

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. И. РАЗЗАКОВА**

**ТОКМОКСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

**Кафедра «Программное обеспечение компьютерных систем»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
к выполнению лабораторных работ по дисциплине  
«Основы теории управления» в среде  
MatLab  
Часть 1**

**БИШКЕК – 2011**

**«Рассмотрено»**

на заседании кафедры  
ПОКС  
Прот. № 4 от 13.11.2010 г.

**«Одобрено»**

Учебно-методической комиссией  
ТТИ КГТУ им. И.Раззакова  
Прот. № 3 от 22.11.2010 г.

Составитель ХИЖНЯК А.Т.

Методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Основы теории управления» в среде MatLab. Часть 1. / ТТИ КГТУ им. И.Раззакова; сост. М.А.Хижняк. – Б.: ИЦ «Текник», 2011. – 32 с.

Предлагаемая работа является развернутым руководством, содержащим рекомендации по выполнению лабораторных работ для студентов, обучающихся по специальности 552801.04 – «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем». В данном руководстве приведены требования к подготовке и выполнению лабораторных работ, порядок защиты и примеры их выполнения, краткие сведения из теории. Методические указания адресованы не только студентам указанной специальности, но и студентам смежных специальностей, например ИВТ и ИСЭ.

Рецензент к.т.н., доцент К.Дж. Боскебеев.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
к выполнению лабораторных работ по дисциплине  
«Основы теории управления» в среде  
MatLab  
Часть 1**

Составитель *Хижняк М.А.*

---

Тех. редактор *Бейшеналиева А.И.*

---

Подписано к печати 17.01.2011 г. Формат бумаги 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офс. Печать офс. Объем 2 п.л. Тираж 50 экз. Заказ 18. Цена 29,8  
Бишкек, ул. Сухомлинова, 20. ИЦ «Текник» КГТУ им. И.Раззакова, т.: 54-29-43  
e-mail: [beknur@mail.ru](mailto:beknur@mail.ru)

## *Содержание*

Лабораторная работа № 1. Динамические и частотные характеристики САУ...5	
Варианты заданий к лабораторной работе № 1.....10	10
Лабораторная работа № 2. Анализ и синтез САУ методом корневого годографа.....12	12
Варианты заданий к лабораторной работе № 2.....21	21
Лабораторная работа № 3. Описание систем в пространстве состояний.....22	22
Варианты заданий к лабораторной работе № 3.....30	30

## *Пояснительная записка*

Целью проведения лабораторных работ является приобретение навыков определения передаточных функций в системах автоматического регулирования. В ходе лабораторных работ студенты должны научиться строить и исследовать импульсные, переходные, амплитудные и фазочастотные характеристики типовых звеньев; исследовать отдельные блоки систем управления с построением импульсных и переходных характеристик системы; строить структурные схемы систем управления и выполнять математическое моделирование с целью определения оптимальных параметров системы; программно реализовывать алгоритмы управления в цифровых системах.

Методические указания посвящены инструментальному средству создания таких программ в среде Matlab. В данных методических указаниях рассматриваются основные понятия и конкретные примеры, помогающие студентам ориентироваться в разработке и изучении методов и средств систем управления и закономерностей, протекающих в них процессах и быстро создавать собственные программы согласно варианту задания.

Конкретно предлагается освоить среду Matlab. Обусловлено это следующими факторами. Программа предназначена для моделирования линейных и нелинейных цепей в системах автоматического управления. Работает с моделями, которые можно представить в форме блок-схем.

С помощью этой программы возможно:

- построение любых схем моделей,
- задание параметров интегрирования и параметров элементов,
- сохранение в файле и считывание из файла модели,
- построение зависимостей от времени в любых точках схемы,
- построение фазовых портретов для любых схем,
- построение частотных характеристик для любых линейных схем,
- вывод результатов расчёта в графической и табличной форме,
- вывод на печать схемы и её параметров, результатов расчёта.

## Лабораторная работа 1

### Динамические и частотные характеристики САУ

**Цель:** Ознакомление с динамическими и частотными характеристиками систем автоматического управления (САУ) и получение навыков исследования линейных динамических моделей.

**Материальное обеспечение:** Компьютерное оборудование и программное обеспечение.

**Постановка задачи:** В качестве объекта исследования выступают линейные (линеаризованные) динамические стационарные системы управления с одним входом и одним выходом. При этом модель одномерной САУ задана в виде комплексной передаточной функции, записанной как отношение полиномов

$$W(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

Необходимо:

1. Определить полюса и нули передаточной функции  $s_i^*$ , ( $i = \overline{1, n}$ ),  $s_j^0$ , ( $j = \overline{1, m}$ ).
2. Записать дифференциальное уравнение, определяющее функционирование САУ.
3. Построить графики переходной и импульсно-переходной функции:  $h(t)$ ,  $w(t)$ .
4. Построить логарифмические частотные характеристики  $L(\omega)$ .
5. Построить частотный годограф Найквиста  $W(i\omega)$ ,  $\omega = [0, \infty]$ .
6. Представить исходную систему в виде последовательного соединения типовых звеньев. Построить характеристики этих типовых звеньев.

**Краткие сведения из теории:** Рассмотрим систему автоматического управления (САУ), описываемую линейным (линеаризованным) дифференциальным уравнением вида:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t), \quad (1.1)$$

где  $u(t)$  – входной процесс,  $y(t)$  – выходной процесс,  $a_i, b_j$ , ( $i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$ ) – постоянные коэффициенты,  $n, m$  ( $n \geq m$ ) – постоянные числа. В операторной форме выражение (1.1) может быть записано –  $A(D)y(t) = B(D)u(t)$ .

Здесь  $D$  – оператор дифференцирования ( $D \equiv \frac{d}{dt}$ ). Отсюда преобразование “вход-выход” системы –

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{B(D)}{A(D)} = W(D), \quad (1.2)$$

где  $W(D)$  называется операторной передаточной функции.

Один из способов моделирования систем заключается в представлении преобразования “вход-выход” в виде комплексной передаточной функции:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = W(s), \quad (1.3)$$

которая получается путем применения преобразования Лапласа к (1.2) при начальных нулевых условиях. Здесь  $s$  – комплексная переменная. Связь между операторной (1.2) и комплексной (1.3) передаточными функциями можно записать в виде

$$W(s) = W(D)|_{D=s}.$$

Комплексные числа, являющиеся корнями многочлена  $B(s)$ , называются нулями передаточной функции, а корни многочлена  $A(s)$  – полюсами.

Явный вид связи входа и выхода определяется выражением:

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau)v(\tau) d\tau, \quad (1.4)$$

где  $w(t)$  – оригинал (т.е. полученный с помощью обратного преобразования Лапласа) комплексной передаточной функции  $W(s)$ .

Динамические свойства систем характеризуют реакции на входные воздействия специального вида. В частности анализ выхода системы на единичный скачок и  $\delta$ -функцию (дельта-функцию).

Пусть  $u(t) = 1(t)$ , то есть на вход системы подается функция Хевисайда (единичный скачок), определяемая

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \leq 0, \\ 1, & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

График функции Хевисайда приведен на рис. 1.1. Реакция САУ на единичный скачок называется переходной функцией системы и обозначается  $h(t)$ .

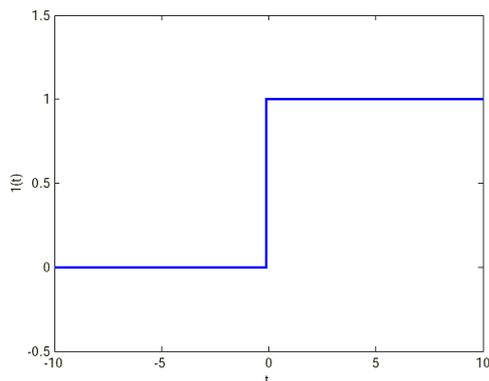


Рис. 1.1. Функция Хевисайд

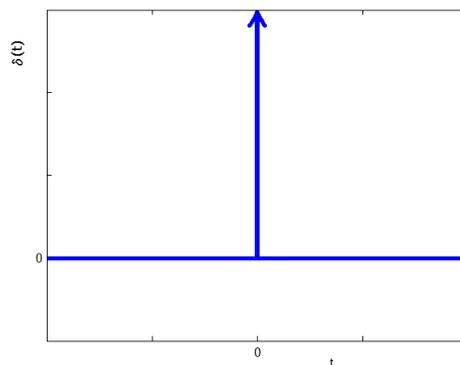


Рис. 1.2. Функция Дирака

Если  $u(t) = \delta(t)$ , то есть на вход системы поступает функция Дирака ( $\delta$ -функция, импульсная функция, рис. 1.2) определяемая

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{при } t = 0, \\ 0, & \text{при } t \neq 0, \end{cases}$$

то реакция САУ называется импульсной переходной функцией системы и обозначается  $w(t)$ . Таким образом оригинал комплексной передаточной функции можно измерить как реакцию систему на импульс.

Импульсная и переходная функции системы связаны соотношением (из (1.4)):

$$h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau.$$

Благодаря широкому применению при исследовании устойчивости динамических систем и проектировании регуляторов получили распространение частотные характеристики.

Пусть на вход системы с передаточной функцией  $W(s)$  подается гармонический сигнал

$$u(t) = a_u \cos(\omega t), t > 0. \quad (1.5)$$

В этих условиях справедлива следующая теорема:

Если звено является устойчивым, то установившаяся реакция  $y(t)$  на гармоническое воздействие является функцией той же частоты с амплитудой

$$a_y = a_u |W(i\omega)|,$$

и относительным сдвигом по фазе

$$\psi = \arg W(i\omega).$$

Таким образом, выход определяется гармонической функцией

$$y(t) = a_u |W(i\omega)| \cos(\omega t + \arg W(i\omega)),$$

где  $i$  – комплексная единица ( $i^2 = -1$ ),  $W(i\omega) = W(s)|_{s=i\omega}$  – частотная характеристика.

Частотной характеристикой  $W(i\omega)$  стационарной динамической системы называется преобразование Фурье переходной функции:

$$W(i\omega) = F[h(t, \tau)] = \int_0^{\infty} w(t - \tau) e^{-i\omega(t-\tau)} d\tau,$$

где  $w(t - \tau)$  – импульсная переходная функция.

Связь между комплексной передаточной функцией и частотной характеристикой, исходя из свойств преобразований Фурье можно представить в виде соотношения:

$$W(s)|_{s=i\omega} = W(i\omega).$$

При фиксированном значении  $\omega$  частотная характеристика является комплексным числом, и, следовательно, может быть представлена в виде

$$W(i\omega) = A(\omega) e^{i\omega - \psi(\omega)} = U(\omega) + iV(\omega).$$

Здесь

$A(\omega) = |W(i\omega)|$  – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ);

$\psi(\omega) = \arg W(i\omega)$  – фазово-частотная характеристика (ФЧХ);

$U(\omega) = \operatorname{Re} W(i\omega)$  – вещественная частотная характеристика (ВЧХ);

$V(\omega) = \operatorname{Im} W(i\omega)$  – мнимая частотная характеристика (МЧХ).

Геометрическое место точек  $W(i\omega)$  на комплексной плоскости при изменении  $\omega$  от  $\omega_0$  до от  $\omega_1$  (обычно  $\omega_0 = 0$ ,  $\omega_1 = \infty$ ), называется амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ) или частотным годографом Найквиста.

Имеет широкое практическое значение диаграмма Боде (логарифмическая амплитудная характеристика, ЛАХ), которая определяется как  $L = 20 \lg A(\omega)$ , измеряется в децибелах и строится как функция от  $\lg \omega$ .

**Последовательность выполнения работы:** Для выполнения лабораторной работы используется пакет прикладных программ (ППП) Control System Toolbox. ППП предназначен для работы с ЛТИ-моделями (Linear Time Invariant Models) систем управления.

В Control System Toolbox имеется тип данных, определяющих динамическую систему в виде комплексной передаточной функции. Синтаксис команды,

создающий LTI-систему с одним входом и одним выходом в виде передаточной функции:

$$TF([b_m, \dots, b_1, b_0], [a_n, \dots, a_1, a_0]),$$

$b_m, \dots, b_1$  – значения коэффициентов полинома  $B$  в (1.3),

$a_n, \dots, a_1$  – значения коэффициентов полинома  $A$  в (1.3).

Для выполнения работы могут применяться команды, приведенные в таб. 1.1.

Таблица 1.1

Некоторые команды *Control System Toolbox*

Синтаксис	Описание
<code>pole(&lt;LTI-объект&gt;)</code>	Вычисление полюсов передаточной функции
<code>zero(&lt;LTI-объект&gt;)</code>	Вычисление нулей передаточной функции
<code>step(&lt;LTI-объект&gt;)</code>	Построение графика переходного процесса
<code>impulse(&lt;LTI-объект&gt;)</code>	Построение графика импульсной переходной функции
<code>bode(&lt;LTI-объект&gt;)</code>	Построение логарифмических частотных характеристик (диаграммы Боде)
<code>nyquist(&lt;LTI-объект&gt;)</code>	Построение частотного годографа Найквиста

Для определения корней полиномов степени  $k$ , может, также, применяться команда MATLAB `roots(P)`, которая в качестве аргумента  $P$ , получает матрицу коэффициентов полинома  $[p_k, \dots, p_0]$ .

Другим вариантом получения графиков динамических характеристик САУ является использование графического интерфейса ППП CST – LTI viewer, вызов которого осуществляется командой `ltiview`, которой, в качестве параметра, можно указать имя переменной, содержащей LTI-объект.

Таким образом, выполнение лабораторной работы состоит из следующих шагов:

1. Изучить теоретические сведения.
2. Запустить систему MATLAB.
3. Создать `tf`-объект, в соответствии с заданным вариантом.
4. Составить дифференциальное уравнение, определяющее функционирование САУ.
5. Определить полюса передаточной функции  $s_i^*$ , ( $i = \overline{1, n}$ ) с использованием команды `roots` или `pole`.
6. Определить нули передаточной функции  $s_j^0$ , ( $j = \overline{1, m}$ ) с использованием команды `roots` или `zero`.
7. Используя LTI-viewer, или соответствующие команды (табл.1) получить динамические характеристики – переходную функцию  $h(t)$ , импульсно-переходную функцию  $w(t)$  и частотные характеристики – диаграмму Боде, частотный годограф Найквиста.
8. Получить представление исходной функции в виде произведения типовых звеньев.
9. Ответить на контрольные вопросы.
10. Оформить отчет.
11. Сдать отчет преподавателю и защитить работу.

**Отчет о работе:** Отчет оформляется в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению лабораторных работ в вузе, и должен содержать титульный лист, формулировку цели работы, постановку задачи в соответствии с вариантом задания, результаты работы, выводы.

Примечание: Варианты заданий, состоят из двух цифр: первая – номер передаточной функции, вторая – номер набора значений коэффициентов.

**Методический пример:** Задана передаточная функция САУ

$$W = \frac{s + 2}{3s^3 + 4s^2 + 5s + 3}$$

Найдем ее динамические и частотные характеристики. Будем работать в командном режиме среды MATLAB.

1. Создадим LTI-объект с именем w, для этого выполним:

```
>> w=tf([1 2],[3 4 5 3])
```

```
Transfer function:
      s + 2
-----
3 s^3 + 4 s^2 + 5 s + 3
```

2. Найдем полюса и нули передаточной функции с использованием команд pole, zero.

```
>> pole(w)
```

```
ans =

-0.2639 + 1.0825i
-0.2639 - 1.0825i
-0.8055
```

```
>> zero(w)
```

```
ans =

-2
```

3. Построим переходную функцию командой step(w). Результат ее выполнения приведен на рис. 1.3.

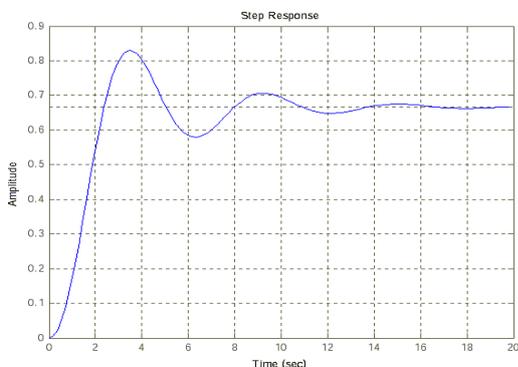


Рис. 1.3. Переходная функция  $h(t)$

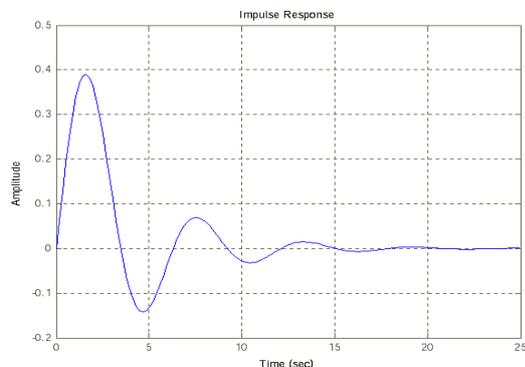


Рис. 1.4. Импульсная переходная функция

4. Построим импульсную переходную функцию командой `impz(w)`. Результат показан на рис. 1.4.

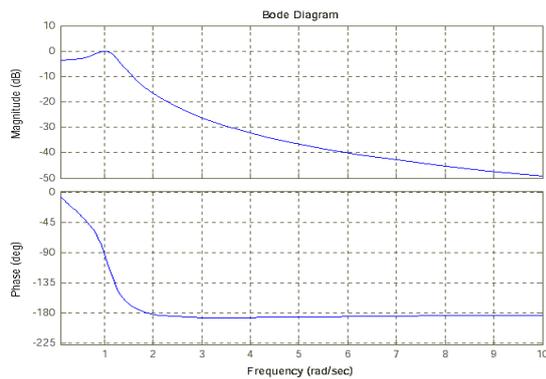


Рис. 1.5. Логарифмические частотные характеристики

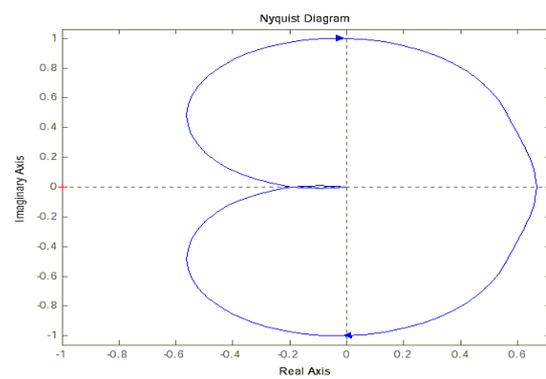


Рис. 1.6. частотный годограф

5. Диаграмму Бode получим, используя команду `bode(w)` – рис. 1.5.

6. Определим частотный годограф Найквиста, выполнив команду `nyquist(w)` – рис. 1.6.

Аналогичные результаты (рис. 1.7) можно получить, используя команду `ltiview(w)`, с соответствующими настройками в меню “Plot Configuration”.

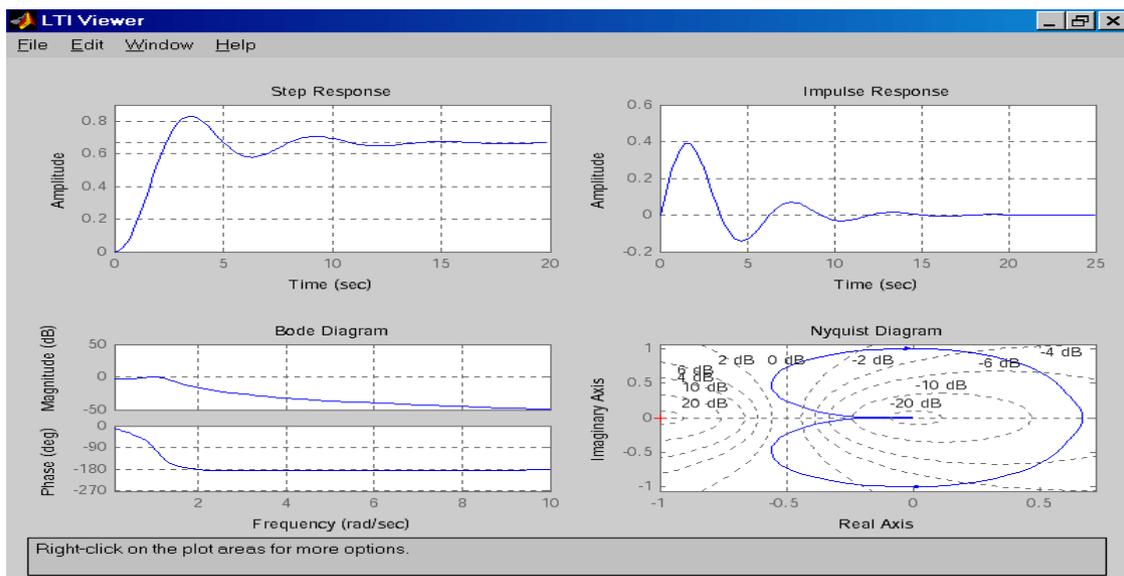


Рис. 1.7. LTI-viewer

Каждая из построенных характеристик полностью и однозначно определяет рассматриваемую систему управления.

### Контрольные вопросы

1. Представьте систему в виде последовательного соединения типовых звеньев.
2. Дайте определение и поясните физический смысл переходной функции.
3. Представьте исходную систему в пространстве состояний.
4. Найдите передаточную функцию замкнутой системы.
5. Постройте динамические характеристики типовых звеньев.
6. Определите вид ЛЧХ для пропорционально – интегрально – дифференциального регулятора.

### Список использованных источников

1. Повзнер Л.Д. Теория систем управления. Учебное пособие для вузов. - М.: Изд. МГГУ, 2002. - 472 с.
2. Туманов М.П. Теория автоматического управления. Лекции. URL: [http://elib.ispu.ru/library/lessons/Tihonov\\_2/index.htm](http://elib.ispu.ru/library/lessons/Tihonov_2/index.htm).
3. Туманов М.П. Теория управления. Теория линейных систем автоматического управления. Учебное пособие. – М.: МГИЭМ. 2005. – 82 с. URL: [http://window.edu.ru/window\\_catalog/files/r24738/5.pdf](http://window.edu.ru/window_catalog/files/r24738/5.pdf).
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975.
5. Бирюков С.В. Основные понятия теории автоматического управления. - URL: [http://bookz.ru/rar/bookz/teacher/tau\\_ucheb.rar](http://bookz.ru/rar/bookz/teacher/tau_ucheb.rar)

### Варианты заданий

№	Вид передаточной функции	№	Коэффициенты полиномов						
			$b_0$	$b_1$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
1.	$W(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$		$b_0$	$b_1$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
		1.	0	3	1	2	3	0	1
		2.	2	6	4	0	1	5	1
		3.	0	-3	5	2	0	2	1
		4.	4	2	3	4	5	3	1
		5.	0	1	-2	-2	-3	-2	0
2.	$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$		$b_0$	$b_1$	$b_2$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
		1.	0	-3	2	4	2	3	9
		2.	8	0	-3	-4	-6	-4	-1
		3.	-4	6	-2	5	5	0	1
		4.	6	-8	-7	0	-6	-3	-1
		5.	2	-1	-3	-1	0	-7	-2
3.	$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_1 p + a_0}$		$b_0$	$b_1$	$b_2$	$a_0$	$a_1$	$a_3$	$a_4$
		1.	0	2	8	-3	7	-7	1
		2.	-5	0	3	-8	-2	-1	-6
		3.	-7	1	2	0	5	2	9
		4.	-6	4	-4	1	0	6	3
		5.	2	-2	-1	5	3	0	9
4.	$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$		$b_0$	$b_1$	$b_2$	$a_0$	$a_1$	$a_3$	$a_4$
		1.	0	-5	4	3	7	9	1
		2.	7	-6	0	5	8	2	2
		3.	-2	-8	2	0	4	3	3
		4.	-7	-1	6	9	0	4	2
		5.	-3	7	-4	4	5	0	1
5.	$W(p) = \frac{b_3 p^3 + b_2 p^2}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$		$b_2$	$b_3$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
		1.	0	-5	4	3	7	9	1
		2.	7	-6	0	5	8	2	2
		3.	-2	-8	2	0	4	3	3
		4.	-7	-1	6	9	0	4	2
		5.	-3	7	-4	4	5	0	1

## Лабораторная работа 2

### Анализ и синтез САУ методом корневого годографа

**Цель:** Ознакомление с методикой построения корневых годографов для анализа и синтеза линейных (линеаризованных) систем автоматического управления.

**Материальное обеспечение:** Компьютерное оборудование и программное обеспечение.

**Постановка задачи:** Дана модель разомкнутой системы, записанная в виде отношения произведений типовых звеньев:

$$W(s) = \frac{K \cdot s^{\alpha_1} \prod_{j=1}^{\beta_1} (T_j s + 1) \prod_{j=1}^{\gamma_1} (T_j^2 s^2 + 2T_j \zeta_j s + 1)}{s^{\alpha_2} \prod_{j=1}^{\beta_2} (T_j s + 1) \prod_{j=1}^{\gamma_2} (T_j^2 s^2 + 2T_j \zeta_j s + 1)}.$$

Необходимо:

1. Построить корневой годограф.
2. Получить коэффициент усиления  $K^{кр}$ , при котором система находится на границе устойчивости.
3. Вычислить частоту  $\omega^{кр}$ , при которой в системе возникают незатухающие колебания.
4. Нанести на ветви корневого годографа значения полюсов замкнутой системы, соответствующие  $0.5 \cdot K^{кр}$  и  $0.25 \cdot K^{кр}$ .
5. Привести выражение для  $W_3(s)$  в виде произведения типовых звеньев. Указать значения параметров типовых звеньев.

**Краткие сведения из теории:** В ряде случаев, имеющих практическое значение, модель линейной системы автоматического управления (САУ) задается в виде структурной схемы, состоящей из типовых звеньев, математическое описание которых задано в операторной форме. Связь между входом и выходом системы задается в виде передаточной функции  $W(s)$ . В общем виде передаточную функцию  $W(s)$  можно представить в виде:

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (2.1)$$

где  $s$  – комплексная переменная,  $B(s)$  – полином степени  $m$ ;  $A(s)$  – полином степени  $n$ .

Для физически реализуемых САУ  $m \leq n$ . Коэффициенты указанных полиномов действительные числа.

Применение метода корневого годографа (КГ) обусловлено фундаментальной зависимостью поведения линейной САУ от полюсов и нулей ее передаточной функции. Под полюсами подразумеваются корни полинома – знаменателя  $A(s)$ , а под нулями – корни полинома числителя  $B(s)$ . Полином  $A(s)$  называется также характеристическим многочленом передаточной функции  $W(s)$ .

Положение полюсов  $W(s)$  на комплексной плоскости определяет устойчивость САУ, а в совокупности с нулями вид импульсной переходной функции  $w(t)$  и переходной функции  $h(t)$ .

Метод корневого годографа позволяет находить полюса и нули передаточной функции замкнутой системы, располагая полюсами и нулями разомкну-

той системы при изменении коэффициента усиления разомкнутой системы  $k$ . Метод корневого годографа является также методом проектирования пропорционального устойчивого регулятора.

Передаточную функцию разомкнутой системы  $W_p(s)$  представим в виде:

$$W_p(s) = \frac{K C \prod_{j=1}^m (s - s_j^0)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i^*)}, \quad (2.2)$$

где  $s_j^0$  – нули передаточной функции  $W_p(s)$ , ( $j = \overline{1, m}$ );  $s_i^*$  – полюса передаточной функции  $W_p(s)$ , ( $i = \overline{1, n}$ ),  $n$  и  $m$  – порядки знаменателя и числителя;  $K$  – коэффициент усиления разомкнутой системы;  $C$  – коэффициент представления.

Передаточная функция разомкнутой системы, как правило, задается в виде отношения произведений передаточных функций стандартных (типовых) звеньев, при описании которых используются выражения трех видов:

$$Ts \quad (2.3)$$

$$Ts + 1 \quad (2.4)$$

$$T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1. \quad (2.5)$$

Здесь  $T$  постоянная времени [с].

Если выражения (2.3), (2.4), (2.5) стоят в знаменателе передаточных функций звеньев (в числителе 1), то звенья называются соответственно интегрирующим, апериодическим, колебательным. Для колебательного звена  $\zeta$  – безразмерный коэффициент затухания ( $0 < \zeta < 1$ ). Если выражения (2.3), (2.4), (2.5) стоят в числителе передаточных функций звеньев (2.1), то звенья называются соответственно дифференцирующим, форсирующим первого порядка, форсирующим второго порядка.

Для перехода от стандартной формы записи к формуле (2.2) необходимо вычислить полюса и нули соответствующих типовых звеньев.

Для передаточных функций, использующих выражение (2.3) –  $s^{*(0)} = 0$ , (2.6)

использующих выражение (2.4) –  $s^{*(0)} = -\frac{1}{T}$ , (2.7)

использующих выражение (2.5) –  $s_{1,2}^{*(0)} = -\frac{\zeta}{T} \pm \sqrt{\left(\frac{\zeta}{T}\right)^2 - \frac{1}{T^2}}$ , (2.8)

или  $s_{1,2}^{*(0)} = -\frac{1}{T}(\zeta \pm i \cos \varphi)$  (2.9)

где  $\varphi = \arcsin \zeta$ .

Коэффициент представления  $C$  вычисляется по формуле

$$C = \frac{\prod_{j=1}^m T_j^0}{\prod_{i=1}^n T_i^*} \quad (2.10)$$

Замечание: Для звеньев, использующих выражение (2.5), соответствующая постоянная времени входит в выражение (2.10) в квадрате.

При замыкании системы с передаточной функцией  $W_p(s)$  единичной обратной связью передаточная функция замкнутой системы  $W_3(s)$  принимает вид:

$$W_3(s) = \frac{W_p(s)}{1 \pm W_p(s)}, \quad (2.11)$$

где знак “+” соответствует отрицательной обратной связи; знак “–” соответствует положительной обратной связи.

Структурная схема системы с обратной связью приведена на рис. 2.1.

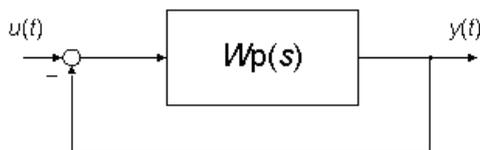


Рис. 2.1. Структурная схема САУ

Из (2.11) следует, что нули передаточной функции замкнутой системы равны нулям передаточной функции разомкнутой системы.

Задачу можно представить следующим эквивалентным образом. Есть объект управления, определяемый передаточной функцией  $W_p(s) = c \prod_{j=1}^m (s - s_j^0) / \prod_{i=1}^n (s - s_i^*)$ . Необходимо найти значение параметра пропорционального регулятора (рис. 2.2.)

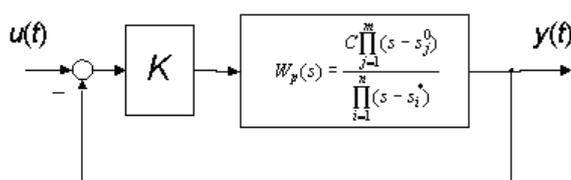


Рис. 2.2. Эквивалентная схема САУ

Для определения полюсов замкнутой системы (рис. 2.1.) необходимо решить уравнение:  $W_p(s) = -1$  (2.12)

Так как  $W_p(s)$  является функцией комплексного переменного  $s$ , то уравнение (2.12) распадается на два уравнения:

– уравнение модулей:  $|W(s)|=1$  (2.13)

– уравнение аргументов:

$\arg W(s) = \pm (2v + 1)\pi$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots$  (2.14a) для отрицательной обратной связи и

$\arg W(s) = \pm 2v\pi$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots$  (2.14б) для положительной обратной связи.

Уравнения (2.14) имеют наглядный геометрический смысл. Если точка  $s$  является полюсом замкнутой системы, то, проведя в точку  $s$  вектора из всех нулей  $W_p(s)$  (обозначим аргументы этих векторов  $\theta_j^0$ ) и вектора из всех полюсов  $W_p(s)$  (обозначим аргументы этих векторов  $\theta_i^*$ ), уравнение (2.14a) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^m \theta_j^0 - \sum_{i=1}^n \theta_i^* = \pm(2v + 1)\pi, v = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15a)$$

а уравнение (2.14б) в виде:

$$\sum_{j=1}^m \theta_j^0 - \sum_{i=1}^n \theta_i^* = \pm 2v\pi, v = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15б)$$

Углы  $\theta$  отсчитываются от положительного направления действительной оси. Знак угла “+” соответствует повороту против часовой стрелки, знак угла “–” соответствует повороту по часовой стрелке.

Геометрическое место точек на комплексной плоскости “ $s$ ”, удовлетворяющее выражениям (2.15a) и (2.15б) называется корневым годографом.

Как следует из (2.15), конфигурация корневого годографа не зависит от коэффициента усиления  $K$ , но каждому конкретному значению  $K$  однозначно соответствуют точки на корневом годографе.

Для определения этого соответствия достаточно воспользоваться уравнением (2.13) в следующей интерпретации:

$$\frac{Kc \prod_{j=1}^m l_j^0}{\prod_{i=1}^n l_i^*} = 1, \quad (2.16)$$

где  $l_j^0$  – модуль (длина) вектора, проведенного из  $j$ -нуля в точку  $s$  КГ;  $l_i^*$  – модуль вектора, проведенного из  $i$ -полюса в ту же точку  $s$ .

Приведем свойства корневых годографов (случай отрицательной обратной связи):

1. Ветви корневого годографа непрерывны и расположены на комплексной плоскости симметрично относительно действительной оси.
2. Число ветвей КГ равно порядку системы  $n$ . Ветви начинаются в  $n$  полюсах разомкнутой системы при  $K = 0$ . При возрастании  $K$  от 0 до бесконечности полюса замкнутой системы двигаются по ветвям КГ.
3. Отрезки действительной оси, по которым перемещаются действительные полюса замкнутой системы являются действительными ветвями корневого годографа. Эти ветви находятся в тех частях действительной оси, справа от которых расположено нечетное общее число действительных полюсов и нулей разомкнутой системы.
4.  $m$  ветвей КГ при возрастании  $K$  от 0 до бесконечности заканчиваются в  $m$  нулях  $W_p(s)$ , а  $(n - m)$  ветвей при  $K$ , стремящемся к бесконечности, удаляются от полюсов вдоль асимптот.
5. Асимптоты в виде звезды из  $(n - m)$  полупрямых выходят из точки с координатой

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^m s_j^0 - \sum_{i=1}^n s_i^*}{n - m}$$

на действительной оси под углами

$$\theta_a = \frac{2v + 1}{n - m} \pi, \quad (v = \overline{0, n - m - 1})$$

к действительной оси.

6. Угол выхода  $\vartheta_i^*$  ветви КГ из полюса  $s_i^*$  определяется из уравнения (2.15а), примененного к данному полюсу. Аналогично определяется угол входа ветви КГ в нуль  $s_j^0$ .

7. При расположении ветвей корневого годографа в левой полуплоскости  $s$  САУ устойчива. При пересечении ветвей КГ мнимой оси слева направо САУ становится неустойчивой. Пусть при  $K = K^{кр}$  пересечение КГ с мнимой осью произойдет в некоторой точке  $i\omega^{кр}$ . Назовем это значение коэффициента усиления критическим  $K^{кр}$ , а величину  $\omega^{кр}$  критической угловой частотой, на которой система становится неустойчивой.

Метод КГ позволяет выбрать коэффициент усиления САУ, подобрать расположение полюсов и нулей передаточной функции корректирующих звеньев, определить параметры доминирующих полюсов САУ (ближайших к началу координат плоскости  $s$ ).

В качестве примеров, приведем КГ для двух систем автоматического управления.

На рисунке 2.3а приведен корневой годограф САУ, передаточная функция разомкнутой системы, которой равна:

$$W_{p1} = \frac{K(s+0.1)}{s^2}.$$

Рисунок 2.3б иллюстрирует КГ САУ с передаточной функцией разомкнутой системы вида:

$$W_{p2} = \frac{K}{s(s+10)}.$$

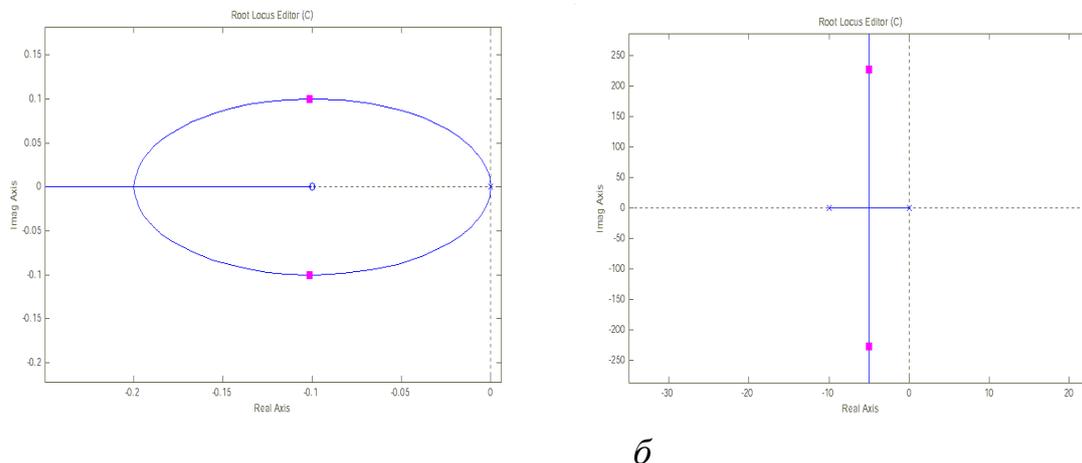


Рис. 2.3. Примеры корневых годографов

**Последовательность выполнения:** Для выполнения работы используется GUI-интерфейс “SISO-Design Tool” из пакета прикладных программ Control System Toolbox.

Графический интерфейс предназначен для анализа и синтеза одномерных линейных (линеаризованных) систем автоматического управления (SISO - Single Input/Single Output).

В Control System Toolbox имеется тип данных, определяющих динамическую систему в виде набора полюсов, нулей и коэффициента усиления передаточной функции. Синтаксис команды, создающий LTI (Linear Time Invariant)-систему в виде объекта ZPK (zero-pole-gain) с одним входом и одним выходом ZPK( $[s_1^0 \dots s_m^0]$ ,  $[s_1^x \dots s_n^x]$ ,  $K$ )

$s_1^0 \dots s_m^0$  – значения нулей системы,  $s_1^x \dots s_n^x$  – значения полюсов системы,  $K$  – коэффициент усиления.

Более естественным является вариант, при котором с помощью функции ZPK создается символьная переменная 's', которая затем используется для определения передаточной функции в виде отношения (2). Например, после выполнения команд

$$s = zpks('s'); W1 = (s+0.1)/(s^2)$$

произойдет создание переменной W1 типа ZPK, определяющей передаточную функцию вида  $W1 = \frac{(s+0.1)}{s^2}$ .

Запуск графического интерфейса SISO-Design Tool осуществляется командой Sisotool или выбором соответствующего пункта в окне “Launch Pad”.

Для выполнения лабораторной работы необходимо выбрать в меню View пункт Root Locus (корневой годограф), для отображения редактора Root Locus Editor. В правом верхнем углу SISO-Design Tool можно менять тип обратной связи (кнопка “+/-”) и структурную схему САУ. В лабораторной работе предполагается наличие отрицательной обратной связи, и структурной схемы, показанной на рис.2.1.

Для загрузки данных из рабочего пространства MATLAB необходимо использовать меню “File/Import”, в результате которой появляется диалог Import System Data. Необходимо, чтобы в результате импортирования данных получилась рассматриваемая схема САУ (рис. 2.1). Используя Root Locus Editor и значение коэффициента усиления (здесь  $C$  – Current Compensator), выполнить задания лабораторной работы. Изменение динамических и частотных характеристик замкнутой системы при изменении  $K$  можно проследить используя меню “Tools/Loop Responses”.

Таким образом, последовательность выполнения практической работы следующая:

1. Ознакомиться с основными элементами теории метода корневого годографа.
2. В соответствии с заданным вариантом нарисовать структурную схему САУ.
3. Запустить систему MATLAB.
4. Создать zpk-объект, в соответствии с заданным вариантом.
5. Определить значения полюсов и нулей разомкнутой системы  $W_p(s)$ .
6. Запустить SISO-Design Tool и построить КГ.
7. В соответствии с теорией проанализировать расположение ветвей корневого годографа.
8. Определить условия неустойчивости замкнутой САУ. Определить  $K^{кр}$  и  $\omega^{кр}$ .
9. Определить значения полюсов, соответствующие  $0.5K^{кр}$  и  $0.25K^{кр}$ .
10. Проанализировать влияние удаленных полюсов и нулей на величины  $K^{кр}$  и  $\omega^{кр}$ .
11. При  $K=1$  привести выражение для  $W_3(s)$  в виде произведения типовых звеньев. Указать значения параметров типовых звеньев.
12. Оформить отчет.

**Отчет о работе:** Отчет оформляется в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению в вузе, и должен содержать:

1. Титульный лист
2. Наименование и цель работы.
3. Исходные данные варианта задания и структурную схему САУ.
4. Чертежи комплексной плоскости и КГ. Нанести на все ветви значения  $K^{кр}$ ,  $0.5K^{кр}$  и  $0.25K^{кр}$ .
5. Выражение для  $W_3(s)$  в виде произведения типовых звеньев с указанными значениями параметров типовых звеньев.
6. Анализ результатов построения КГ.
7. Выводы.

**Замечание:** Если САУ устойчива (при любом  $K > 0$ ), то ограничиться построением КГ, удаленного от начала координат на удвоенный модуль наиболее удаленного от начала координат полюса разомкнутой системы.

**Методический пример:** Пусть необходимо исследовать САУ с передаточной функцией разомкнутой системы:

$$W(s) = \frac{(0.2s+1)}{s(0.1s+1)(0.04s^2+2\cdot 0.2\cdot 0.3s+1)}$$

1. Создадим ZPK-объект, найдем полюса и нули разомкнутой системы:

```
>> s = zpk('s'); W = (0.2*s+1)/(s*(0.1*s+1)*(0.2^2*s^2+2*0.2*0.3*s+1))

Zero/pole/gain:
      50 (s+5)
-----
s (s+10) (s^2 + 3s + 25)

>> pole(W)

ans =

      0
 -10.0000
 -1.5000 + 4.7697i
 -1.5000 - 4.7697i

>> zero(W)

ans =

    -5
```

2. Запустим SISO-Design Tool, настроим параметры и импортируем ZPK-объект из рабочего пространства MATLAB (рис. 2.4). В окне Root Locus Editor интерфейса SISO-Design Tool построится корневой годограф (рис. 2.5).

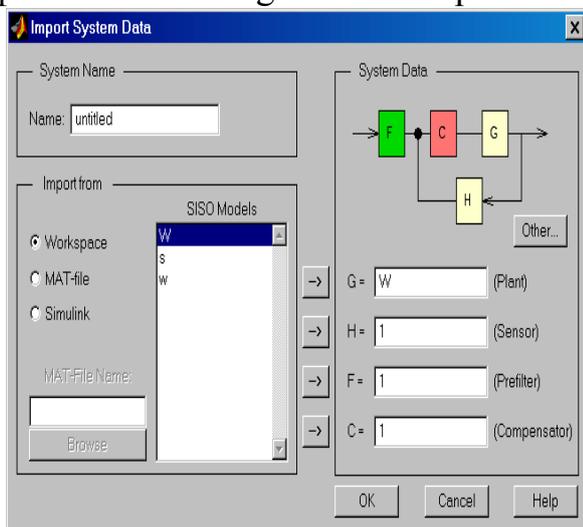


Рис. 2.4. Диалог импортирования данных в SISO-Design Tool

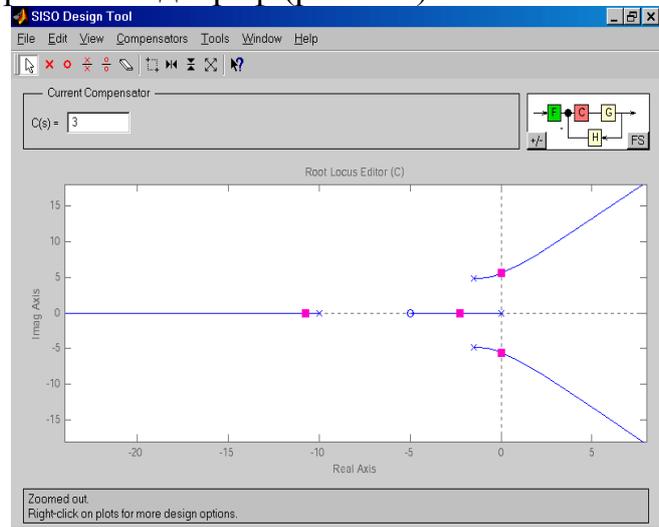


Рис 2.5. SISO-Design Tool

3. Захватив “мышью”, передвигать красным курсором по корневому годографу до пересечения ветвей с мнимой осью, определить значение  $K^{кр}$  (рис. 2.6). Перемещение курсора происходит также при вводе значения коэффициента усиления  $C$  в соответствующее поле ввода в верхней части GUI-интерфейса.

Для рассматриваемого случая  $K^{кр} \approx 3$ . Значение  $\omega^{кр}$  соответствует мнимой координате пересечения КГ мнимой оси. Просмотреть это значение можно в

нижней части интерфейса или выбрав меню пункт “View/Closed-Loop Poles” (рис. 2.7).

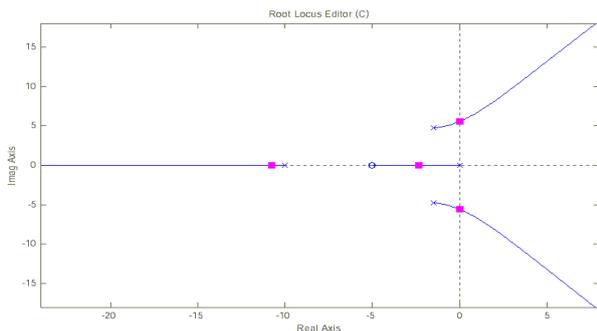


Рис. 2.6. Корневой годограф с нанесенным значением  $K^{кр}$

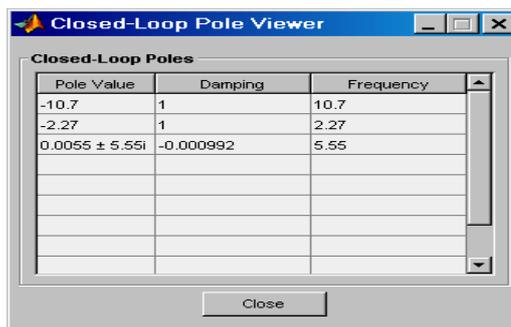
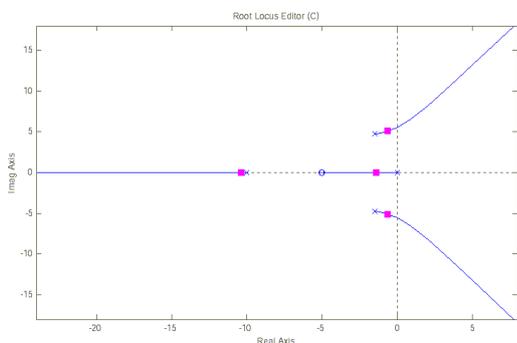
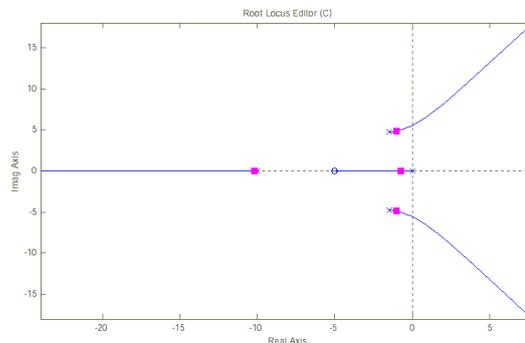


Рис. 2.7. Closed-Loop Poles Viewer

4. Зададим значения  $0.5K^{кр}$  и  $0.25K^{кр}$  (рис. 2.8а , 2.8б) и определим значения полюсов (рис. 2.9а , 2.9б).

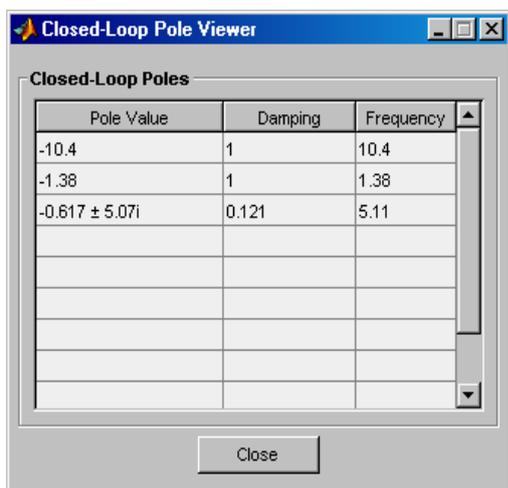


а.  $C = 0.5K^{кр}$

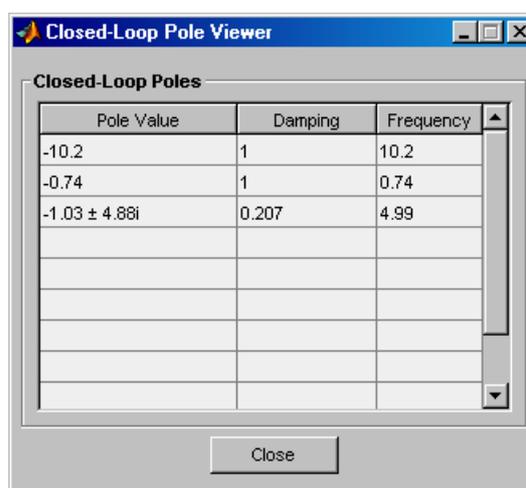


б.  $C = 0.25K^{кр}$

Рис. 2.7. Корневой годограф САУ



а.  $C = 0.5K^{кр}$



б.  $C = 0.25K^{кр}$

Рис. 2.9. Closed-Loop Poles Viewer

5. Например, для значения  $0.5K^{кр}$  построим вид переходной функции замкнутой системы. Для этого необходимо выбрать в меню пункт “Tools/Loop Responses/Closed-Loop Step”. Результат построения переходной функции – рис. 2.10. Видно, что система устойчива.

Меняя значения  $C$  можно увидеть в соответствующее изменение переходной функции или других характеристик системы в динамике. При изменении  $C$  происходит автоматическое обновление выбранных характеристик замкнутой системы.

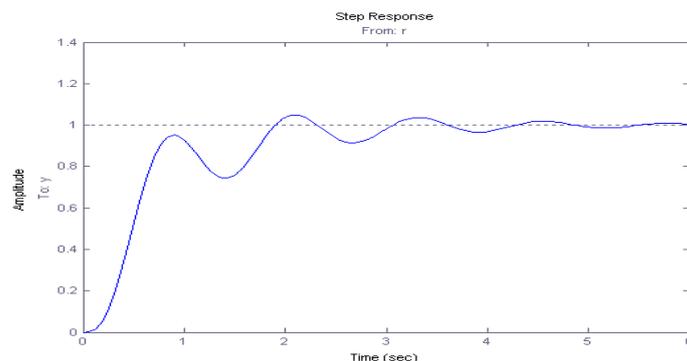


Рис. 2.10. Переходная функция при  $C = 0.5K^{kp}$

В работе на основе использования метода корневого годографа получены области значений коэффициента усиления, в которых система автоматического управления является устойчивой.

Замечание: Если САУ устойчива (при любом  $K > 0$ ), то ограничиться построением КГ, удаленного от начала координат на удвоенный модуль наиболее удалённого от начала координат полюса разомкнутой системы.

### **Контрольные вопросы**

1. Дать определение передаточной функции, полюсов, нулей, корневого годографа. Назвать типовые звенья САУ.
2. Что такое отрицательная обратная связь?
3. Показать влияние расположения нуля на поведение ветвей КГ (для примера из лабораторной работы).
4. Показать на конкретном примере, что по мере удаления ветви КГ от начала координат движение ветви в зависимости от  $K$  замедляется.
5. Вывести зависимость для малого перемещения ветвей КГ от исходного полюса в зависимости от изменения  $K$ .
6. Провести анализ влияния изменения расположения полюса или нуля на величины  $K^{кр}$  и  $\omega^{кр}$ .

### **Список использованных источников**

1. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы: Учебное пособие для вузов. - СПб.: Питер, 2005. - 336 с.
2. Туманов М.П. Теория автоматического управления: Лекции. URL: [http://elib.ispu.ru/library/lessons/Tihonov\\_2/index.htm](http://elib.ispu.ru/library/lessons/Tihonov_2/index.htm).
3. Туманов М.П. Теория управления. Теория линейных систем автоматического управления: Учебное пособие. – МГИЭМ. М., 2005, - 82 с. URL: [http://window.edu.ru/window\\_catalog/files/r24738/5.pdf](http://window.edu.ru/window_catalog/files/r24738/5.pdf).
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975.
5. Желтиков О.М. Основы теории управления. Конспект лекций. – Самара, СГТУ, 2008. – URL: <http://www.jelomak.ru/pager.htm>.

### Варианты заданий:

№	Вид передаточной функции	№	Варианты параметров
	$W_p(s)$		Значения $T_i$ [с]
1.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)}$	1.	$T_1 = 0.5, T_2 = 0.1$
		2.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.01$
		3.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.9$
		4.	$T_1 = 0.01, T_2 = 0.1$
		5.	$T_1 = 0.15, T_2 = 0.2$
2.	$\frac{K}{s(T^2s^2 + 2T\zeta s + 1)}$	1.	$T = 0.1, \zeta = 1$
		2.	$T = 0.05, \zeta = 0.707$
		3.	$T = 0.03, \zeta = 0.1$
		4.	$T = 0.08, \zeta = 0.5$
		5.	$T = 0.01, \zeta = 0.15$
3.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)(T_3s + 1)(T_4s + 1)}$	1.	$T_1 = 0.03, T_2 = 0.5,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.05$
		2.	$T_1 = 0.05, T_2 = 0.4,$ $T_3 = 0.08, T_4 = 0.033$
		3.	$T_1 = 0.2, T_2 = 0.45,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.05$
		4.	$T_1 = 0.5, T_2 = 0.25,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.02$
		5.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.25,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.05$
4.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)(T_3s + 1)(T_4^2s^2 + 2T_4\zeta s + 1)}$	1.	$T_1 = 0.2, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5$
		2.	$T_1 = 0.07, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5$
		3.	$T_1 = 0.3, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5$
		4.	$T_1 = 0.01, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5$
		5.	$T_1 = 0, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5$
5.	$\frac{K(T_1^2s^2 + 2T_1\zeta_1s + 1)}{s(T_2^2s^2 + 2T_2\zeta_2s + 1)(T_3s + 1)(T_4s + 1)^2}$	1.	$T_1 = 0.05, \zeta_1 = 0.3, T_2 = 0.1,$ $\zeta_2 = 0.3, T_3 = T_4 = 0.01$
		2.	$T_1 = 0.05, \zeta_1 = 0.3,$ $T_2 = 0.1, \zeta_2 = 0.3, T_3 = T_4 = 0.05$
		3.	$T_1 = 0.05, \zeta_1 = 0.707,$ $T_2 = 0.07, \zeta_2 = 0.3, T_3 = T_4 = 0.1$
		4.	$T_1 = 0.05, \zeta_1 = 0.707, T_2 = 0.07,$ $\zeta_2 = 0.3, T_3 = T_4 = 0.05$
		5.	$T_1 = 0.05, \zeta_1 = 0.3, T_2 = 0.05,$ $\zeta_2 = 0.3, T_3 = T_4 = 0.1$

### Лабораторная работа 3

#### Описание систем в пространстве состояний

**Цель:** Целью работы является ознакомление с описанием и исследованием динамических систем управления в пространстве состояний.

**Материальное обеспечение:** Компьютерное оборудование и программное обеспечение.

**Постановка задачи:** Даны математические модели трех систем и структурная схема, представляющая собой соединение этих систем. Необходимо:

1. получить модель результирующей системы в пространстве состояний,
2. исследовать наблюдаемость и управляемость трех подсистем в отдельности и их соединения в соответствии со схемой.

**Краткие сведения из теории:** Многомерные системы, в отличие от одномерных имеют несколько входов и несколько выходов.

Для описания таких систем используются три набора параметров (три вектора), см. рис. 3.1:

1. вектор входных воздействий (управлений);
2. вектор переменных состояний;
3. вектор выходных параметров

и два преобразования:

1. преобразование “входы-состояния”;
2. преобразование “состояния-выходы”.

Широкое распространение, обусловленное разработанным математическим аппаратом, получили линейные модели многомерных систем в пространстве состояний, которые имеют вид:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t);$$

$$y(t) = C(t)x(t) \tag{3.1}$$

первое соотношение называется уравнением состояния, второе – уравнением выхода. Здесь  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  – вектор переменных состояний;  $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  – вектор управлений;  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^n$  – вектор измеряемых параметров;  $t$  – время;  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  – матрицы размерности  $(n \times n)$ ,  $(n \times r)$ ,  $(m \times n)$  соответственно. Предполагается, что известны начальные состояния  $x(t_0) = x_0$ , где  $t_0$  – начальный момент времени.

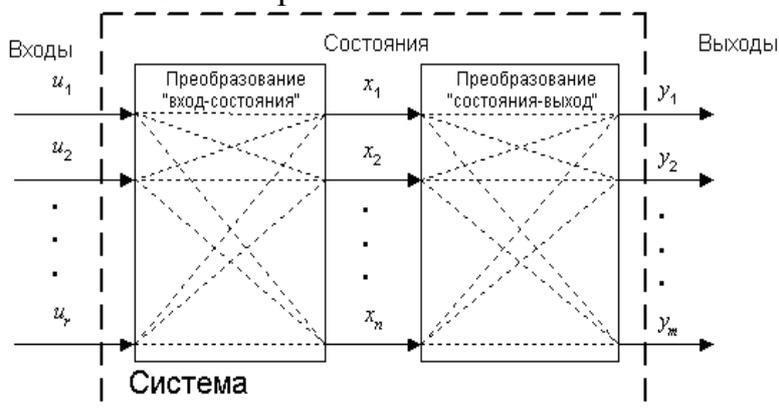


Рис. 3.1. Многомерные системы

Если матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  не зависят от времени  $t$ , то система называется стационарной. Далее предполагается, что системы стационарны.

Рассмотрим задачи соединения двух подсистем в систему. При соединении возможны три варианта (рис. 3.2): параллельное (а), последовательное (б) и в обратной связи (в). Предполагается, что обе системы описываются в пространстве состояний соотношениями:

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= A_1 x^1 + B_1 u^1; & y^1 &= C_1 x^1; \\ \dot{x}^2 &= A_2 x^2 + B_2 u^2; & y^2 &= C_2 x^2;\end{aligned}$$

где  $x^1$ ,  $u^1$ ,  $y^1$  – векторы состояний, управлений, выходов первой системы,  $x^2$ ,  $u^2$ ,  $y^2$  – второй. Необходимо по известным матрицам  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  получить матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (рис. 3.2г).

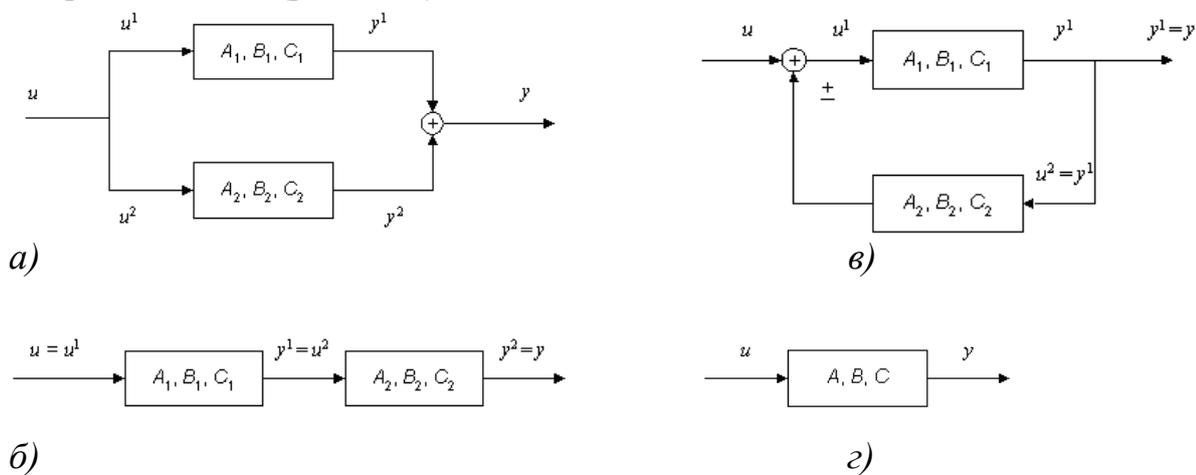


Рис. 3.2. Соединение двух систем

### 1. Параллельное соединение.

Запишем уравнения системы, с учетом особенностей соединения, указанных на рис. 3.2.а.

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= A_1 x^1 + B_1 u; \\ \dot{x}^2 &= A_2 x^2 + B_2 u; \\ y &= C_1 x^1 + C_2 x^2;\end{aligned}$$

отсюда 
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u;$$

$$y = (C_1 \quad C_2) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Окончательно матрицы соединения имеют вид —  
 $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}; C = (C_1 \quad C_2).$

### 2. Последовательное соединение —

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= A_1 x^1 + B_1 u; \\ \dot{x}^2 &= A_2 x^2 + B_2 C_1 x^1; \\ y &= C_2 x^2;\end{aligned}$$

в матричном виде — 
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u;$$

$$y = (0 \quad C_2) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix};$$

окончательно, имеем  $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}; C = (0 \quad C_2).$

3. Обратная связь –

$$\dot{x}^1 = A_1 x^1 + B_1 u \pm B_1 C_2 x^2;$$

$$\dot{x}^2 = A_2 x^2 + B_2 C_1 x^1;$$

$$y = C_1 x^1;$$

в матричном виде –  $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \pm B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u;$

$$y = (C_1 \quad 0) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix};$$

Следовательно,  $A = \begin{pmatrix} A_1 & \pm B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}; C = (C_1 \quad 0).$

Для линейных систем легко показать справедливость следующего результата, называемого принципом суперпозиции: эффект, вызываемый суммой нескольких воздействий, равен сумме нескольких воздействий, равен сумме эффектов от нескольких воздействий в отдельности. Закон изменения вектора состояний линейной системы представляется в виде суммы свободного и вынужденного колебания  $x(t) = x_c(t) + x_b(t).$

Свободное движение  $x_c(t)$  происходит при отсутствии внешнего воздействия в ненулевых начальных условиях. Оно определяется решением однородной системы уравнений, соответствующей исходному уравнению состояний

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

с начальными условиями  $x(t_0) = x_0.$

Вынужденное движение  $x_b(t)$  – это реакция системы на внешнее воздействие  $u(t)$  при нулевых начальных условиях. Оно определяется решением неоднородного уравнения при нулевых начальных условиях.

Для многомерных нестационарных систем, описываемых соотношениями, поведение векторов состояния и выхода определяется по формулам

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (3.2)$$

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (3.3)$$

где  $\Phi(t, \tau)$  – переходная матрица, или матрица Коши, являющаяся решением уравнения

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = A(t)\Phi(t, \tau), \quad (3.4)$$

с начальным условием  $\Phi(\tau, \tau) = E.$

Первые слагаемые в (3.2), (3.3) описывают свободное движение, а вторые – вынужденное.

Для многомерных стационарных систем, описываемых уравнениями (3.1), законы изменения вектора состояния и вектора выхода находятся по формулам

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = C\Phi(t)x(0) + \int_{t_0}^t C\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

где  $\Phi(t-\tau)$  – переходная матрица стационарной системы, зависящая от разности  $t-\tau$ . В данном случае решение уравнения (3.4) имеет вид

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t-\tau) = \exp[A(t-\tau)].$$

Одними из важнейших задач теории управления является исследование управляемости и наблюдаемости динамических систем. Приведем соответствующие определения и критерии для стационарных линейных систем, полученные Калманом.

Система называется вполне управляемой, если выбором управляющего воздействия  $u(t)$  на интервале времени  $[t_0, t_1]$  можно перевести систему из любого начального состояния  $x(t_0)$  в произвольное заранее заданное конечное состояние  $x(t_1)$ .

Система называется вполне наблюдаемой, если по реакции  $y(t_1)$  на выходе системы на интервале времени  $[t_0, t_1]$  при заданном управляющем воздействии  $u(t)$  можно определить начальное состояние  $x(t_0)$ .

*Критерий управляемости линейных систем.* Для того чтобы система была вполне управляемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости

$$M_U = (B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B)$$

равнялся размерности вектора состояния:  $\text{rank } M_U = n$ .

*Критерий наблюдаемости линейных систем.* Для того чтобы система была вполне наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы наблюдаемости

$$M_Y = (C^T \mid A^T C^T \mid (A^T)^2 C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T)$$

равнялся размерности вектора состояния:  $\text{rank } M_Y = n$ .

Знак  $Z = (X \mid Y)$  означает присоединение матриц, т.е. для получения  $i$ -ой строки матрицы  $Z$  берется сначала  $i$ -ая строка матрицы  $X$ , затем следуют элементы  $i$ -ой строки матрицы  $Y$ . Предполагается, что количество строк у матриц одинаково.

Напомним, что под рангом матрицы подразумевается наивысший из порядков отличных от нуля миноров этой матрицы. Ранг матрицы равен наибольшему числу линейно независимых строк.

**Последовательность выполнения:** В Control System Toolbox имеется тип данных, определяющих динамическую систему в пространстве состояний. Синтаксис команды, создающий непрерывную LTI (Linear Time Invariant)-систему в виде ss-объекта с одним входом и одним выходом  $SS(A, B, C, D)$ .

В эту функцию в качестве параметров передаются матрицы уравнений состояний и выходов вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t); \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t); \end{aligned}$$

в связи с тем, что рассматривается модель вида (3.1), то матрица динамики  $D$  будет нулевой.

Для выполнения работы могут применяться команды, приведенные в таб. 3.1.

Таблица 3.1.

*Некоторые команды Control System Toolbox*

<i>Синтаксис</i>	<i>Описание</i>
ctrb(LTI-объект>) ctrb(A, B)	Формирование матрицы управляемости
obsv(<LTI-объект>) obsv(A, C)	Формирование матрицы наблюдаемости
parallel(<LTI1>, <LTI2>)	Параллельное соединение
series(<LTI1>, <LTI2>)	Последовательное соединение
feedback(<LTI1>, <LTI2>)	Соединение обратной связью
append( <LTI1>, ..., <LTIN>)	Объединение систем
connect(<sys>, <Con>, <in>, <out>)	Установление связей в соединении

Для получения результатов вычисления матриц, результирующей системы, по структурной схеме, воспользуемся последними двумя командами.

Функция `append` создает объект `sys`, представляющий собой объединение всех подсистем. При этом первый входной сигнал первой системы становится входом номер 1, второй входной сигнал первой системы – номер 2, и т.д. далее идут входы второй системы, и т.д.; аналогично определяются и выходы.

В функции `connect` – параметр `<Con>` определяет матрицу связей по структурной схеме. Матрица формируется по следующему правилу: каждая строка представляет собой один вход системы `sys`, первый элемент – номер входа (в соответствии с порядком в команде `append`), затем идут номера выходов, которые суммируются и подаются на рассматриваемый вход. Параметры `<in>`, `<out>` – строки из номеров входов и выходов соединения, являющиеся внешними.

Например, для последовательного соединения двух систем:

```
sys1= ss(A1, B1, C1, D1)
sys2= ss(A2, B2, C2, D2)
sys=append (sys1, sys2)
sysc=connect(sys, [2 1], [1], [2])
```

В этом случае на вход второй системы (общий вход номер 2), поступает выход первой (общий выход номер 1); вход первой системы (номер один) и выход второй системы (номер два) являются внешними.

Последовательность выполнения лабораторной работы следующая:

1. Ознакомиться с основными элементами теории.
2. Привести все системы в варианте в форму (3.1).
3. Запустить систему MATLAB.
4. Создать три `ss`-объекта, в соответствии с заданным вариантом.
5. Определить управляемость и наблюдаемость каждой системы.
6. В соответствии со структурной схемой получить матрицы A, B, C соединения.
7. Определить управляемость и наблюдаемость соединения.
8. Оформить отчет.

9. **Отчет о работе:** Отчет оформляется в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению работ в вузе, и должен содержать:

1. Титульный лист
2. Наименование и цель работы.
3. Результаты выполнения работы.
4. Анализ результатов и выводы.

**Методический пример:** Даны три линейные стационарные системы:

$$\begin{aligned}
 1. & \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u^1; \\ & y^1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1; \end{cases} \\
 2. & \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2; \\ & y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} x^2; \end{cases} \\
 3. & \begin{cases} \ddot{x}^3 - 3\dot{x}^3 - 2x^3 = 4u; \\ y^3 = x^3; \end{cases}
 \end{aligned}$$

и имеется структурная схема соединения систем:

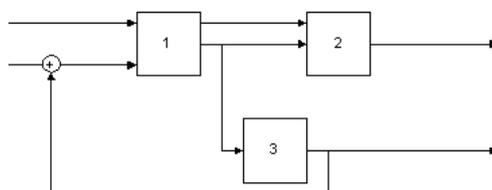


Рис. 3.3. Вариант задания

1. Приведем систему 3 к виду (3.1), для этого введем переменные

$$\begin{aligned}
 x_1^3 &= x^3 \\
 x_2^3 &= \dot{x}_1^3 = \dot{x}^3;
 \end{aligned}$$

и, подставляя их в исходные уравнения, получим –

$$\begin{cases} \dot{x}_1^3 = x_2^3 \\ \dot{x}_2^3 - 3x_2^3 - 2x_1^3 = 4u^3; \\ y^3 = x_1^3 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1^3 = x_2^3 \\ \dot{x}_2^3 = 2x_1^3 + 3x_2^3 + 4u^3; \\ y^3 = x_1^3 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x^3 \end{cases}$$

2. Создадим матрицы первой системы –

```
>> A1=[7 3;2 1]
```

```
A1 =
```

```
    7    3
    2    1
```

```
>> B1=[1 0; 0 2]
```

```
B1 =
```

```
    1    0
    0    2
```

```
>> C1=[3 -2; 2 1]
```

```
C1 =
```

```
    3    -2
    2     1
```

Создавая, аналогично, матрицы двух других систем создадим ss-объекты:

```
>> s1=ss(A1, B1, C1,0)
```

```
a =  
      x1  x2  
x1    7   3  
x2    2   1
```

```
b =  
      u1  u2  
x1    1   0  
x2    0   2
```

```
c =  
      x1  x2  
y1    3  -2  
y2    2   1
```

```
d =  
      u1  u2  
y1    0   0  
y2    0   0
```

```
Continuous-time model.  
>> s2=ss(A2, B2, C2,0)
```

```
a =  
      x1  x2  
x1    1   2  
x2    3   2
```

```
b =  
      u1  u2  
x1    1   5  
x2    2   1
```

```
c =  
      x1  x2  
y1    4   3
```

```
d =  
      u1  u2  
y1    0   0
```

```
Continuous-time model.  
>> s3=ss(A3, B3, C3,0)
```

```
a =  
      x1  x2  
x1    0   1  
x2    2   3
```

```
b =  
      u1  
x1    0  
x2    4
```

```
c =  
      x1  x2  
y1    1   0
```

```
d =  
      u1  
y1    0
```

```
Continuous-time model.
```

3. Исследуем наблюдаемость и управляемость каждой системы, для чего построим соответствующие матрицы и посчитаем их ранги –

```
>> rank(ctrb(A1,B1))
```

```
ans =  
      2
```

```
>> rank(observ(A1,C1))
```

```
ans =  
      2
```

```

>> rank(ctrb(A2,B2))
ans =
     2
>> rank(observ(A2,C2))
ans =
     2
>> rank(ctrb(A3,B3))
ans =
     2
>> rank(observ(A3,C3))
ans =
     2

```

Видно, что во всех случаях ранги матриц управляемости и наблюдаемости совпадают с размерностями пространства состояний.

4. Получим систему, определяемую соединением.

Для корректного использования функции connect введем дополнительную систему, передаточная функция которой равна 1 (рис).

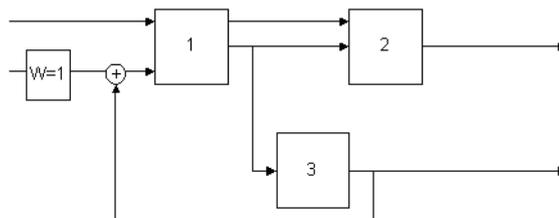


Рис. 3.4. Эквивалентная схема

```

>> s4 = tf(1)
Transfer function:
1
>> sys=append(s1,s2,s3,s4);
>> Q=[2 -4 5; 3 1 0; 4 2 0; 5 2 0];
>> in=[1 5];
>> out=[3 4];
>> s_com=connect(sys,Q, in,out);

```

Обращаясь к данным объекта, можно получить матрицы A, B, C:

```

>> A=s_com.A;
>> B=s_com.B;
>> C=s_com.C;

```

4. Вычислим ранги матриц наблюдаемости и управляемости итоговой системы:

```

>> rank(ctrb(A,B))
ans =
     6
>> rank(observ(A,C))
ans =
     6

```

Результаты показывают, что система управляема и наблюдаема.

### **Контрольные вопросы**

1. Дать определение и примеры состояний управляемой системы.
2. Показать на примере справедливость принципа суперпозиции.
3. Вывести уравнения в пространстве состояний для заданной схемы соединения трех систем.
4. Получить описание одномерной системы (1.1) в канонической форме Коши.
5. Провести анализ влияния размерности векторов управления и выходов на управляемость и наблюдаемость схемы.

### **Список использованных источников**

1. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы: Учебное пособие для вузов. - СПб.: Питер, 2005. - 336 с.
2. Повзнер Л.Д. Теория систем управления: Учебное пособие для вузов. - М.: Изд. МГГУ, 2002. - 472 с.
3. Туманов М.П. Теория автоматического управления: Лекции. URL: [http://elib.ispu.ru/library/lessons/Tihonov\\_2/index.htm](http://elib.ispu.ru/library/lessons/Tihonov_2/index.htm).
4. Туманов М.П. Теория управления. Теория линейных систем автоматического управления: Учебное пособие. – МГИЭМ. М., 2005, 82 с. URL: [http://window.edu.ru/window\\_catalog/files/r24738/5.pdf](http://window.edu.ru/window_catalog/files/r24738/5.pdf).
5. Михайлов В.С. Теория управления. – К.: Выща школа, 1988.
6. Зайцев Г.Ф. Теория автоматического управления и регулирования. – К.: Выща школа, 1989.

### **Варианты заданий:**

№	Уравнения систем	Схе- ма
1	$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} x^3 \end{cases}$	1
2	$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} x^3 \end{cases}$	2
3	$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^3 \end{cases}$	3
4	$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} x^3 \end{cases}$	4
5	$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} -20 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} x^3 \end{cases}$	2



17	$1. \begin{cases} \dot{x}_1^1 - x_1^1 + 4x_2^1 + 3u \\ \dot{x}_2^1 - -x_1^1 + 3x_2^1 - 2u \end{cases} \quad \begin{cases} y_1^1 - -x_1^1 + 2x_2^1 \\ y_2^1 - x_1^1 - x_2^1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	10
18	$1. \begin{cases} \dot{x}_1^1 = x_1^1 - 4x_2^1 + 3u \\ \dot{x}_2^1 = -x_1^1 + 3x_2^1 - 4u \end{cases} \quad \begin{cases} y_1^1 = -x_1^1 + 5x_2^1 \\ y_2^1 = x_1^1 - x_2^1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	8
	$3. \begin{cases} x^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} x^3 \end{cases}$	
	$3. \begin{cases} x^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^3 \end{cases}$	

Структурные схемы к вариантам:

