УДК531.53

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ ОБОБЩЕНИЕ

А.М.ОСМОНКАНОВ, Э.Т.ТУРГУНАЛИЕВ
E.mail. ksucta@elcat.kg

Берилген иште чектүү суммалар үчүн $l_\beta(a,b)$ мейкидигинде Гельдердин барабарсыздыгы жана Коши-Минковскийдин барабарсыздыгы жанаалардын интегралдык жалпылануусу каралган.

В данной работе рассматриваются неравенство Гельдера и неравенство Коши-Минковского и их интегральные обобщения для конечных сумм в пространстве $l_\beta(a,b)$.

In this work are examined the inequality of Gelder and the inequality of Coshy-Minkowski and their integral generalizations for the final sums of the space $l_\beta(a,b)$.

В курсе математического анализа известны такие неравенства, как неравенство Гельдера и неравенство Коши-Минковского для конечных сумм и их интегральные обобщения. Эти неравенства играют большую роль в теории метрических и линейно нормированных пространств. При проверке аксиом нормы наиболее трудной задачей является неравенство треугольника, а неравенства Коши-Минковского являются ни чем иным, как неравенством треугольников в пространствах суммируемых последовательностей l_β и суммируемых функций $l_\beta(a,b)$, где $p \geq 1$.

В данной работе рассмотрены два неравенства и их обобщение для конечных сумм, а затем их интегральные аналоги.

Предположение 1. Пусть *а* и *в* – произвольные положительные числа, $\alpha \in [0,1]$. Тогда

$$(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha. \quad (1)$$

Доказательство. При $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ неравенство очевидно. Пусть теперь $\alpha \in (0,1)$ и $a \geq b > 0$. Ясно, что неравенство (1) эквивалентно неравенству $\left(1+\frac{b}{a}\right)^\alpha < 1+\frac{b^\alpha}{a^\alpha}$.

Обозначив $x = \frac{b}{a}$, рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1+x^\alpha}{(1+x)^\alpha}$.

$$\varphi'(x) = \frac{\alpha x^{\alpha-1}(1+x)^\alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1}(1+x^\alpha)}{(1+x)^{2\alpha}} = \alpha(1+x)^{\alpha-1}\frac{x^{\alpha-1}(1+x)-(1+x)}{(1+x)^{2\alpha}} = \alpha(1+x)^{\alpha-1}\frac{x^{\alpha-1}-1}{(1+x)^{2\alpha}}.$$

Так как $x \in (0,1)$ и $\alpha \in (0,1)$, то отсюда следует, что $\varphi'(x) > 0$ для всех $x \in (0,1)$. А значит, $\varphi(x)$ монотонно возрастает на промежутке $[0,1]$ и $\min\limits_{x\in[0,1]} \varphi(x) = \varphi(0) = 1 \leq \frac{1+x^\alpha}{(1+x)^\alpha}$, откуда следует (1).

Предположение 2. Пусть $\alpha \in (0,1)$ $a \geq b > 0$. Тогда

$$(a-b)^\alpha \geq a^\alpha - b^\alpha. \quad (2)$$

Доказательство. Видно, что знак равенства достигается при $a=b$ и $\alpha=1$. Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\dfrac{1-x^{\alpha}}{(1-x)^{\alpha}}$, где $x=\dfrac{b}{a}$ и $a>b$. Ясно, что $x\in(0,1)$,

$$\varphi'(x)=\frac{-\alpha x^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha}+\alpha(1-x)^{\alpha-1}(1-x^{\alpha})}{(1-x)^{2\alpha}}=\alpha(1-x)^{\alpha-1}\frac{\left[-x^{\alpha-1}(1-x)+1+x^{2}\right]}{(1-x)^{2\alpha}}=$$

$$=\frac{\alpha(1-x)^{\alpha-1}(1-x^{\alpha-1})}{(1-x)^{2\alpha}}<0.$$

Отсюда получим, что функция $\varphi(x)$ монотонно убывает на промежутке $[0,1]$ и $\max\limits_{x\in[0,1]}\varphi(x)=\varphi(0)=1>\dfrac{1-x^{\alpha}}{(1-x)^{\alpha}}$, что эквивалентно неравенству (2).

Предположение 3. Для любых положительных $a_1,a_2,\ldots,a_n$ имеет место

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{\alpha}\le a_1^{\alpha}+a_2^{\alpha}+\cdots+a_n^{\alpha},$$

(3)

где $\alpha\in[0,1]$.

Доказательство. Видно, что знак равенства достигается при $\alpha=1$. Неравенство (3) докажем по индукции: При $n=2$ предположение доказано. Пусть неравенство (3) верно для $n-1$. Тогда по предложению 1. $(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)^{\alpha}=(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})^{\alpha}+a_n^{\alpha}$, далее по индуктивному предположению имеем (3).

Предположение 4. Пусть функция $a(t)$ удовлетворяет условию

$$a(0)+\int_0^t a(s)ds\ge a(t)>0,\ t\in(0,T],\ \alpha\in(0,1).$$

Тогда

$$\left(a(0)+\int_0^t a(s)ds\right)^{\alpha}\le a^{\alpha}(0)+\int_0^t a^{\alpha}(s)ds.$$

(4)

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t)=\left(a(0)+\int_0^t a(s)ds\right)^{\alpha}-a^{\alpha}(0)-\int_0^t a^{\alpha}(s)ds$

$$f'(t)=\alpha\left(a(0)+\int_0^t a(s)ds\right)^{\alpha-1}a(t)-a^{\alpha}(t)=a^{\alpha}(t)\left[\alpha\left(\frac{a(t)}{a(0)+\int_0^t a(s)ds}\right)^{1-\alpha}-1\right].$$

Так как $\dfrac{a(t)}{a(0)+\int_0^t a(s)ds}<1$, то $f'(t)<0$, т.е. $f(t)$ монотонно убывает в промежутке $[0,T]$ и в этом промежутке $\max f(t)=f(0)=0$, $f(t)=\left(a(0)+\int_0^t a(s)ds\right)^{\alpha}-a^{\alpha}(0)-\int_0^t a^{\alpha}(s)ds\le 0$, что требовалось доказать.

Предположение 5. Пусть положительные числа $a_1,a_2,\ldots,a_n$ удовлетворяют условию:

$a_1>a_2+a_3+\cdots+a_n$. Тогда

$(a_1 - a_2 - a_3 - \cdots - a_n)^\alpha \geq a_1^\alpha - a_2^\alpha - \cdots - a_n^\alpha$,

(5)

где $\alpha \in [0, 1]$.

Доказательство. Докажем по индукции. При $\alpha = 1$ мы получим знак равенства. $(a_1 - a_2 - \cdots - a_n)^\alpha = [a_1 - (a_2 + a_3 + \cdots + a_n)]^\alpha$. По предположению 2 эта величина будет не меньше, чем $a_1^\alpha - (a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^\alpha$. Так как $(a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^\alpha \leq a_2^\alpha + a_3^\alpha + \cdots + a_n^\alpha$, то отсюда получим требуемое.

Предположение 6. Пусть функция $a(t)$, $t \in [0, T]$ удовлетворяет условию

$$a(0) - \int_0^t a(s)ds \geq a(t) \geq 0.$$

Тогда при $\alpha \in [0, 1]$

$$\left(a(0) - \int_0^t a(s)ds \right)^\alpha \geq a^\alpha(0) - \int_0^t a^\alpha(s)ds.$$

(6)

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(t) = \left(a(0) - \int_0^t a(s)ds \right)^\alpha - a^\alpha(0) + \int_0^t a^\alpha(s)ds$$

$$f'(t) = \alpha \left(a(0) - \int_0^t a(s)ds \right)^{\alpha - 1} \cdot (-a(t)) + a^\alpha(t) = a^\alpha(t) \left[1 - \left(\frac{a(t)}{a(0) + \int_0^t a(s)ds} \right)^{1-\alpha} \right].$$

Так как $\dfrac{a(t)}{a(0) - \int_0^t a(s)ds} < 1$, то $f'(t) > 0$, т.е. $f(t)$ монотонно возрастает в промежутке $[0, T]$ и

$$0 = \min_{t \in [0, T]} f(t) \leq \left(0(0) - \int_0^t a(s)ds \right)^\alpha - a^\alpha(0) + \int_0^t a^\alpha(s)ds,$$

что и требовалось доказать.

Примеры.

1. Пусть $a(t) \equiv 1$. Тогда из (4) следует: $(1 + t)^\alpha \leq 1 + t$.

2. Если $a = 1, b = t,$ то из (1) получим $(1 + t)^\alpha \leq 1 + t^\alpha$.

3. При $a(t) = 1 - t$. $a^\alpha(0) + \int_0^t a^\alpha(s)ds = 1 + \int_0^t (1 - s)^\alpha ds = 2 - \dfrac{(1 - t)^{1+\alpha}}{1 + \alpha}$ и получим

$$\left(a(0) + \int_0^t a(s)ds \right)^\alpha = \left(1 + t - \frac{t^2}{2} \right)^\alpha \leq 2 - \frac{(1 - t)^{1+\alpha}}{1 + \alpha};$$

4. При $a(t) = \cos t$. $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2} \right]$, из (4) получим $\left(1 + \int_0^t \cos s ds \right)^\alpha \leq 1 + \int_0^t \cos^\alpha s ds$.

5. Пусть $a(t)=(1-t)^k,\ k\ge 1,\ t\in[0,1]$. Ясно, что $a(0)=1$ и

$$a(0)-0\int_0^t (1-s)^k\,ds = 1+\frac{(1-t)^{k+1}-1}{k+1}\ge (1-t)^k = a(t),$$

причем равенство достигается при $t=0$.

Значит, по предположению 6

$$\left(1+\frac{(1-t)^{k+1}-1}{k+1}\right)^{\alpha}\ge 1-\int_0^t (1-s)^{k\alpha}\,ds = 1+\frac{(1-t)^{k\alpha+1}}{k\alpha+1};$$

т.е. $\left(1+\frac{(1-t)^{k+1}-1}{k+1}\right)^{\alpha}\ge 1-\frac{1-(1-t)^{k\alpha+1}}{k\alpha+1}$; в частности, при $k=1$ имеем

$$\left(1-\frac{1-(1-t)^2}{2}\right)^{\alpha}=\left(1-\frac{2t-t^2}{2}\right)^{\alpha}\ge 1-\frac{1-(1-t)^{1+\alpha}}{1+\alpha}\Rightarrow\left(1-t+\frac{t^2}{2}\right)^{\alpha}\ge\frac{\alpha+(1-t)^{1+\alpha}}{1+\alpha}.$$

Список литературы

1. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1989. – 736 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
3. Очан Ю.С.. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение. 1981. – 272 с.