. \\
& \left. - \frac{\ln z_{k+1}}{z_{k+1}}H(z - z_{k+1})\right] - \frac{b\cos\theta}{2}\chi_2\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{\ln z_k}{z_k}H(L - z_k) - \frac{\ln z_{k+1}}{z_{k+1}}H(L - z_{k+1})\right] + \\
& + \frac{b\cos\theta}{2}\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{1}{z_k}V_0(z_k)\ln\frac{z}{z_k}H(z - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}}V_0(z_{k+1})\ln\frac{z}{z_{k+1}}H(z - z_{k+1})\right] - \\
& - \frac{b\cos\theta}{2}\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{1}{z_k}V_0(z_k)\ln\frac{L}{z_k}H(L - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}}V_0(z_{k+1})\ln\frac{L}{z_{k+1}}H(L - z_{k+1})\right] + \\
& + \frac{b\cos\theta}{2}\chi_3\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\Psi_0(z_k)\ln\frac{z}{z_k}H(z - z_k) - \Psi_0(z_{k+1})\ln\frac{z}{z_{k+1}}H(z - z_{k+1})\right] + \\
& - \frac{b\cos\theta}{2}\chi_3\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\Psi_0(z_k)\ln\frac{L}{z_k}H(L - z_k) - \Psi_0(z_{k+1})\ln\frac{L}{z_{k+1}}H(L - z_{k+1})\right] + \\
& - tg^2\theta\frac{L^2}{2}q_e + \sin\theta\frac{P_z^0}{2\pi} + tg^3\theta\frac{L^2}{2}q_z\Bigg\},
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
N_1 = \frac{1}{ztg\theta}\Bigg\{ & L^2 q_e + \frac{b\cos\theta}{4}\chi_1(z^2 - L^2) + \frac{b\cos\theta}{2}\chi_2\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{\ln z_k}{z_k}H(z - z_k) - \right. \\
& \left. - \frac{\ln z_{k+1}}{z_{k+1}}H(z - z_{k+1})\right] - \frac{b\cos\theta}{2}\chi_2\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{\ln z_k}{z_k}H(L - z_k) - \frac{\ln z_{k+1}}{z_{k+1}}H(L - z_{k+1})\right] + \\
& + \frac{b\cos\theta}{2}\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{1}{z_k}V_0(z_k)\ln\frac{z}{z_k}H(z - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}}V_0(z_{k+1})\ln\frac{z}{z_{k+1}}H(z - z_{k+1})\right] - \\
& - \frac{b\cos\theta}{2}\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{1}{z_k}V_0(z_k)\ln\frac{L}{z_k}H(L - z_k) - \frac{1}{z_{k+1}}V_0(z_{k+1})\ln\frac{L}{z_{k+1}}H(L - z_{k+1})\right] + \\
& + \frac{b\cos\theta}{2}\chi_3\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\Psi_0(z_k)\ln\frac{z}{z_k}H(z - z_k) - \Psi_0(z_{k+1})\ln\frac{z}{z_{k+1}}H(z - z_{k+1})\right] + \\
& - \frac{b\cos\theta}{2}\chi_3\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\Psi_0(z_k)\ln\frac{L}{z_k}H(L - z_k) - \Psi_0(z_{k+1})\ln\frac{L}{z_{k+1}}H(L - z_{k+1})\right] + \\
& - tg^3\theta\frac{L^2}{2}q_e - \cos\theta\frac{P_z^0}{2\pi} - tg^2\theta\frac{L^2}{2}q_z\Bigg\},
\end{aligned} \tag{9}
$$

$$T_2 = \frac{b\cos\theta}{tg\theta}\left\{\frac{1}{2}\chi_1 z + \frac{1}{2}\chi_2 \frac{\ln z_k}{z_k} + \right.$$
$$+\frac{1}{2z}\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{1}{z_k}V_0(z_k)H(z-z_k) - \frac{1}{z_{k+1}}V_0(z_{k+1})H(z-z_{k+1})\right] + \tag{10}$$
$$\left. +\frac{1}{2z}\chi_3\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\Psi_0(z_k)H(z-z_k) - \Psi_0(z_{k+1})H(z-z_{k+1}) - \right]\right\},$$

$$M_1 = -\frac{h^2}{12(1-\mu^2)}\frac{\cos\theta}{tg\theta}\left\{\chi_4 + \frac{\mu}{z}\chi_4(z-L) + \right.$$
$$+\frac{1}{2z}\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{1}{z_k}\Psi_0(z_k)H(z-z_k) - \frac{1}{z_{k+1}}\Psi_0(z_{k+1})H(z-z_{k+1})\right] +$$
$$+\frac{1}{2z}\chi_5\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[V_0(z_k)H(z-z_k) - V_0(z_{k+1})H(z-z_{k+1}) - \right] +$$
$$+\frac{\mu}{2z}\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{1}{z_k}\Psi_0(z_k)\ln\frac{z}{z_k}H(z-z_k) - \frac{1}{z_{k+1}}\Psi_0(z_{k+1})\ln\frac{z}{z_{k+1}}H(z-z_{k+1})\right] -$$
$$-\frac{\mu}{2z}\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{1}{z_k}\Psi_0(z_k)\ln\frac{L}{z_k}H(L-z_k) - \frac{1}{z_{k+1}}\Psi_0(z_{k+1})\ln\frac{L}{z_{k+1}}H(L-z_{k+1})\right] + \tag{11}$$
$$+\frac{\mu}{2z}\chi_5\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[V_0(z_k)\ln\frac{z}{z_k}H(z-z_k) - V_0(z_{k+1})\ln\frac{z}{z_{k+1}}H(z-z_{k+1})\right] -$$
$$\left. -\frac{\mu}{2z}\chi_5\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[V_0(z_k)\ln\frac{L}{z_k}H(L-z_k) - V_0(z_{k+1})\ln\frac{L}{z_{k+1}}H(L-z_{k+1})\right]\right\},$$

$$M_2 = -\frac{h^2}{12(1-\mu^2)}\frac{\cos\theta}{tg\theta}\left\{\frac{\chi_4}{z}(z-L) + \mu\chi_4 + \right.$$
$$+\frac{1}{2z}\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{1}{z_k}\Psi_0(z_k)\ln\frac{z}{z_k}H(z-z_k) - \frac{1}{z_{k+1}}\Psi_0(z_{k+1})\ln\frac{z}{z_{k+1}}H(z-z_{k+1})\right] - \tag{12}$$
$$-\frac{1}{2z}\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{1}{z_k}\Psi_0(z_k)\ln\frac{L}{z_k}H(L-z_k) - \frac{1}{z_{k+1}}\Psi_0(z_{k+1})\ln\frac{L}{z_{k+1}}H(L-z_{k+1})\right] +$$
$$+\frac{1}{2z}\chi_5\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[V_0(z_k)\ln\frac{z}{z_k}H(z-z_k) - V_0(z_{k+1})\ln\frac{z}{z_{k+1}}H(z-z_{k+1})\right] -$$
$$-\frac{1}{2z}\chi_5\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[V_0(z_k)\ln\frac{L}{z_k}H(L-z_k) - V_0(z_{k+1})\ln\frac{L}{z_{k+1}}H(L-z_{k+1})\right] +$$
$$+\frac{\mu}{2z}\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[\frac{1}{z_k}\Psi_0(z_k)H(z-z_k) - \frac{1}{z_{k+1}}\Psi_0(z_{k+1})H(z-z_{k+1})\right] +$$
$$\left. +\frac{\mu}{2z}\chi_5\sum_{k=1}^{n}(z_k + z_{k+1})\left[V_0(z_k)H(z-z_k) - V_0(z_{k+1})H(z-z_{k+1}) - \right]\right\}.$$

Решение таких задач ранее рассматривались В.С. Черниной [2] введя функцию σ в комплексной форме заменяя два уравнения относительно V_0 и Ψ_0 одним уравнением второго порядка относительно комплексной функции σ. Решение в работе [2] находится приближенным методом. В отличие от подходов этих авторов методом частичной дискретизации [1] получено аналитическое решение задачи.

Литература

1. Тюреходжаев А.Н., Кырыкбаев Б.Ж., Рыстыгулова В.Б., Карибаева Г.А. Деформирование неоднородных пластин и оболочек // Международная конференция «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященная 100-летию со дня рождения академика И.Н.Векуа. - Новосибирск, 28 мая – 2 июня 2007 г. ISBN 978-5-94356-515 - 1, 2 стр.
2. Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1968. - 456 с.