

КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра механики

Б.А. Рычков, И.В. Гончарова

**ОБРАБОТКА ДИАГРАММ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ
КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ
МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
СТАТИСТИКИ**

Методическое пособие

Бишкек 2008

Рецензент докт. техн. наук, проф. *Б. Жумабаев*

Печатается по решению кафедры механики и РИСО КРСУ

Рычков Б.А., Гончарова И.В.

ОБРАБОТКА ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ: Методическое пособие. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2008. – 32 с.

Пособие нацелено на овладение студентами основами математической статистики применительно к обработке результатов механических испытаний образцов конструкционных материалов при различных видах нагружения.

Предназначено для студентов старших курсов по специальности «динамика и прочность машин».

© КРСУ, 2008

«Техник, применяя математику к практическим вопросам, сам должен заботиться, чтобы она служила подспорьем здравому смыслу; он должен помнить, что вычисление можно произвести сколь угодно точно, но результат вычисления не может быть точнее тех данных и тех предположений, на коих оно основано, поэтому точность вычисления должна соответствовать точности данных и той практической потребности, для которой оно производится».

Академик А.Н. Крылов

ВВЕДЕНИЕ

Всякое измерение чего бы то ни было и чем бы измерение ни производилось, всегда включает некоторую погрешность. Понятно, что чем эта погрешность меньше, тем измерение **точнее**, но практика всех измерений показывает, что избежать погрешностей **невозможно**. Это обнаруживается тем, что при повторении несколько раз тем же самым прибором того же измерения получаются результаты, разнящиеся между собой. По величине этих разностей можно уже иметь общее суждение о точности измерения и о точности результата, но чтобы сделать это суждение объективным, надо, чтобы оно производилось по определенным правилам и выражалось числами [2].

Указанные правила предоставляет математическая статистика. Основными задачами статистической обработки результатов эксперимента являются: определение наиболее достоверного значения измеряемой величины и погрешности этого значения по нескольким измерениям, оценка достоверности различия двух близких величин, установление достоверной функциональной зависимости между двумя величинами и аппроксимация этой зависимости.

ТИПЫ ОШИБОК И ИХ УЧЕТ

Ошибки (погрешности) эксперимента условно разбивают на систематические, случайные и грубые.

Систематические ошибки – это те, которые не меняются при многократном повторении эксперимента. Примерами таких ошибок являются пренебрежение выталкивающим действием воздуха при точном

взвешивании или измерение силы тока гальванометром, нуль которого неправильно установлен. Различают три вида систематических ошибок:

а) Ошибки известной природы, величину которых можно определить; их называют поправками. Так, при точном взвешивании рассчитывают поправку на выталкивающее действие воздуха и прибавляют ее к измеренной величине. Внесение поправок позволяет существенно уменьшить (или даже практически исключить) ошибки такого рода.

Заметим, что иногда расчет поправок бывает самостоятельной сложной математической задачей. Например, некорректно поставленная задача о восстановлении переданного радиосигнала по принятому является, по существу, нахождением поправки на искажение принимающей аппаратуры.

б) Ошибки известного происхождения, но неизвестной величины. К ним относится погрешность измерительных приборов, определяемая их классом точности. Для таких ошибок обычно известна только верхняя граница, а как поправки их учесть нельзя.

в) Ошибки, о существовании которых мы не знаем; например, используется прибор со скрытым дефектом или изношенный, фактическая точность которого существенно хуже, чем обозначено в техническом паспорте.

Для выявления систематических ошибок всех видов обычно заранее отлаживают аппаратуру на эталонных объектах с хорошо известными свойствами.

Случайные ошибки вызываются большим числом факторов, которые при повторении одного и того же эксперимента могут действовать по-разному, причем учесть их влияние практически невозможно. Например, при измерении длины предмета линейка может быть не точно приложена, взгляд наблюдателя может падать не перпендикулярно шкале и т.д.

При многократном повторении эксперимента результат, вследствие случайной ошибки, будет различным. Однако такое повторение и соответствующая статистическая обработка позволяет, во-первых, определить величину случайной ошибки и, во-вторых, уменьшить ее. Повторяя измерение достаточное число раз, можно уменьшить случайную ошибку до требуемой величины (целесообразно уменьшать ее до величины 50–100% от систематической ошибки).

Грубые ошибки – это результат невнимательности наблюдателя, который может записать одну цифру вместо другой. При единичном измерении грубую ошибку не всегда можно распознать. Но если измерение повторено несколько раз, то при статистической обработке выясняются вероятные пределы случайной ошибки. Измерения, существенно вы-

ходящие за полученные пределы, считаются грубо ошибочными и не учитываются при окончательной обработке результатов.

Таким образом, если измерение повторено достаточно много раз, то можно практически исключить грубые и случайные ошибки, так что точность ответа будет определяться только систематической ошибкой. Однако во многих приложениях это требуемое число раз оказывается неприемлемо большим, а при реально осуществимом числе повторений случайная ошибка может быть определяющей.

Приведем еще сводку общих правил [2], которые не потеряли свою актуальность и при осуществлении современных вычислений.

1. О точности результата судят по относительной его погрешности.
2. Точность вычисления должно сообразовать с точностью данных, а точность данных – с той практической потребностью, для которой результат вычисления нужен.
3. При вычислении надо избегать выписывания лишних знаков, ограничивая всегда числа так, чтобы в них все цифры, кроме последней, были верны, и лишь последняя была бы сомнительной.
4. При сложении многих чисел, значительно различающихся по величине, но одинаковой относительной точности, надо написать вперед наибольшее из слагаемых и удерживать в остальных лишь столько цифр после запятой, сколько их в этом наибольшем слагаемом.
5. Логарифмами пользоваться с таким числом знаков, сколько их в числах.
6. Малые разности стараться вычислять непосредственно, не вычисляя самих чисел.
7. Когда надо иметь ряд малоразнящихся значений какой-либо величины, то, вычислив непосредственно одно из них, для получения остальных вычислять «поправки», которые надо присоединять к сказанному значению. При вычислении поправок довольствоваться тем меньшею относительной точностью, чем поправка меньше самой величины.
8. Для всякого вычисления следует предварительно составить схему так, чтобы каждое число писалось в свое место. При составлении схем надо заботиться о том, чтобы при действиях над рядом чисел одно действие не шло бы вперемешку с другими, а, напротив, один однообразный процесс сменялся другим, тоже однообразным, производимым над всеми числами ряда.

В соответствии с приведенными выше объяснениями разницы между погрешностями или ошибками случайными и систематическими, первым, т.е. случайным, приписывают следующие свойства:

- 1) при большом числе испытаний, число погрешностей положительных и отрицательных одинаково, точнее говоря, одинаково часто

происходят равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку погрешности;

- 2) частота появления малых погрешностей больше, нежели частота появлений больших в той же серии испытаний.

Вообще говоря, случайные ошибки измерений могут иметь различные законы распределения. Однако, практически в подавляющем большинстве случаев принимается, что случайная ошибка распределена по нормальному закону. Это обстоятельство, может быть строго доказано, если принять еще один постулат.

Постулат Гаусса: наиболее вероятным значением искомой является среднее арифметическое наблюдаемых значений.

Теорема: если случайные ошибки удовлетворяют постулату Гаусса, то законом распределения случайных ошибок является нормальный закон. И наоборот: если случайные ошибки распределены по нормальному закону, то наиболее вероятным значением измеряемой величины является среднее арифметическое наблюдаемых значений.

Выражение для плотности распределения ошибок имеет вид:

$$\phi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}. \quad (1)$$

Величина h , входящая в выражение, называется *мерой точности*.

Мера точности связана с дисперсией нормального распределения соотношением:

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}. \quad (2)$$

Необходимо подчеркнуть, что не всегда случайные ошибки распределены по закону Гаусса. В некоторых типах наблюдений (особенно при малом числе измерений) постулат среднего арифметического действительно не выполняется, и в этом случае приходится рассматривать другие законы распределения ошибок. Тем не менее, в подавляющем большинстве случаев принимается, что случайные ошибки распределены именно по нормальному закону.

Предполагая, что случайные ошибки распределены по закону Гаусса, вероятность того, что ошибка не превзойдет по абсолютной величине числа α , т.е. будет заключена между $-\alpha$ и α , равна

$$P_\alpha = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-h^2 x^2} dx$$

или, в силу четности функции стоящей под интегралом:

$$P_\alpha = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-h^2 x^2} dx.$$

Положив в интеграле $hx = t$, представим вероятность P_α в виде

$$P_\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\alpha} e^{-t^2} dt. \quad (3)$$

Функцию

$$\Phi^*(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (4)$$

называют *интегралом ошибок* или *функцией ошибок*

($\Phi^*(x) = 2\Phi(x\sqrt{2})$), где Φ – функция Лапласа).

Введем некоторые характеристики, с которыми приходится встречаться в теории ошибок.

Вероятной ошибкой называется такое положительное число Q , что

$$P_Q = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Если Q означает вероятную ошибку, то из определения следует, что с одинаковой вероятностью ошибка может быть по абсолютной величине больше Q или меньше.

Пользуясь определением, легко подсчитать величину вероятной ошибки, считая, что случайные ошибки распределены по нормальному закону и мера точности h известна:

$$P_\alpha = 2\Phi(hQ\sqrt{2}) = \frac{1}{2}; \quad \Phi(hQ\sqrt{2}) = 0,25.$$

Из таблицы значений функции Φ находим, что $hQ\sqrt{2} = 0,6745$

$$Q = 0,6745\sigma = \frac{0,4769}{h}. \quad (6)$$

Средней ошибкой называется средняя величина абсолютной ошибки, т.е. математическое ожидание абсолютной величины ошибки:

$$\bar{\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon| \cdot \phi(\varepsilon) d\varepsilon = 2 \int_0^{\infty} \varepsilon \cdot \phi(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Если ошибки распределены по нормальному закону, то средняя ошибка равна:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon \cdot e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = -\frac{e^{-h^2 \varepsilon^2}}{h\sqrt{\pi}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \quad (7)$$

Среднюю квадратичную ошибку данного ряда наблюдений называется величина

$$\sigma = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \dots + \varepsilon_n^2}{n}}, \quad (8)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$ – погрешности.

Величина средней квадратичной ошибки связана с мерой точности равенством

$$\sigma = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Отметим роль величины h как характеристики точности измерений. Уже из связи величины h с дисперсией видно, что при больших h почти вся площадь под кривой $\phi(x)$ сосредоточена вблизи оси Oy , т.е. вероятность малых ошибок весьма велика, а вероятность больших ошибок весьма мала. Чем меньше h , тем больше дисперсия, т.е. тем больше рассеяние ошибок. Формулы для вероятной, средней, средней квадратичной ошибок показывают, что эти ошибки обратно пропорциональны мере точности h .

Таким образом, знание меры точности позволяет определить вероятную, среднюю и среднюю квадратичную ошибки и дает возможность оценить надежность произведенных измерений. Будем полагать, что все измерения произведены с одинаковой тщательностью, т.е. являются равноточными, и что случайные ошибки распределены по закону Гаусса. Можно показать, что: *наивероятнейшим значением, которое можно получить из ряда измерений одинаковой точности, является такое значение, для которого сумма квадратов разностей этого значения и результатов измерений является наименьшей*. Это положение называется *принципом наименьших квадратов*.

Если случайные ошибки распределены по закону Гаусса, то наиболее вероятным значением x измеряемой величины является среднее арифметическое наблюдаемых значений:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (9)$$

Наиболее вероятным значением меры точности h , которое обычно принимают за истинное значение h , является

$$h = \frac{1}{\sqrt{2 \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}}.$$

Зная величину меры точности, можно теперь определить величины вероятной, средней и средней квадратичной ошибок. Так для средней квадратичной ошибки получим:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}. \quad (10)$$

Этой формулой обычно пользуются для определения средней квадратичной ошибки.

Во многих случаях искомый результат находится не непосредственными измерениями, а измеренная величина вводится в какую-нибудь формулу, по которой искомая затем вычисляется. Пусть искомая величина есть z , величина, непосредственно измеренная, есть x , зависимость между z и x :

$$z = f(x).$$

Пусть истинная величина x есть $x = a$, а средняя квадратичная ошибка величин x есть σ , тогда средняя квадратичная ошибка величины z находится по формуле:

$$\sigma_z = \sigma \cdot f'(a). \quad (11)$$

Простейший случай этой формулы: если

$$z = Ax + B \quad (\text{где } A, B - \text{постоянные}),$$

то средняя квадратичная ошибка величины z будет

$$\sigma_z = A\sigma.$$

Положим теперь, что искомая величина z получается как функция двух переменных x и y , каждая из которых определяется отдельно по самостоятельным наблюдениям, независимо одна от другой. Если средняя квадратичная ошибка величины x есть σ_x , а величины y — σ_y , то средняя квадратичная ошибка величины z , определяемой уравнением

$$z = Ax + By,$$

находится по формуле:

$$\sigma_z = \sqrt{A^2 \sigma_x^2 + B^2 \sigma_y^2}. \quad (12)$$

В общем случае для величины

$$z = Ax + By + \dots + F\omega,$$

средняя квадратичная ошибка будет:

$$\sigma_z = \sqrt{A^2 \sigma_x^2 + B^2 \sigma_y^2 + \dots + F^2 \sigma_\omega^2}. \quad (13)$$

СОСТАВЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мы рассмотрели тот случай, когда искомая величина одна и когда она определяется из непосредственных наблюдений; более общий и часто встречающийся случай такой: имеется n неизвестных величин:

$$x, y, z, \dots w,$$

для определения которых каждое наблюдение доставляет уравнение вида

$$F(x, y, z, \dots w) = A + \alpha; \quad (14)$$

так что если произведено k наблюдений, то получается k уравнений:

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z, \dots w) &= N_1 = A_1 + \alpha_1, \\ F_2(x, y, z, \dots w) &= N_2 = A_2 + \alpha_2, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\dots \dots \dots F_k(x, y, z, \dots w) = N_k = A_k + \alpha_k,$$

причем $F_1, F_2, \dots F_k$ будут вполне определенные функции, $N_1, N_2, \dots N_k$ — величины, даваемые наблюдениями, $A_1, A_2, \dots A_k$ — некоторые постоянные, о которых будет сказано ниже, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$ — малые поправки к ним.

Если число наблюдений k равно числу неизвестных n , то из уравнений (15) получаются значения этих неизвестных, в точности этим уравнениям удовлетворяющие, но тогда судить о величине ошибок наблюдений нельзя, поэтому делают так, чтобы число k наблюдений, а значит и число уравнений (15) было значительно больше числа n неизвестных.

Если возьмем в системе (15) n уравнений, определяем из них значения неизвестных $x, y, z, \dots w$, которые для простоты дальнейших вычислений округляем, так что они будут представлять приближенные значения этих неизвестных; обозначаем эти значения через

$$x_0, y_0, z_0, \dots w_0.$$

Подставляем эти величины в первые части уравнений (15) и вычисляем значения:

$$\begin{aligned} F_1(x_0, y_0, z_0, \dots, w_0) &= A_1, \\ F_2(x_0, y_0, z_0, \dots, w_0) &= A_2, \\ &\dots\dots\dots \\ F_k(x_0, y_0, z_0, \dots, w_0) &= A_k. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда

$$\alpha_1 = N_1 - A_1, \quad \alpha_2 = N_2 - A_2, \quad \dots \quad \alpha_k = N_k - A_k,$$

причем только величины α подвержены погрешностям наблюдений, вместе с тем эти величины будут малые.

Так как величины $x_0, y_0, z_0, \dots, w_0$ уравнениям (15) удовлетворяют лишь приближенно, то, чтобы получить более точные значения, полагаем:

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta, \quad \dots \quad w = w_0 + \omega,$$

причем $\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega$ – те поправки, которые надо присоединить к значениям $x_0, y_0, z_0, \dots, w_0$. Эти поправки предполагаются настолько малыми, что, при разложении функций

$$F_i(x_0 + \xi, y_0 + \eta, \dots, w_0 + \omega) \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

в ряд Тейлора, можно ограничиться лишь первыми степенями величин $\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega$ так, что будет

$$\begin{aligned} F_i(x_0 + \xi, y_0 + \eta, \dots, w_0 + \omega) &= (F_i)_0 + \xi \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \right)_0 + \eta \left(\frac{\partial F_i}{\partial y} \right)_0 + \dots + \omega \left(\frac{\partial F_i}{\partial w} \right)_0 \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, k) \end{aligned}$$

при само собою понятном обозначении, тогда, на основании равенств (16), уравнения (15) заменяются следующими:

$$\xi \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \right)_0 + \eta \left(\frac{\partial F_i}{\partial y} \right)_0 + \dots + \omega \left(\frac{\partial F_i}{\partial w} \right)_0 = \alpha_i,$$

причем величины коэффициентов

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \right)_0, \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial y} \right)_0, \quad \dots \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial w} \right)_0$$

будут известные постоянные, происходящим при наблюдениях погрешностям не подверженные. Обозначая их соответственно через $a_i, b_i, \dots, g_i$ для определения неизвестных $\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega$ будем иметь k линейных уравнений вида:

$$\begin{aligned} a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + \dots + g_1 \omega &= \alpha_1 \\ a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + \dots + g_2 \omega &= \alpha_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_k \xi + b_k \eta + c_k \zeta + \dots + g_k \omega &= \alpha_k \end{aligned} \quad (17)$$

число k которых значительно больше числа неизвестных, и величины $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ доставляются непосредственными наблюдениями.

Возникает вопрос, каким образом сочетать эти уравнения для получения вероятнейших значений наших неизвестных. Примем сначала, что средние ошибки всех величин $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ одинаковы, т.е. что все наблюдения имеют одинаковую степень точности.

Положим, что мы взяли какую-нибудь систему значений

$$\xi = \xi_0, \quad \eta = \eta_0, \quad \dots \quad \omega = \omega_0 \quad (18)$$

и подставили в уравнения (17) и составили разности

$$\begin{aligned} a_1 \xi_0 + b_1 \eta_0 + c_1 \zeta_0 + \dots + g_1 \omega_0 - \alpha_1 &= \varepsilon_1 \\ a_2 \xi_0 + b_2 \eta_0 + c_2 \zeta_0 + \dots + g_2 \omega_0 - \alpha_2 &= \varepsilon_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_k \xi_0 + b_k \eta_0 + c_k \zeta_0 + \dots + g_k \omega_0 - \alpha_k &= \varepsilon_k \end{aligned} \quad (19)$$

то эти разности будут представлять те случайные ошибки, которые должны бы иметь место в наблюдаемых величинах $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ при системе значений (19).

Вероятность совместного появления этих ошибок будет наибольшей, когда сумма $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_k^2$ будет наименьшей.

Отсюда следует, что для разыскания вероятнейших значений неизвестных надо составить выражение:

$$\begin{aligned} V &= (a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + \dots + g_1 \omega - \alpha_1)^2 + (a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + \dots + g_2 \omega - \alpha_2)^2 + \\ &\quad + \dots + (a_k \xi + b_k \eta + c_k \zeta + \dots + g_k \omega - \alpha_k)^2 \end{aligned}$$

и определить неизвестные $\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega$ так, чтобы величина V была наименьшею.

По известному правилу эти значения определяются уравнениями:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial \omega} = 0,$$

которые в развитой форме будут

$$\begin{aligned} a_1(a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + \dots + g_1 \omega) + a_2(a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + \dots + g_2 \omega) + \\ + \dots + a_k(a_k \xi + b_k \eta + c_k \zeta + \dots + g_k \omega) = \sum_i a_i \alpha_i \end{aligned}$$

$$b_1(a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + \dots + g_1\omega) + b_2(a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + \dots + g_2\omega) + \dots + b_k(a_k\xi + b_k\eta + c_k\zeta + \dots + g_k\omega) = \sum b_i\alpha_i \quad (20)$$

$$g_1(a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta+...+g_1\omega)+g_2(a_2\xi+b_2\eta+c_2\zeta+...+g_2\omega)+$$

$$+...+g_k(a_k\xi+b_k\eta+c_k\zeta+...+g_k\omega)=\sum g_i\alpha_i.$$

Уравнения (17) называются условными или основными, уравнения (20) – нормальными. Очевидно, что число нормальных уравнений равно числу неизвестных, каково бы число условных не было.

Формулы (20) выражают следующее *правило составления нормальных уравнений* по данным УСЛОВНЫМ:

Для составления первого нормального уравнения по данным условиям, надо каждое из условных уравнений умножить на коэффициент при первой неизвестной, в этом уравнении стоящий, и все полученные таким образом уравнения сложить.

Для составления второго нормального уравнения надо каждое из условных уравнений умножить на коэффициент при второй неизвестной, в этом уравнении стоящий, и все полученные таким образом уравнения сложить.

Совершенно так же следует поступать и для составления прочих нормальных уравнений.

Таким образом, нормальная система уравнений будет (для простоты опустим значки под знаками сумм):

$$\begin{aligned} \sum a^2 \cdot \xi + \sum ab \cdot \eta + \sum ac \cdot \zeta + \dots + \sum ag \cdot \omega &= \sum a\alpha \\ \sum ba \cdot \xi + \sum b^2 \cdot \eta + \sum bc \cdot \zeta + \dots + \sum bg \cdot \omega &= \sum b\alpha \\ \sum ca \cdot \xi + \sum cb \cdot \eta + \sum c^2 \cdot \zeta + \dots + \sum cg \cdot \omega &= \sum c\alpha \end{aligned} \quad (21)$$

$$\sum ga \cdot \xi + \sum gb \cdot \eta + \sum gc \cdot \zeta + \dots + \sum g^2 \cdot \omega = \sum g\alpha.$$

Очевидно, что суммы

$$\sum ab = \sum ba; \sum ac = \sum ca; \dots \text{и т.д.}$$

Прежде чем объяснить составление схемы для вычислений, покажем, каким образом вычислить средние ошибки неизвестных $\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega$.

Положим, что найденные решением нормальных уравнений величины $\xi, \eta, \zeta, \dots \omega$ подставлены в заданные основные уравнения и вычислены отклонения

$$a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta + \dots + q_i\omega - \alpha_i = v_i \quad (i=1,2,\dots,k).$$

Эти отклонения будут представлять величины погрешностей в наблюдаемых значениях $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, если определенные из нормальных уравнений вероятнейшие значения величин $\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega$ принять за истинные их значения, что мы на время и сделаем, и положим

$$a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta + \dots + q_i\omega - \alpha_i = \varepsilon_i \quad (i=1,2,\dots,k),$$

тогда средняя квадратичная ошибка наблюдаемых величин $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ будет:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_k^2}{k}}. \quad (22)$$

Но так как $\xi, \eta, \zeta, \dots, \omega$ не истинные, а лишь вероятные значения, то полагают, что

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_k^2}{k-n}}. \quad (23)$$

Представим себе, что мы систему нормальных уравнений решали бы по способу множителей, т.е. первое уравнение умножили бы на множитель M_1 , второе – на множитель M_2 и т.д., последнее – на множитель M_n и, сложив полученные уравнения, определили бы множители $M_1, M_2, \dots, M_n$ так, чтобы было

$$\begin{aligned} M_1 \sum a^2 + M_2 \sum ab + M_3 \sum ac + \dots + M_n \sum ag &= 1 \\ M_1 \sum ba + M_2 \sum b^2 + M_3 \sum bc + \dots + M_n \sum bg &= 0 \\ M_1 \sum ca + M_2 \sum cb + M_3 \sum c^2 + \dots + M_n \sum cg &= 0 \\ &\vdots \\ M_1 \sum ga + M_2 \sum gb + M_3 \sum gc + \dots + M_n \sum g^2 &= 0. \end{aligned}$$

Тогда можно доказать, что средняя квадратичная ошибка неизвестной ξ будет

$$\sigma_{\xi} = \varepsilon \sqrt{M_1}. \quad (24)$$

Определяя множители $N_1, N_2, \dots, N_n$ так, чтобы было

$$\begin{aligned} N_1 \sum a^2 + N_2 \sum ab + N_3 \sum ac + \dots + N_n \sum ag &= 0 \\ N_1 \sum ba + N_2 \sum b^2 + N_3 \sum bc + \dots + N_n \sum bg &= 1 \\ N_1 \sum ca + N_2 \sum cb + N_3 \sum c^2 + \dots + N_n \sum cg &= 0 \\ \vdots & \\ N_1 \sum na + N_2 \sum nb + N_3 \sum nc + \dots + N_n \sum n^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$N_1 \sum ga + N_2 \sum gb + N_3 \sum gc + \dots + N_n \sum g^2 = 0 ,$$

мы получим среднюю квадратичную ошибку неизвестной η по формуле

$$\sigma_\eta = \varepsilon \sqrt{N_2} . \quad (25)$$

Аналогично средняя квадратичная ошибка неизвестной ζ – $\sigma_\zeta = \varepsilon \sqrt{P_3}$ и т.д.

Имея средние квадратичные ошибки, можно найти и вероятные ошибки, умножив средние квадратичные на 0,764.

Мы предполагали, что все наблюдения, служащие для составления основных уравнений, обладают одинаковой точностью, т.е. что средние ошибки всех величин $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ одинаковы.

В том случае, когда почему-либо точность определения этих величин неодинакова и средние квадратичные их ошибки различны и заданы или известны, то надо сначала все условные уравнения привести к одинаковой средней ошибке или, как говорят, к «одинаковому весу». Это делается следующим образом. Пусть средние квадратичные ошибки величин $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ есть $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$, то, вычислив величину

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2}{k}} ,$$

составляем величины

$$p_1 = \frac{\sigma}{\sigma_1} , \quad p_2 = \frac{\sigma}{\sigma_2} , \quad \dots \quad p_k = \frac{\sigma}{\sigma_k} \quad (26)$$

и каждое из уравнений (17) умножаем на соответствующий ему множитель p_i ; очевидно, что мы получим систему уравнений эквивалентную (17), в которой вторые части будут

$$\alpha_1 \frac{\sigma}{\sigma_1} , \quad \alpha_2 \frac{\sigma}{\sigma_2} , \quad \dots \quad \alpha_k \frac{\sigma}{\sigma_k} ,$$

т.е. все будут иметь одну и ту же среднюю ошибку σ .

Из формулы (26) очевидно, что вместо самих средних ошибок можно брать любые величины, им пропорциональные, чтобы сделать вычисление проще, например, если $\sigma = 0.02$, то, если мы все величины умножим на 50, у всех дробей (26) числитель будет 1. Ясно также, что для всех тех уравнений, для которых $\sigma_i = \sigma$, будет $p_i = 1$.

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ СРЕДНЕЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ДИАГРАММЫ

Для построения средней экспериментальной диаграммы кручения образцов сплава Д16 были использованы данные измерения напряжений и деформаций двенадцати испытанных образцов [4]. В табл. 1 приведены деформации, которые, начиная с деформации $\gamma = 0,2\%$ разделены на равноотстоящие значения с шагом $h = 0,1\%$, одинаковым для всех образцов; рядом записаны соответствующие этим деформациям напряжения (τ), замеренные при испытании каждого конкретного образца. В последней графе приведены среднеарифметические значения напряжений (τ_{cp}).

При различных деформациях по мере роста пластической составляющей деформации уменьшалось количество испытанных до этих деформаций образцов. Таким образом, кривая $\tau - \gamma$, построенная по среднеарифметическим значениям, будет иметь разный «вес» по напряжению, которое можно считать функцией от изменения деформации, полагаемой в этом случае аргументом. Чтобы учесть указанный «вес», аппроксимируем кривую напряжений как функцию от деформаций некоторым приближающим многочленом.

Для решения вопроса о степени приближающего многочлена используем теорему [1, стр.108-109]: «...если n -е разности функции, образованные для равноотстоящих значений аргумента при любом шаге h , постоянны, то функция представляет собой многочлен степени n ». Как можно убедиться по данным табл. 1, вторые разности между среднеарифметическими значениями напряжений можно считать приблизительно постоянными. Вследствие этого примем приближающий многочлен в виде:

$$\tau = X + Y\gamma + Z\gamma^2. \quad (*)$$

Для определения вероятнейших значений коэффициентов X , Y и Z воспользуемся методом наименьших квадратов, применяя его по схеме, изложенной в [2]. Законность использования этого метода применительно к нашей задаче обуславливается тем фактом, что на практике отклонения от среднего значения некоторого достаточно большого числа наблюдений обычно имеют тенденцию приближаться к нормальному распределению (Гаусса).

Таблица 1

№ γ, %	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4
1	445	500	548	587	622								
2	426	500	530	570	590	620	645						
3	412	470	515	572	580	592	627	645	675	700	718	735	750
4	400	460	510	545	565	585	610						
5	380	460	502	540	565	580	600	620					
6	365	432	475	518	558	580							
7	360	430	465	495	520	545	565	600	620	650	665	690	705
8	340	425	460	495	515	545	560	585	600	618	640	655	675
9	338	415	445	490	510	540	555	575					
10	400	405	445	485	525	565	580	600	615	625	640	655	670
11	330	385	450	470	500	510	525	540	565	582	602	620	640
12	380	400	450	500									
τ _{ср}	397,3	440,2	482,9	522,2	550	566	584,2	595	615	635	653	671	688

Таблица 2

i	γ, %	(τ _{ср})i	p _i
1	0,2	397,3	1,382
2	0,3	440,2	1,331
3	0,4	482,9	1,448
4	0,5	522,2	1,285
5	0,6	550	1,245
6	0,7	566,2	1,455
7	0,8	584,2	1,267
8	0,9	595	1,249
9	1	615	0,817
10	1,1	635	0,744
11	1,2	653	0,763
12	1,3	671	0,748
13	1,4	688	0,782

Итак, для изменяющихся значений деформаций γ с шагом $h=0,1\%$ составляем табл. 2 среднеарифметических значений $\tau_{ср}$ с различными «весами», характеризуемыми величинами p_i . Величина p_i определяется по формуле:

$$p_i = \frac{\mu}{\mu_i}, \quad (**)$$

где в данном случае μ - среднее отклонение замеренных напряжений при фиксированных значения деформации, равное

$$\mu_i = \sqrt{\frac{\Delta \tau_1^2 + \Delta \tau_2^2 + \dots + \Delta \tau_k^2}{k(k-1)}} \quad (k - \text{число измерений, } \Delta \tau_i = \tau_i - \tau_{ср}).$$

$$\text{Величина } \mu \text{ в формуле (**) равна: } \mu = \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \dots + \mu_k^2}{k}}.$$

Величина μ есть та средняя ошибка, которой приписывается «вес», равный 1 и которую можно брать произвольно (например $\mu = 1$), ибо в окончательные результаты значение ее не входит.

Таким образом, составленные по непосредственным наблюдениям уравнения (*) будут:

$$\begin{aligned} X + 0,2Y + 0,04Z &= 397,3; & X + 0,8Y + 0,64Z &= 584,2 \\ X + 0,3Y + 0,09Z &= 440,2; & X + 0,9Y + 0,81Z &= 595 \\ X + 0,4Y + 0,16Z &= 482,9; & X + 1,0Y + 1,0Z &= 615 \\ X + 0,5Y + 0,25Z &= 522,2; & X + 1,1Y + 1,21Z &= 635 \\ X + 0,6Y + 0,36Z &= 550; & X + 1,2Y + 1,44Z &= 653 \\ X + 0,7Y + 0,49Z &= 556,2; & X + 1,3Y + 1,69Z &= 671 \\ & & X + 1,4Y + 1,96Z &= 688 \end{aligned} \quad (***)$$

Прежде всего находим приближенное значение величин X , Y и Z : для этого берем уравнения 1, 5 и 10 и из них находим:

$$X_0 = 265; \quad Y_0 = 645; \quad Z_0 = -290.$$

Подставляя эти значения в левые части уравнений (*), находим значения некоторых постоянных, обозначаемых через A_i , а именно:

$$\begin{aligned} A_1 &= 382,4; & A_2 &= 432,4; & A_3 &= 476,6; \\ A_4 &= 515,0; & A_5 &= 547,6; & A_6 &= 574,4; \\ A_7 &= 595,4; & A_8 &= 610,6; & A_9 &= 620,0; \\ A_{10} &= 623,6; & A_{11} &= 621,4; & A_{12} &= 613,4; \\ A_{13} &= 599,6. \end{aligned}$$

Разница между величинами $\tau_1, \tau_2, \dots$, даваемыми наблюдениями и постоянными $A_1, A_2, \dots$ дает малые поправки $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, которые [2] «...единственно только ...подвержены погрешностям наблюдений». Вычитая значения $A_1, A_2, \dots$ из соответствующих величин τ , получаем следующие величины чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -1,1; & \alpha_2 &= 7,8; & \alpha_3 &= 6,3; \\ \alpha_4 &= 7,2; & \alpha_5 &= 2,4; & \alpha_6 &= -12,2; \\ \alpha_7 &= -11,2; & \alpha_8 &= -15,6; & \alpha_9 &= -5; \\ \alpha_{10} &= 11,4; & \alpha_{11} &= 31,6; & \alpha_{12} &= 57,6; \\ \alpha_{13} &= 88,4. \end{aligned}$$

Так как величины X_0, Y_0, Z_0 уравнениям (*) удовлетворяют лишь приближенно, то, чтобы получить более точные сведения, полагаем:

$$X = X_0 + \xi;$$

$$Y = Y_0 + \eta;$$

$$Z = Z_0 + \zeta.$$

В результате получаем следующие условные уравнения, приведенные в табл. 3 (здесь a_i, b_i, c_i – коэффициенты при неизвестных в системе уравнений (17)).

Таблица 3

i	a_i	b_i	c_i	α_i	p_i
1	1	0,2	0,04	-1,1	1,382
2	1	0,3	0,09	7,8	1,331
3	1	0,4	0,16	6,3	1,448
4	1	0,5	0,25	7,2	1,285
5	1	0,6	0,36	2,4	1,245
6	1	0,7	0,49	-12,2	1,455
7	1	0,8	0,64	-11,2	1,267
8	1	0,9	0,81	-15,6	1,249
9	1	1	1	-5	0,817
10	1	1,1	1,21	11,4	0,744
11	1	1,2	1,44	31,6	0,763
12	1	1,3	1,69	57,6	0,748
13	1	1,4	1,96	88,4	0,782

Умножив все приведенные в этой таблице коэффициенты при неизвестных и величины α_i на p_i , приведем все эти уравнения к таким, у которых средняя ошибка известных членов $\alpha_i p_i$ будет одна и та же. Иначе говоря, тем самым приведем все указанные уравнения к одному весу. Эти приведенные уравнения вписаны в столбцы 2, 3, 4, 5, схемы (табл. 4), в первом столбце которой вписаны номера уравнений. В столбец 6 вписаны суммы $s = a + b + c + \alpha$. В столбцы 7–18 вписаны произведения $a^2, ab, ac, \dots, d\alpha$, как показано в заголовках этих столбцов.

Число, стоящее в строке “суммы” (Σ) и в столбце 6, должно быть равно сумме чисел, стоящих с ним в одной строке; это служит проверкой вычислений.

Таблица 4

Схема составления нормальных уравнений

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	a_i	b_i	c_i	α_i	s_i	a_i^2	$a_i b_i$	$a_i c_i$	$a_i \alpha_i$
1	1,382	0,2764	0,055	-1,5202	0,193	1,91	0,382	0,076	-2,101
2	1,331	0,3993	0,12	10,3818	12,23	1,772	0,531	0,159	13,818
3	1,448	0,5792	0,232	9,1224	11,38	2,097	0,839	0,335	13,209
4	1,285	0,6425	0,321	9,252	11,5	1,651	0,826	0,413	11,889
5	1,245	0,747	0,448	2,988	5,428	1,55	0,93	0,558	3,7201
6	1,455	1,0185	0,713	-17,751	-14,6	2,117	1,482	1,037	-25,83
7	1,267	1,0136	0,811	-14,19	-11,1	1,605	1,284	1,027	-17,98
8	1,249	1,1241	1,012	-19,484	-16,1	1,56	1,404	1,264	-24,34
9	0,817	0,817	0,817	-4,085	-1,63	0,667	0,667	0,667	-3,337
10	0,744	0,8184	0,9	8,4816	10,94	0,554	0,609	0,67	6,3103
11	0,763	0,9156	1,099	24,1108	26,89	0,582	0,699	0,838	18,397
12	0,748	0,9724	1,264	43,0848	46,07	0,56	0,727	0,946	32,227
13	0,782	1,0948	1,533	69,1288	72,54	0,612	0,856	1,199	54,059
Σ	14,52	10,419	9,325	119,519	153,8	17,24	11,24	9,19	80,048

Нормальные уравнения:

$$17,24\xi + 11,24\eta + 9,19\zeta = 80,04;$$

$$11,24\xi + 9,191\eta + 8,741\zeta = 106,1;$$

$$9,19\xi + 8,741\eta + 9,196\zeta = 154,9.$$

Продолжение таблицы 4

11	12	13	14	15	16	17	18
$a_i s_i$	b_i^2	$b_i c_i$	$b_i \alpha_i$	$b_i s_i$	c_i^2	$c_i \alpha_i$	$c_i s_i$
0,2674	0,0764	0,015	-0,42	0,053	0,0031	-0,08	0,011
16,281	0,1594	0,048	4,145	4,884	0,0143	1,244	1,465
16,48	0,3355	0,134	5,284	6,592	0,0537	2,113	2,637
14,778	0,4128	0,206	5,944	7,389	0,1032	2,972	3,695
6,7581	0,558	0,335	2,232	4,055	0,2009	1,339	2,433
-21,19	1,0373	0,726	-18,08	-14,8	0,5083	-12,7	-10,4
-14,06	1,0274	0,822	-14,38	-11,2	0,6575	-11,5	-9
-20,11	1,2636	1,137	-21,9	-18,1	1,0235	-19,7	-16,3
-1,335	0,6675	0,667	-3,337	-1,33	0,6675	-3,34	-1,33
8,1425	0,6698	0,737	6,941	8,957	0,8104	7,635	9,852
20,516	0,8383	1,006	22,08	24,62	1,2072	26,49	29,54
34,46	0,9456	1,229	41,9	44,8	1,598	54,46	58,24
56,725	1,1986	1,678	75,68	79,41	2,3492	106	111,2
117,71	9,1902	8,741	106,1	135,2	9,1968	154,9	182

Вычисление начинается с заполнения столбца 6, после того для проверки составляются суммы чисел, стоящие в столбцах 2, 3, 4, 5. Убеждаемся, что указанная проверка выполняется (с точностью до осуществленных вычислений):

$$153,8=14,52+10,42+9,324+119,5.$$

После этого заполняем первую и последующую строки столбцов 7, 8, 9, 10, 11; после чего берем суммы чисел, стоящих в этих столбцах, и проверяем вычисления по равенству:

$$117,7=17,24+11,24+9,19+80,04.$$

Затем в таком же порядке заполняем столбцы 12, 13, 14, 15 и проверяем по равенству:

$$135,2=9,191+11,24+8,741+106,1.$$

И наконец, заполняем столбцы 16, 17, 18 и проверяем вычисления по равенству:

$$182=9,196+9,19+8,741+154,9.$$

На этом заканчивается вычисление коэффициентов и свободных членов нормальных уравнений.

Когда вычисления производятся «вручную» (с помощью калькулятора) и надо иметь не только вероятнейшие значения неизвестных, но и средние или вероятные их погрешности, то выгоднее всего заменить известные члены буквами, например, A , B и C и писать нормальные уравнения для нашего примера в таком виде:

$$17,24\xi + 11,24\eta + 9,19\zeta = A,$$

$$11,24\xi + 9,19\eta + 8,741\zeta = B,$$

$$9,19\xi + 8,741\eta + 9,196\zeta = C.$$

Исключение неизвестных для решения этих уравнений выгодно производить так: разделив каждое уравнение на коэффициент при первой неизвестной, имеем:

$$\xi + 0,6520\eta + 0,5331\zeta = 0,058A,$$

$$\xi + 0,8177\eta + 0,7777\zeta = 0,08897B,$$

$$\xi + 0,9511\eta + 1,001\zeta = 0,1088C.$$

Исключая ξ , имеем:

$$0,1657\eta + 0,2446\zeta = -0,058A + 0,08897B,$$

$$0,1334\eta + 0,2233\zeta = -0,6669B + 0,1088C.$$

Поступив с этими уравнениями так же, имеем:

$$\eta + 1,476\zeta = -0,35A + 0,5369B,$$

$$\eta + 1,674\zeta = -0,669B + 0,8156C.$$

Исключая η , имеем:

$$0,198\zeta = 0,35A - 1,204B + 0,8156C,$$

откуда следует

$$\zeta = 1,768A - 6,081B + 4,119C$$

Затем, подставляя в обратном порядке, находим:

$$\eta = -2,960A + 9,513B - 6,080C,$$

$$\xi = 1,046A - 2,96B + 1,768C.$$

Из полученного таким образом общего решения нормальных уравнений (представленного в табл. 5), подставляя значения постоянных

$$A=80,04; \quad B=106,1; \quad C=154,9,$$

Находим:

$$\xi = 43,52; \quad \eta = -196,7; \quad \zeta = 134,3.$$

Так как полученные решением нормальных уравнений величины X , Y , Z после подставления в основные уравнения (***) дадут лишь ве-

роятные значения τ , то отклонения $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ от них наблюдаемых величин следует вычислять по формуле:

$$\varepsilon_i = a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta - \alpha_i.$$

Тогда средняя ошибка наблюдений определяется по формуле:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_k^2}{k - n}}. \quad (****)$$

Вычисление отклонений приведено в табл. 5.

Согласно (****) $\varepsilon = 14,56$.

Из общего решения нормальных уравнений следует:

при $A=1, B=0, C=0$ имеем $M_1 = 1,046$,

при $A=0, B=1, C=0$ имеем $N_2 = 9,513$,

при $A=0, B=0, C=1$ имеем $P_3 = 4,119$.

Следовательно, средние ошибки неизвестных будут [2]:

для неизвестной ξ — $\beta = \sqrt{M_1} \cdot \varepsilon \cong 14,89$;

для неизвестной η — $\gamma = \sqrt{N_2} \cdot \varepsilon \cong 44$;

для неизвестной ζ — $\varsigma = \sqrt{P_3} \cdot \varepsilon \cong 29,54$

и вероятные ошибки их

$$\rho_1 = 0.67\beta = 10,04,$$

$$\rho_2 = 0.67\gamma = 30,26,$$

$$\rho_3 = 0.67\varsigma = 19,91.$$

Таким образом, величины ξ , η и ζ будут:

$$\xi = 43,52 \pm 10,04;$$

$$\eta = -169,7 \pm 30,26;$$

$$\zeta = 134,3 \pm 19,91.$$

И значит

$$X = 265 + \xi = 308,5 \pm 10,04;$$

$$Y = 645 + \eta = 475,3 \pm 30,26;$$

$$Z = -290 + \zeta = -155,7 \pm 19,91.$$

(****)

Таблица 5

Вычисление отклонений

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
i	$a_i \xi$	$b_i \eta$	$c_i \zeta$	$\sum (1) + (2) + (3)$	α_i	$\varepsilon_i = (4) - (5)$	ε_i^2
1	60,14	-46,91	7,424	20,65	-1,52	22,17	491,5
2	57,93	-67,76	16,09	6,28	10,38	-4,1	16,81
3	63,02	-98,29	31,12	-4,15	9,122	-13,27	176,1
4	55,92	-109	43,15	-9,93	9,252	-19,18	367,9
5	54,18	-126,8	60,19	-12,43	2,988	-15,42	237,8
6	63,32	-172,9	95,76	-13,82	-17,75	3,93	15,44
7	55,14	-172,1	108,9	-8,06	-14,19	6,13	37,58
8	54,36	-190,7	135,9	-0,44	-19,48	19,04	362,5
9	35,56	-138,6	109,7	-6,66	-4,085	10,75	115,6
10	32,37	-138,9	120,9	14,37	8,48	5,89	34,69
11	33,21	-155,4	147,6	25,41	24,11	1,3	1,69
12	32,56	-165	169,8	37,36	43,09	-5,73	32,83
13	34,02	-185,8	205,7	53,92	69,11	-15,19	23,07

Подставив последние значения коэффициентов в уравнение (*) убеждаемся, что найденное уравнение хорошо согласуется с данными наблюдений. Вычисленная на основании этого уравнения средняя экспериментальная кривая показана на рис. 1 в виде пунктирной линии.

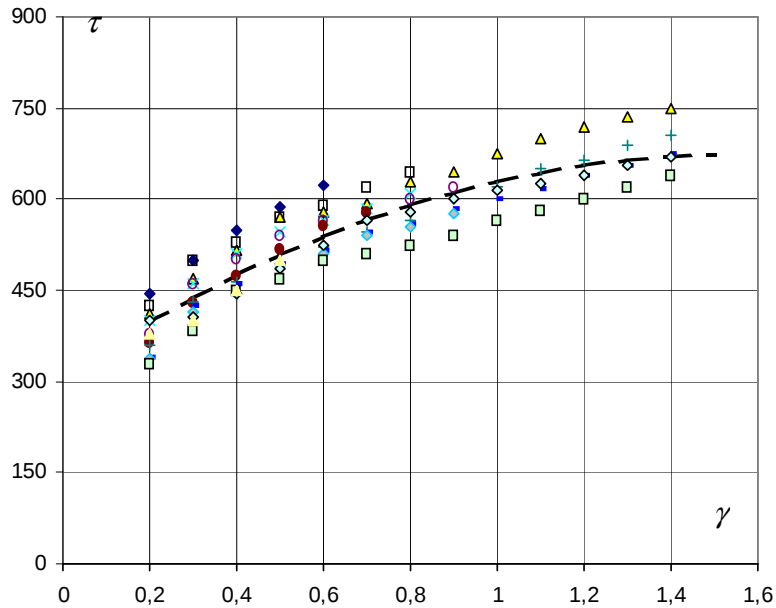


Рис. 1.

Как видно на рис. 1, наибольший разброс экспериментальных данных наблюдается при деформациях $\gamma=0,2-0,3\%$, при которых достигается технический предел текучести. Установим доверительные интервалы, которые покрывают с заданной надежностью найденные средние значения напряжений (τ_{cp}) при зафиксированных значениях деформаций $\gamma=0,2\%$ и $\gamma=0,3\%$. Для этого воспользуемся методикой обработки наблюдений, подробно изложенной в [3].

1. Имея 12 частных измерений τ (τ_i , $i=1,2,\dots,12$) при $\gamma=0,2\%$ (см. табл. 1), определяем среднее квадратическое отклонение s :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{cp})^2} = 41,4.$$

2. Проверяем, не является ли какой-либо один частный результат τ_n аномальным (очевидно тот, который имеет максимальное отклонение от τ_{cp}). Для этой цели вычисляем отношение:

$$t_n = \left| \frac{\tau_n - \tau_{cp}}{s} \right| = 1,69.$$

Далее по числу измерений n и по абсолютному значению t_n устанавливаем с помощью таблицы 6 [3], какому уровню вероятности α соответствует эта величина t_n . Если полученное по таблице 6 значение $\alpha < 0,2$, то подозреваемый результат x_n признается аномальным и во внимание не принимается. Расчет $\bar{x}$ и S должен быть повторен для числа наблюдений $(n-1)$ без учета аномального результата x_n . Если же полученное значение $\alpha \geq 0,2$, то нет оснований считать результат измерений x_n аномальным.

В нашем случае оказалось, что $\alpha > 0,2$, т.е. нет оснований считать результат τ_n аномальным. Следовательно, все приведенные в табл. 1 измерения τ должны быть приняты в расчет.

3. Определяем возможные отклонения ε среднего значения в зависимости от принятой доверительной вероятности p_1 и числа наблюдений n по формуле:

$$\varepsilon = \beta \cdot s, \quad \left(\beta = \frac{t_{p_1}}{\sqrt{n}} \right).$$

Согласно рекомендаций [3] принимаем $p_1 = 0,9$, что согласно данным табл. 7 дает $\beta = 0,519$. Значение коэффициента t_{p_1} , зависящего от n и p_1 , получается равным $t_{p_1} = 1,796$. При этом получаем $\varepsilon = 21,5$.

Доверительные границы, в пределах которых находится среднее значение τ_{cp}

$$(\tau_{cp})_{1,2} = \tau_{cp} \pm \varepsilon = 400 \pm 21,5.$$

Сравнивая этот полученный при выбранной доверительной вероятности $p_1 = 0,9$ результат с тем, который следует из формул (***) и (*), убеждаемся, что в обоих этих случаях получились примерно одинаковые доверительные границы для τ_{cp} .

Таблица 6

Значение t_n

n	α			n	α			n	α		
	0,02	0,1	0,2		0,02	0,1	0,2		0,02	0,1	0,2
3	1,15	1,15	1,15	15	2,7	2,41	2,25	27	3,06	2,7	2,53
4	1,49	1,46	1,42	16	2,75	2,44	2,28	28	3,09	2,72	2,55
5	1,75	1,67	1,6	17	2,78	2,48	2,31	29	3,11	2,74	2,57
6	1,94	1,82	1,73	18	2,82	2,5	2,34	30	3,14	2,76	2,59
7	2,1	1,94	1,83	19	2,85	2,53	2,35	32	3,18	2,8	2,62
8	2,22	2,03	1,91	20	2,88	2,56	2,38	34	3,22	2,83	2,66
9	2,32	2,11	1,98	21	2,91	2,58	2,41	36	3,26	2,87	2,7
10	2,41	2,18	2,04	22	2,94	2,6	2,43	38	3,3	2,9	2,72
11	2,48	2,23	2,09	23	2,96	2,62	2,45	40	3,34	2,94	2,76
12	2,55	2,28	2,13	24	2,99	2,64	2,47	45	3,42	3,01	2,81
13	2,61	2,33	2,18	25	3,01	2,66	2,49	50	3,5	3,06	2,85
14	2,66	2,37	2,21	26	3,04	2,68	2,51	55	3,54	3,09	2,88
								60	3,56	3,12	2,92

Таблица 7

n	Значения β при p_1				n	Значения β при p_1			
	0,8	0,9	0,95	0,99		0,8	0,9	0,95	0,99
2	2,178	4,46	8,99	45,0	18	0,314	0,410	0,497	0,683
3	1,089	1,68	2,98	9,73	19	0,305	0,398	0,482	0,661
4	0,819	1,17	1,59	2,92	20	0,297	0,387	0,467	0,639
5	0,685	0,952	1,24	2,06	21	0,289	0,376	0,456	0,620
6	0,603	0,825	1,05	1,65	22	0,282	0,367	0,443	0,603
7	0,544	0,734	0,926	1,78	23	0,275	0,358	0,432	0,588
8	0,500	0,670	0,834	1,24	24	0,269	0,350	0,422	0,573
9	0,466	0,620	0,770	1,12	25	0,264	0,342	0,412	0,560
10	0,437	0,580	0,715	1,03	26	0,258	0,335	0,404	0,549
11	0,414	0,546	0,672	0,956	27	0,253	0,329	0,396	0,537
12	0,393	0,519	0,635	0,898	28	0,249	0,323	0,388	0,523
13	0,376	0,494	0,605	0,848	29	0,246	0,316	0,381	0,512
14	0,361	0,473	0,577	0,804	30	0,240	0,310	0,372	0,505
15	0,347	0,455	0,553	0,769	40	0,206	0,266	0,320	0,428
16	0,335	0,438	0,533	0,737	50	0,184	0,236	0,284	0,379
17	0,324	0,423	0,514	0,708	60	0,168	0,216	0,258	0,344

Таблица 8

Значение величины κ

n	$p_2 = 0,90$			$p_2 = 0,95$			$p_2 = 0,99$		
	$\gamma = 0,90$	$\gamma = 0,95$	$\gamma = 0,99$	$\gamma = 0,90$	$\gamma = 0,95$	$\gamma = 0,99$	$\gamma = 0,90$	$\gamma = 0,95$	$\gamma = 0,99$
10	2,366	2,573	3,011	2,819	3,065	3,588	3,710	4,035	4,723
11	2,321	2,515	2,925	2,766	2,997	3,485	3,640	3,945	4,588
12	2,283	2,466	2,852	2,720	2,938	3,398	3,581	3,868	4,472
13	2,250	2,424	2,788	2,681	2,888	3,332	3,529	3,801	4,373
14	2,222	2,387	2,733	2,647	2,844	3,256	3,484	3,743	4,286
15	2,196	2,354	2,684	2,617	2,805	3,198	3,444	3,692	4,210
16	2,173	2,325	2,641	2,590	2,770	3,147	3,409	3,647	4,142
17	2,153	2,299	2,602	2,565	2,739	3,100	3,377	3,605	4,081
18	2,135	2,275	2,567	2,544	2,711	3,058	3,348	3,568	4,026
19	2,118	2,254	2,535	2,524	2,685	3,020	3,322	3,535	3,976
20	2,103	2,234	2,506	2,505	2,662	2,985	3,298	3,504	3,930
21	2,089	2,216	2,479	2,489	2,641	2,954	3,276	3,476	3,888
22	2,076	2,200	2,454	2,474	2,621	2,924	3,256	3,450	3,849
23	2,064	2,184	2,432	2,460	2,602	2,897	3,238	3,426	3,814
24	2,053	2,170	2,410	2,446	2,585	2,872	3,220	3,403	3,780
25	2,043	2,157	2,391	2,434	2,570	2,848	3,204	3,382	3,750
26	2,033	2,144	2,372	2,422	2,555	2,827	3,189	3,363	3,721
27	2,024	2,133	2,355	2,412	2,541	2,806	3,175	3,345	3,694
28	2,016	2,122	2,339	2,402	2,528	2,787	3,162	3,328	3,669
29	2,008	2,112	2,324	2,392	2,516	2,769	3,149	3,312	3,645
30	2,000	2,102	2,310	2,383	2,504	2,752	3,137	3,296	3,622
32	1,986	2,084	2,283	2,367	2,483	2,720	3,115	3,269	3,581
34	1,974	2,068	2,260	2,352	2,464	2,692	3,096	3,243	3,544
36	1,963	2,054	2,238	2,338	2,447	2,667	3,078	3,221	3,510
38	1,952	2,040	2,219	2,326	2,431	2,644	3,062	3,200	3,480
40	1,943	2,028	2,201	2,315	2,416	2,622	3,047	3,181	3,452
45	1,922	2,002	2,162	2,291	2,385	2,576	3,015	3,140	3,391
50	1,906	1,980	2,130	2,270	2,359	2,538	2,988	3,106	3,341
55	1,891	1,961	2,103	2,253	2,337	2,506	2,966	3,076	3,298
60	1,879	1,946	2,080	2,239	2,318	2,478	2,947	3,052	3,262

4. Для оценки разброса исследуемой случайной величины (τ) относительно среднего значения определим возможные предельные отклонения δ случайной величины τ в зависимости от принятой доверительной вероятности p_2 и числа наблюдений n по формуле [3]:

$$\delta = ks,$$

что дает также пределы для τ :

$$(\tau_{\text{доп}})_{1,2} = \tau_{\text{ср}} \pm \delta.$$

Принимаем $p_2 = p_1 = 0,9$; тогда с помощью данных табл. 8 (принимая $\gamma = 0,9$) находим $k = 2,283$, отсюда $\delta = 94,5$; в табл. 8 γ означает вероятность, с которой можно гарантировать попадание в указанные предельные значения доли p_2 совокупности значений исследуемой величины.

Таким образом, доверительные границы $\tau_{\text{доп}}$, в пределах которых находится измеряемая случайная величина τ , таковы:

$$(\tau_{\text{доп}})_{1,2} = \tau_{\text{ср}} \pm \delta = 400 \pm 94,5.$$

Повторяя приведенные выкладки для $\gamma = 0,3\%$, получим:

$$(\tau_{\text{доп}})_{1,2} = 440 \pm 92,75,$$

что соответствует предыдущему результату.

Установление пределов $(\tau_{\text{доп}})_{1,2}$ позволяет выявить крайние значения, которые практически может принимать случайная величина (в данном случае τ) в пределах точности и надежности, обусловленных заложенными в расчет величинами p_2 и γ . Знание этих пределов необходимо при оценке худших условий осуществляемого процесса исследования.

Выбор объема испытаний n и величин p_1 , p_2 и γ при обработке результатов экспериментов в общем случае зависит от постановки задачи, которую должен решать экспериментатор, а также от условий проведения опыта. Поэтому нельзя дать общих рекомендаций на этот счет.

Если необходимо определить предельные значения для исследуемой величины x , число экспериментальных точек n должно быть не менее 10. При меньшем объеме испытаний для рассматриваемого круга задач полученная выборка обычно нерепрезентативна и недостаточно хорошо представляет пропорции генеральной совокупности. Если в силу каких-то обстоятельств не представляется возможным довести объем испытаний до $n \geq 10$, то по результатам наблюдений можно проводить

только вычисление доверительных границ для среднего значения $\bar{x}$. В силу этой же причины нецелесообразно вычислять доверительные границы для $\bar{x}$, если число наблюдений очень мало ($n = 2 - 3$).

Доверительная вероятность p_1 при обычных исследованиях может быть принята равной $p_1 = 0,9$. Для этих же исследований можно принимать $p_2 = 0,9 \div 0,95$, $\gamma = 0,9$.

Если результаты измерений предполагается использовать при оценке надежности работы машины, целесообразно задавать $p_1 = 0,95$, $p_2 = 0,95 \div 0,99$, $\gamma = 0,95$.

При проведении особо ответственных или точных исследований можно принимать $p_1 = 0,95 \div 0,99$, $p_2 = 0,99$, $\gamma = 0,95 \div 0,99$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. – М.: Наука, 1970. – 432 с.
2. Крылов А.Н. Лекции о приближенных вычислениях. – Л.; М.; Изд-во АН СССР, 1935.
3. Кацнельсон М.У. Обработка результатов точечных измерений методами математической статистики // Тр. ВНИЭКИПРОДМАШ. – №2. – 1963.
4. Рычков Б.А. Теоретическое и экспериментальное исследование деформации алюминиевых сплавов при некоторых сложных нагружениях. Дисс.... канд. техн. наук. – Фрунзе, 1970.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Типы ошибок и их учет	3
Составление нормальных уравнений	10
Пример построения средней экспериментальной диаграммы.....	16
Литература	30

Б.А. Рычков, И.В. Гончарова

ОБРАБОТКА ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Методическое пособие

Редактор *И.С. Волоскова*
Технический редактор *М.Р. Фазлыева*
Компьютерная верстка *Э.Ю. Вислевской*

Подписано в печать 16.04.07. Формат 60×84¹/₁₆
Офсетная печать. Объем 2,0 п.л.
Тираж 50. Заказ 38.

Издательство Кыргызско-Российского
Славянского университета
720000, Бишкек, ул. Киевская, 44.

Отпечатано в типографии КРСУ
720000, Бишкек, ул. Шопокова, 68.