К ПРОБЛЕМЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛИ ПЕРЕДВИЖЕНИЯ ВЛАГИ

УРАЛИЕВА А.А. , РЫСКЕЛДИЕВА Н.Б.
Кыргызский национальный университет им. Жусупа Баласагына
Бишкек, Кыргызская Республика

urala_2005@mail.ru

Рассматривается одномерная некорректная (недоопределенная) математическая модель процесса влагопереноса, предложенная Ричардсом. Показано определение произвольных постоянных и произвольных функций (коэффициент влагопроводимости, капиллярное давление и др.), содержащихся в модели, а также приведена общая форма начально-краевых задач, встречающихся при моделировании конкретного объекта.

Введение. Известно, что многие физические процессы, происходящие в природе, в том числе и проблемы влагопереноса в неоднородном почвогрунте, формулируются в виде гипотез и предположений, на основе тех или иных принципов и даются, как правило, в форме определений. Для того чтобы перевести эти рассуждения на математический язык, т.е. представить их в виде математической модели и конкретных чисел с помощью математических выражений с использованием ЭВМ, потребовалось достаточно много времени и большие усилия ученых, представителей различных областей науки – математиков-прикладников, механиков, гидрогеофизиков, мелиораторов и др. Предложенное вниманию читателей исследование посвящено проблемам переноса влаги в неоднородном почвогрунте.

Постановка задачи. Основное затруднение, возникшее при анализе одномерной математической модели передвижения влаги в гетерогенных почвогрунтах, было связано с недоопределенностью и некорректной формой сформулированной математической модели процесса. В работе [1] показано, что в результате применения аппарата группового анализа дифференциальных уравнений к модели одномерного переноса влаги будет получена корректно поставленная система нелинейных дифференциальных уравнений, инвариантная к первоначальной системе. В полученной системе уравнений неизвестными коэффициентами оказались лишь постоянные параметры, а также произвольные функции ψ (пропорциональные коэффициенту фильтрации) и F, имеющие явные параметрические представления, зависящие от параметров. В данной работе покажем, как определяются эти неизвестные постоянные параметры и функции.

Математическая модель переноса влаги. Рассмотрим процесс передвижения влаги по вертикали в неоднородной пористой среде. Математическая модель данного процесса описывается следующей системой дифференциальных уравнений [2]:

$$w = -k_k \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\gamma}\right) + k_k, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial(\gamma\theta)}{\partial t} + \frac{\partial(\gamma w)}{\partial z} = F. \qquad (2)$$

Здесь $\gamma=\rho g$ – удельная масса влаги, $[ML^{-2}T^{-2}]$; ρ – плотность влаги, $[ML^{-3}]$; g – ускорение силы тяжести, $[LT^{-2}]$; [L]; z – вертикальная ось, направленная вниз, [L]; t – время, [T]; θ – объемная влажность грунта, [безразмерная величина]; k_k – коэффициент влагопроводимости, $[LT^{-1}]$; p – капиллярное давление, $[ML^{-1}T^{-2}]$; w – вектор скорости передвижения влаги, $[LT^{-1}]$; F – функция, определяющая разность между площадной инфильтрацией и испарением и др. возмущающими факторами, которая зависит от временно-пространственных координат (t,z), $[ML^{-2}T^{-3}]$.

Проведя обезразмеривание и подстановку:

$$k = \gamma(\theta)k_k, \quad f = k\frac{d}{d\theta}\left(\frac{p(\theta)}{\gamma(\theta)}\right)\frac{d\theta}{d\overset{0}{\theta}}, \tag{3}$$

как описано в работе [1], получим систему:

$$w = f\,\overset{0}{\theta}_z + k, \tag{4}$$

$$\overset{0}{\theta}_t + w_z = F. \tag{5}$$

Здесь, согласно методике группового анализа [3], считаем, что переменные θ, w – зависимые, т.е. искомые, t, z – независимые, а функции f, k и F – произвольные. При этом считаем, что $f=f(z,\theta)$, $k=k(z,\theta)$ и $F=F(t,z)$.

Как уже сказано, при моделировании процесса одномерного влагопереноса основная трудность заключается в недоопределенности и некорректности существующей математической модели исследуемого процесса. Это видно из системы (1) и (2). В работе [1] подробно показано применение аппарата группового анализа дифференциальных уравнений к изучаемой модели, и в результате чего получена корректно сформулированная и вполне определенная система нелинейных дифференциальных уравнений, инвариантная к первоначальной системе:

$$\overline{w} = \tilde{\tilde{c}}c\overline{\theta}_\xi + \tilde{\tilde{c}}\tilde{c}(\overline{\theta})^2, \quad -\frac{1}{2}\overline{\theta} - \frac{\xi}{2}\overline{\theta}_\xi + \overline{w}_\xi = \overline{F}. \tag{6}$$

Покажем, как определяются образованные в результате анализа произвольные постоянные. При исключении из этой системы неизвестной функции $\overline{w}(\xi)$ мы придем к обыкновенному квазилинейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\tilde{\tilde{c}}c\overline{\theta}_{\xi\xi}(\xi) + \left(2\tilde{\tilde{c}}\tilde{c}\overline{\theta}(\xi) - \frac{\xi}{2}\right)\overline{\theta}_\xi(\xi) - \frac{1}{2}\overline{\theta}(\xi) = \overline{F}(\xi). \tag{7}$$

Здесь $\tilde{\tilde{c}}, \tilde{c}, c$ – являются произвольными постоянными. Далее покажем, как на практике определить при этом появляющиеся произвольные постоянные.

Определение произвольных постоянных. В данном случае параметр $\tilde{\tilde{c}}$ является значением коэффициента фильтрации [1]. А его значение мы получим из гидрогеологических измерений, например из данных точечных измерений данного коэффициента фильтрации.

Покажем, каким образом можно определить другие параметры $\tilde{c}, \tilde{\tilde{c}}$. В этом случае функция имеет вид:

$$\alpha(\theta) = \tilde{c}\theta^2 + \tilde{\tilde{c}} \tag{8}$$

и обладает свойством [4]

$$k=\psi(z)\alpha(\theta). \tag{9}$$

Здесь $\psi(z)$ – коэффициент фильтрации при полном насыщении грунта, причем функция $\alpha(\theta)$ такая, что

$$\alpha(\sigma)=1 \text{ и } \alpha(\omega)=0, \tag{10}$$

где σ – пористость почвогрунта, ω – количество связанной воды в долях от общего объема грунта.

В связи с этим из (8) имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{c}\sigma^2 + \tilde{\tilde{c}} &= 1, \\ \tilde{c}\omega^2 + \tilde{\tilde{c}} &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Решая полученную систему относительно неизвестных параметров, находим:

$$\tilde{c} = \frac{1}{\sigma^2 - \omega^2}, \quad \tilde{\tilde{c}} = -\frac{\omega^2}{\sigma^2 - \omega^2}, \tag{12}$$

где σ и ω имеют заданные значения для исследуемого почвогрунта.

Далее коэффициент влагопроводимости определяется по формуле [1]:

$$k(\theta) = \tilde{\tilde{c}}\left(\tilde{c}\theta^2 + \tilde{\tilde{c}}\right) \tag{13}$$

и образует конкретное поле от θ, при наличии поля функции θ для исследуемой области и при найденных постоянных $\tilde{\bar{c}}$, $\tilde{c}$ и $\tilde{\tilde{c}}$. Тем самым мы можем построить в параметрической форме искомый коэффициент влагопроводимости $k(\theta)$.

Из (3) и (13) приходим к уравнению:

$$\frac{dp}{d\theta} = \tilde{\bar{c}} c \frac{\gamma(\theta)}{k(\theta)} \left(\gamma(\theta) + \theta\gamma'(\theta)\right). \tag{14}$$

Интегрируя уравнение (14), при заданном $\gamma(\theta)$, получим:

$$p(\theta) = \tilde{\bar{c}} c \int \frac{\gamma(\theta)}{k(\theta)} \left(\gamma(\theta) + \theta\gamma'(\theta)\right) d\theta + \tilde{p}, \tag{15}$$

где $\tilde{p}$ – постоянная интегрирования.

Рассмотрим некоторые частные случаи относительно $\gamma(\theta)$. Предположим, что функция $\gamma(\theta)$ постоянна, т.е. $\gamma(\theta)=a_0g$. Тогда из уравнения (15), учитывая (13), имеем:

$$p(\theta) = \tilde{\bar{c}} c \int \frac{(a_0 g)^2}{\tilde{\bar{c}}\left(\tilde{c}\theta^2 + \tilde{\tilde{c}}\right)} d\theta + \tilde{p} \tag{16}$$

Вычисляя неопределенный интеграл, получим:

$$p(\theta) = A \operatorname{arctg}(B\theta) + \tilde{p}, \tag{17}$$

где $A = c(a_0 g)^2 \dfrac{1}{\sqrt{\tilde{c}\tilde{\tilde{c}}}}, \quad B = \dfrac{\sqrt{\tilde{c}}}{\sqrt{\tilde{\tilde{c}}}}.$

Далее, предполагая линейность функции $\gamma(\theta)$, имеем $\gamma(\theta)=g(a+a_1\theta)$. Проведя необходимые вычисления, получим:

$$p(\theta) = L \operatorname{arctg}(B\theta) + M \ln\left(\tilde{c}\theta^2 + \tilde{\tilde{c}}\right) + N\left[\theta - \frac{1}{B}\operatorname{arctg}(B\theta)\right] + \tilde{p}, \tag{18}$$

где

$$L = \frac{cga^2}{\sqrt{\tilde{c}\tilde{\tilde{c}}}}, \quad M = \frac{3cgaa_1}{2\tilde{c}}, \quad N = \frac{2cga_1{}^2}{\tilde{c}}, \quad B = \frac{\sqrt{\tilde{c}}}{\sqrt{\tilde{\tilde{c}}}}.$$

Определяя экспериментальное значение капиллярного давления p в нескольких различных точках θ, получим систему уравнений относительно искомых параметров.

Этим мы продемонстрировали, каким образом можно определить присутствующие здесь произвольные параметры, содержащиеся в (7).

В уравнении (7), описывающем изменение поля влажности, имеется неизвестная функция $\tilde{F}(\xi)$, которая связана с функцией $F(t,z)$, а ξ связан с аргументами t,z, т.е.

$$F(t,z) = t^{-\frac{3}{2}} \bar{F}(\xi), \tag{19}$$

где

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{t}} - \beta\sqrt{t}. \tag{20}$$

Представим функцию $\tilde{F}$ в виде

$$\tilde{F}(\xi) \approx A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + \ldots + A_k\xi^k. \tag{21}$$

Учитывая (19), (20) имеем:

$$F(t,z) \approx t^{-\frac{3}{2}} \left[A_0 + A_1\left(\frac{z}{\sqrt{t}} - \beta\sqrt{t}\right) + \ldots + A_k\left(\frac{z}{\sqrt{t}} - \beta\sqrt{t}\right)^k\right]. \tag{22}$$

Используя измеренные точечные данные при различных (t_i,z_i), $i=1,2,\ldots,m$, для функции $F(t,z)$ получим систему алгебраических уравнений относительно A_0, A_1, …, A_k. А вообще, в этой системе количество уравнений не совпадает с количеством неизвестных. Как обычно, количество неизвестных меньше, чем количество уравнений. В этом случае задача выбора коэффициентов A_0, A_1, …, A_k переопределена, и обычно не удается найти A_0, A_1, …, A_k, точно удовлетворяющей ей систему уравнений.

Из многих различных критериев для определения A_i наиболее часто используется метод наименьших квадратов [5]. Наиболее надежный метод для вычисления коэффициентов в общей задаче наименьших квадратов основан на матричной факторизации, называемой сингулярным разложением или SVD [5].

Итак, решая полученную систему SVD-методом и подставляя решение этой системы в (21), определим функцию $\widetilde{F}(\xi)$.

Образование начально-граничных условий. Сформулируем начально-граничные условия для системы (1), (2) в физической области. Система уравнений (1), (2) обычно решается в области $D=\{(t,z)/t_0\le t\le T,\ \varphi_1(t)\le z\le -\varphi_2(t)\}$, где t_0, T – заданные положительные числа, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – заданные функции. Напомним, что ось z направлена вертикально вниз. Функциями $z=-\varphi_2(t)$ и $z=-\varphi_1(t)$ задаются соответственно уровень грунтовых вод и дневная поверхность земли.

Ясно, что относительно объемной влажности $\theta(t,z)$ необходимо задавать начальное условие:

$$\theta(t_0,z)=\theta_0(z),\quad -\varphi_1(t_0)\le z\le -\varphi_2(t_0). \tag{23}$$

На переднем (верхнем) фронте $z=-\varphi_1(t)$ задается условие

$$\theta(t,z)\big|_{z=-\varphi_1(t)}=\theta_1(t),\quad t\in[t_0,T), \tag{24}$$

а на $z=-\varphi_2(t)$ имеем:

$$\theta(t,z)\big|_{z=-\varphi_2(t)}=\theta_2(t),\quad t\in[t_0,T). \tag{25}$$

Здесь θ_0, θ_1, θ_2 – заданные функции от своих аргументов.

В этом случае необходимо выполнение условия согласованности:

$$\theta_0\big(-\varphi_1(t_0)\big)=\theta_1(t_0),\qquad \theta_0\big(-\varphi_2(t_0)\big)=\theta_2(t_0). \tag{26}$$

Далее предлагаем методику приближенного решения начально-краевой задачи (1), (2), (23)–(25).

Временной интервал разделим на n_t подинтервалов $(t_0,t_1),(t_1,t_2),\dots,\ (t_{n_t-1},t_{n_t})$.

В начале расчет ведем для отрезка времени $[t_0,t_1]$.

В момент времени $t=t_1$, в силу (20) имеем $\xi=\frac{z}{\sqrt{t_1}}-\beta\sqrt{t_1}$. Здесь z принимает значение из области $[-\varphi_1(t_1);-\varphi_2(t_1)]$. Тогда

$$\xi\in\left[-\frac{\varphi_1(t_1)}{\sqrt{t_1}}-\beta\sqrt{t_1};-\frac{\varphi_2(t_1)}{\sqrt{t_1}}-\beta\sqrt{t_1}\right]. \tag{27}$$

Между $\theta(t,z)$ и $\overline{\theta}(\xi)$ имеется связь:

$$\overline{\theta}(\xi)=\sqrt{t}\left(\theta(t,z)-\frac{\beta}{2\widetilde{c}\,\widetilde{\widetilde{c}}}\right). \tag{28}$$

Учитывая условия (24) и (25), получим:

$$\overline{\theta}(\xi)\big|_{\xi=a}=\sqrt{t_1}\left(\theta_1(t_1)-\frac{\beta}{2\widetilde{c}\,\widetilde{\widetilde{c}}}\right),$$

$$\overline{\theta}(\xi)\big|_{\xi=b}=\sqrt{t_1}\left(\theta_2(t_1)-\frac{\beta}{2\widetilde{c}\,\widetilde{\widetilde{c}}}\right), \tag{29}$$

где a и b – нижний и верхний конец отрезка D в момент времени $t=t_1$ соответственно, т.е.

$$a=-\frac{\varphi_1(t_1)}{\sqrt{t_1}}-\beta\sqrt{t_1},\quad b=-\frac{\varphi_2(t_1)}{\sqrt{t_1}}-\beta\sqrt{t_1}.$$

Итак, получили начально-краевую задачу (7), (23) и (29) в области D.

Заключение. При переходе к расчету для следующего отрезка времени [$t_1;t_2$], полагая $t=t_2$ и рассуждая так же, как изложено выше, получим следующую краевую задачу, аналогичную задаче (7) и (29), для рассматриваемого времени t_2, и.т.д. Для всех последующих отрезков времени расчет ведется аналогично. Заметим, что нелинейное уравнение (7) необходимо линеаризовать, используя метод Ньютона-Канторовича [6], и далее оно решается с соответствующими начально-краевыми условиями.

Литература

1. Джаныбеков Ч.Дж., Уралиев А.А., Рыскелдиева Н.Б., Жылчиев Н.М. Об одной математической модели одномерного движения влаги, с идентификацией гидрогеологических параметров//Наука и новые технологии Бишкек: Инсанат, 2006, N2, 2006 − С. 3 − 7.
2. Веригин Н.Н., Васильев С.В. и др. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород. М.: Недра. 1977. – 271 с.
3. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.:Наука. 1978. – 400с.
4. Аверьянов С.В. Зависимость водопроницаемости почвогрунтов от содержания в них воздуха //ДАН СССР, 1949, т.19, №2. –С.141–144.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 631 с.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука. 1984.