# VI. ТЕХНИКА, ТЕХНОЛОГИЯ, СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ НАУКИ

*Люшнеев К.Д.*

## ИЗГИБ БАЛКИ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ С КРУГЛЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Как известно [1], материалы с эффектом памяти формы стали широко применяться в различных термосиловых устройствах. Одним из видов термосиловых элементов является балки, генерирующие при обратном мартенситном превращении значительные реактивные усилия, приводя в движение исполнительные механизмы. В этой связи все большее значение приобретает исследование механики материалов с памятью формы. В работе [2] рассматривалась задача об изгибе балки с памятью формы с прямоугольным сечением. Были получены соотношения между напряжением, деформацией, прогибом, реактивным усилием в интервале температур обратного мартенситного превращения.

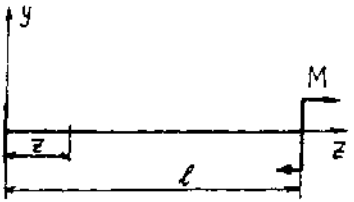
В настоящей работе рассматривается задача об изгибе балки с памятью формы круглого поперечного сечения. Так же, как и в работе [2], рассматривается балка длиной $l$, площадью поперечного сечения F, испытывающая чистый изгиб в изотермических условиях (Рис.1). При этом считаем, что она изготовлена из материала, обладающего эффектом памятью формы, и ее нагружение осуществляется при некоторой температуре To, меньшей температуры начала обратного мартенситного превращения, т.е. в мартенситной области.

Диаграмма деформирования материала считается одинаковой при растяжении и сжатии и аппроксимируется ломаной трехзвенной линией (Рис.2) как в мартенситном, так и в аустенитном состояниях материала. На рис.2 обозначено $tg\,\alpha = E$, $tg\,\alpha_1 = nE$, где E- модуль упругости и $nE$- модуль упрочнения (n<1). $\sigma_{фн}, \sigma_{фк}$ – напряжения, соответственно начала и конца фазовой текучести материала.

Основные соотношения для напряжений, деформаций, изгибающего момента будут такими же, как в работе [2].

$$\sigma = E_н \frac{y}{\rho} \qquad (0 \le y \le y_ф) \qquad (1)$$

$$\sigma = E_н \frac{y_ф}{\rho} + nE_н \frac{y - y_ф}{\rho} \qquad (y_ф \le y \le y_{max}) \qquad (2)$$



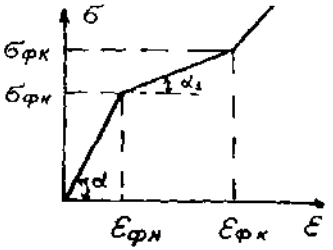




Рис 1

где Уф- глубина зоны неупругих (фазовых) деформаций;

ρ- радиус кривизны сечения балки, σ- напряжение.

Изгибающий момент в сечении бруса:

$$M = 2\left[\int_{F} \sigma v dF_{\text{ч}} + \int_{F_{\text{ф}}} \sigma e dF_{\text{ф}}\right] = \frac{E_{\text{ч}} I D(v_{\text{ф}})}{\rho} \qquad (3)$$

где $D(y_{\text{ф}})$- оператор, зависящий в основном от формы поперечного сечения и

ординаты Уф.

$$D(v_{\text{ф}}) = \left[\frac{I^{\text{ч}}}{I} + (1-n)\frac{S^{\text{ф}}(v_{\text{ф}})}{I} + n\frac{I^{\text{ф}}}{I}\right] \qquad (4)$$

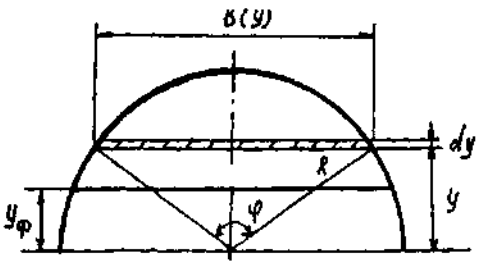



Рис 3

Здесь I-момент инерции полностью упругого сечения;

$I^{\text{ч}}$, $I^{\text{ф}}$, $S^{\text{ф}}$- моменты инерции соответственно упругой и неупругой частей сечения, а также статический момент неупругой части сечения.

$$I^{\text{ч}} = \int_{F} v^2 dF_{\text{ч}}$$

$$I^{\text{ф}} = \int_{F_{\text{ф}}} v^2 dF_{\text{ф}}$$

$$S^{\text{ф}} = \int_{F_{\text{ф}}} y\, dF_{\text{ф}} \qquad (7)$$

Рассмотрим круглое поперечное сечение радиуса R. Из курса сопротивления материалов известно [3], что $I = \frac{\pi R^4}{4}$. Для вычисления $I^{\text{ф}}$ и $S^{\text{ф}}$ рассмотрим сечение в упругофазовом состоянии (рис.3),

нагруженное так, чтобы глубина фазовых деформаций составляла Уф. Тогда для выражений (5-7) имеем

$$dF = b(y)dy$$

$$b(y) = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$y = R\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$dy = -\frac{R}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

Момент инерции упругой части сечения

$$I^{y} = \int_{F} y^2 dF_{y} = \int_{0}^{y_{\phi}} y^2 b(y)dy \qquad (8)$$

при $y = y_{\phi}$ $\varphi = \varphi_{\phi}$

при $y = 0$ $\varphi = \pi$

Тогда

$$I^{y} = 2\int_{0}^{\varphi_{\phi}} R^2\cos^2\frac{\varphi}{2}2R\sin\frac{\varphi}{2}\frac{R}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = \frac{R^4}{16}\left(\sin 4\varphi_{\phi} - 4\varphi_{\phi} + 4\pi\right)$$

$$\frac{I^{y}}{I} = 1 - \frac{\varphi_{\phi}}{\pi} + \frac{\sin 4\varphi_{\phi}}{4\pi} \qquad (9)$$

Момент инерции фазовой области сечения

$$I^{\phi} = \int_{F_{\phi}} y^2 dF_{\phi} = \int_{y_{\phi}}^{R} y^2 b(y)dy$$

Здесь при $y = y_{\phi}$ $\varphi = \varphi_{\phi}$

при $y = R$ $\varphi = 0$

Тогда

$$I^{\phi} = -2\int_{\varphi_{\phi}}^{0} R^2\cos^2\frac{\varphi}{2}2R\sin\frac{\varphi}{2}\frac{R}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = \frac{R^4}{4}\varphi_{\phi} - \frac{R^4}{16}\sin 4\varphi_{\phi}$$

$$\frac{I^{\phi}}{I} = \frac{\varphi_{\phi}}{\pi} - \frac{\sin 4\varphi_{\phi}}{4\pi} \qquad (10)$$

Аналогично

$$S^{\phi} = \frac{4R^3}{3}\sin^3\frac{\varphi_{\phi}}{2}$$

$$\frac{S^{\phi}y_{\phi}}{I} = \frac{16}{3\pi}\sin^3\frac{\varphi_{\phi}}{2}\cos\frac{\varphi_{\phi}}{2} \qquad (11)$$

Подставляя выражения (9), (10), (11) в (4), получим

$$D(y_{\phi}) = 1 + (1-n)\left[\frac{\sin 4\varphi_{\phi}}{4\pi} - \frac{\varphi_{\phi}}{\pi} + \frac{16}{3\pi}\sin^3\frac{\varphi_{\phi}}{2}\cos\frac{\varphi_{\phi}}{2}\right] \qquad (12)$$

Для удобства расчетов, как и в работе [2], введем безразмерный параметр

$$\xi = \frac{y}{R} = \frac{R\cos\varphi}{R} = \cos\varphi$$

С учетом (14) выражение (13) примет вид

$$D(\xi) = 1 + \frac{2(1-n)}{\pi}\left[\xi\sqrt{1-\xi^2}\,(2\xi^2-1)\,(8\xi^4-8\xi^2+1) - \arccos\xi + \frac{8}{3}\xi\left(\sqrt{1-\xi^2}\right)^3\right] \qquad (14)$$

Алгоритм расчета рассматриваемой консольной балки подробно приведен в работе [2] Здесь ограничимся рассмотрением результатов вычислений

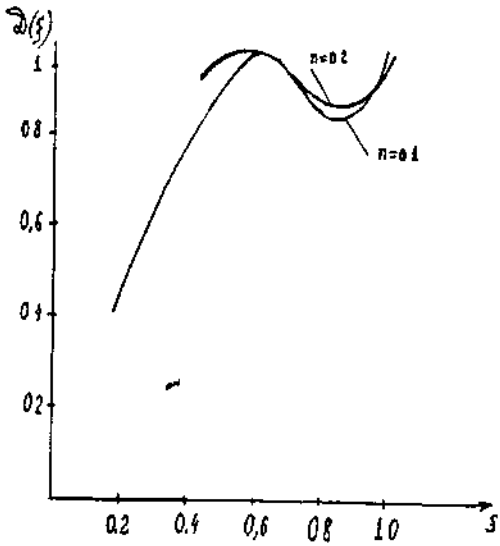



Рис 4

Так же, как и в работе [2], в расчетах принимались следующие физико-механические характеристики материала сплав Ti-Ni, Ан=55$^0$С, Ак=90$^0$С, $\sigma_T^M = 160$ МПа $\sigma_T^A = 470$ МПа, Ем=5 10$^4$ МПа, $E_A$=8 10$^4$МПа Индексы М и А соответствуют мартенситному и аустенитному состоянию материала

Как видно из рис 4 зависимость оператора D(ξ) от параметра углубения фазовых деформаций ξ имеет довольно сложный характер, это, видимо, связано нелинейностью изменения ширины сечения b(y) Но это обстоятельство фактически не оказывает существекнного влияния на характер развития прогиба при углублении зоны фазовых деформаций (рис 5), форма кривых получается такой же, как при балке с прямоугольным сечением [2]

Кривые на рис 6 показывают процесс роста реактивных моментов в зависимости от температуры нагрева при различных глубинах зоны фазовых деформаций верхняя кривая соответствует n 0 1 средняя при n 0 2 нижняя при n 0.3 Температура T*, при которой возникает

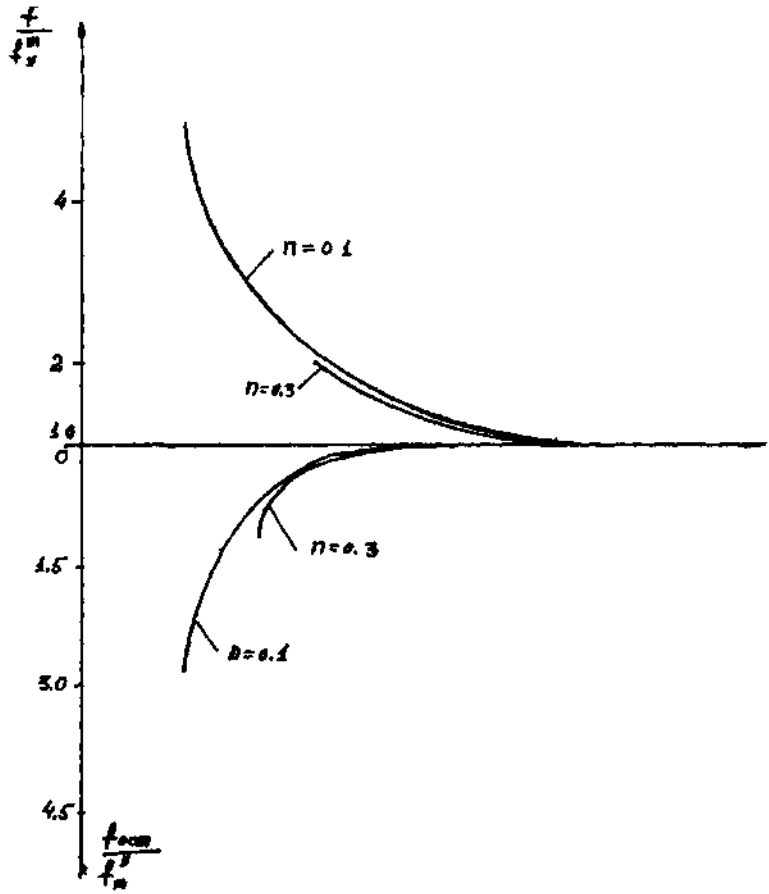



Рис 5

фазовые деформации уже от действия реактивных моментов найдена только для случая n= 0,1 (T*=82°C), в остальных случаях реактивное напряжение не превышает предела фазовой текучести при соответствующей температуре

На рис 7 представлена зависимость реактивных моментов от момента нагружения, аналогичная в балке с прямоугольным сечением

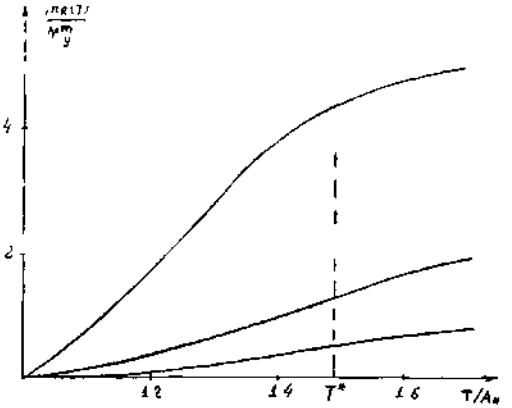



Рис 6

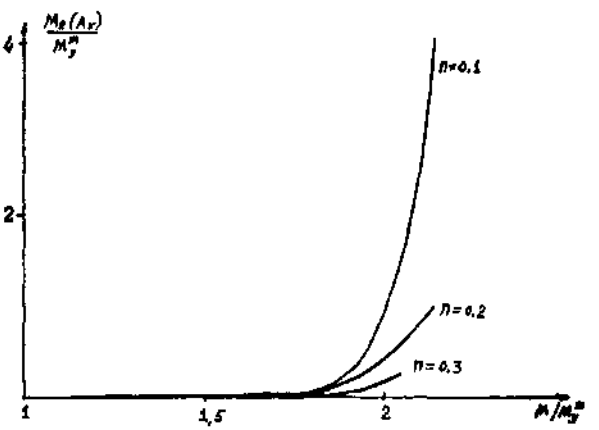



Рис 7

## Литература

1. Лихачев В.А.Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. Эффект памяти формы. -Л.: Изд-во ЛГУ, 1987.

2. Абдрахманов С.А., Дюшекеев К.Д. Изгиб и кручение брусьев из материалов с памятью формы. -Бишкек: Илим, 1992.

3 Феодосьев В И Сопротивление материалов. -М., Машиностроение, 1985