УДК 681.5

СИНТЕЗ РОБАСТНОГО УПРАВЛЯЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ДЖОЛДОШЕВ Б.О., ОМУРБАЕВ Н.Т., ОМОРОВ Т.Т.
izvestiya@ktu.aknet.kg

Рассматривается проблема управления при возможных допустимых изменениях регулятора от заданного значения на основе формализма принципа гарантируемой динамики [1], предложен метод синтеза многомерных линейных систем управления.

Постановка задачи. Рассмотрим многомерный объект управления, динамика которого задается векторным уравнением:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_o) = x^o, \quad t \in [t_o, t_k], \qquad (1)$$

где $x(t)$ – n-мерный вектор состояния; $u(t)$ – m-мерный вектор управления;

t_o, t_k – начальный и конечный моменты процесса управления;

A, B – вещественные матрицы: $A = \{a_{ij}\}_{n\times n}$; $B = \{b_{i\ell}\}_{m\times n}$.

Предположим, что объект (1) является полностью управляемым и наблюдаемым, а управление реализуется посредством линейной обратной связи:

$$u(t) = (K + \Delta K)x(t), \qquad (2)$$

где $K = \{k_{\ell i}\}_{m\times n}$ – m×n – матрица, составленная из номинальных значений параметров регулятора; $\Delta K = \Delta\{k_{\ell i}\}_{m\times n}$ – m×n матрица, определяющая отклонения («дрейф») параметров регулятора от их номинальных значений $k_{\ell i}$. Известно, что

$$\left|\Delta k_{\ell i}\right| \le \Delta k^*_{\ell i} \qquad \ell = \overline{1,m}, \qquad i = \overline{1,n}, \qquad (3)$$

где $\Delta k^*_{\ell i}$ – заданные положительные числа.

Требуется синтезировать закон управления $u(t)$, описываемый алгоритмом (2) и позволяющий при условиях (3) обеспечить заданные показатели качества переходных процессов в виде следующих ограничений

$$|x_i(t)| \le б_i(t), \qquad i = \overline{1,n}, \qquad t \in [t_o, t_k], \quad (4)$$

где $б_i(t)$ – положительные непрерывно дифференцируемые функции, определяющие границы допустимой области для переменных $x_i(t)$.

Решение задачи. Решение сформулированной задачи синтеза будем осуществлять на основе принципа гарантируемой динамики [4]. Предварительно с учетом закона управления (2) запишем уравнение замкнутой САУ:

$$\dot{x}(t) = Qx(t) + Cx(t), \qquad (5)$$

где n×n матрицы

$$Q = A + BK = \{q_{ij}\}_{n\times n}, \qquad C = B\Delta K = \{c_{ij}\}_{n\times n}.$$

В координатной форме

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j(t), \qquad i = \overline{1,n}, \qquad t \in [t_o, t_k]. (6)$$

В соответствии с принципом гарантируемой динамики [1] условия допустимого качества управления (4) выполняются, если

$$\int_{t_o}^{t} x_i(\tau)\dot{x}_i(\tau)\,d\tau \le \int_{t_o}^{t} б_i(\tau)\dot{б}_i(\tau)\,d\tau, \qquad i = \overline{1,n}, \qquad t \in [t_o, t_k]. \ (7)$$

Для синтеза искомого регулятора на основе неравенств (7) получим соотношения, зависящие от параметров регулятора k_{ij} и требований на качество управления, задаваемых функциями $б_i(t)$. С этой целью подставим выражения для $\dot{x}_i(t)$, определяемые формулами (6), в левые части соотношений (7). После некоторых преобразований имеем:

$$(q_{ii}+c_{ii})\int_{t_o}^{t} x_i^2(\tau)d\tau+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(q_{ij}+c_{ij})\int_{t_o}^{t} x_i(\tau)x_j(\tau)d\tau \le \int_{t_o}^{t} б_i(\tau)\dot{б}_i(\tau)d\tau,\quad i=\overline{1,n},\qquad t\in[t_o,t_k]\ . \quad (8)$$

Искомые параметрические соотношения определяются на основе следующего утверждения.

Утверждение. Пусть в начальный момент времени $t = t_o$ выполнены условия $|x_i(t_o)| \le б_i(t_o),\quad i=\overline{1,n}$. Тогда решение неравенств

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(|q_{ij}|+|c_{ij}|\right)\int_{t_o}^{t} б_i(\tau)б_j(\tau)d\tau \le \int_{t_o}^{t} б_i(\tau)\left[\dot{б}_i(\tau)-(q_{ii}+c_{ii})б_i(\tau)\right]d\tau,\qquad i=\overline{1,n},\qquad t\in[t_o,t_k], \quad (9)$$

относительно параметров $k_{\ell j}$ обеспечивает требуемое качество (4).

Доказательство данного утверждения основывается на формализме принципа гарантируемой динамики [1].

Для иллюстрации вывода параметрических неравенств вида (9) рассмотрим следующий простой пример.

Пример. Управляемый объект описывается векторным линейным уравнением в отклонениях [4, 5]

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13}\\ a_{21} & 0 & a_{23}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & 0\\ 0 & b_{22}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\end{bmatrix},$$

при начальных условиях: $x_1(0)=x_1^0,\qquad x_2(0)=x_2^0,\qquad x_3(0)=x_3^0$.

Объект обладает свойством управляемости и все компоненты вектора ошибки управления e(t) доступны для измерения.

Компоненты $x_1(t)$, $x_2(t)$ вектора состояния x(t) должны удовлетворять следующим неравенствам, задающим критерий качества по управляемым переменным:

$$|x_1(t)|\le\sigma_1(t),\quad |x_2(t)|\le\sigma_2(t),\ |x_3(t)|\le\sigma_3(t),\quad t\in[t_0,t_k], \qquad (7)$$

где $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ – положительные непрерывно дифференцируемые функции, определяемые на основе исходных инженерных требований (4). В частности, их можно задать экспоненциальными функциями вида

$$\sigma_1(t)=\sigma_1^o e^{\alpha t},\quad \sigma_2(t)=\sigma_2^o e^{\alpha t},\qquad \sigma_3(t)=\sigma_3^o e^{\alpha t}, \qquad (8)$$

где параметры σ_1^o, σ_2^o выбираются как оценки максимально возможных отклонений компонентов вектора состояния x(t) в начальный момент времени; α определяются с помощью следующих соотношений:

$$\sigma_i^o e^{\alpha T_i}\le\Delta_i\qquad i=\overline{1,2},3;$$

где Δ_i – заданные величины константы, определяющие величины T_1, T_2.

$$\sigma_1(t)=\sigma_1^\circ e^{\alpha t},\quad \sigma_2(t)=\sigma_2^\circ e^{\alpha t},\quad \alpha\prec 2,\quad \sigma_i\le\Delta_i,\quad i=\overline{1,2},\quad \Delta_1=\Delta_2=0.01.$$

Задача синтеза регулятора заключается в определении матрицы К, обеспечивающей близость к нулю компонентов $x_i(t),\quad i=1,2,3,$ вектора ошибки управления.

А закон управления имеет вид

$$\begin{aligned} u_1&=(k_{11}+\Delta k_{11})x_1+(k_{12}+\Delta k_{12})x_2+(k_{13}+\Delta k_{13})x_3\ ,\\ u_2&=(k_{21}+\Delta k_{21})x_1+(k_{22}+\Delta k_{22})x_2+(k_{23}+\Delta k_{23})x_3\ . \end{aligned} \qquad (9)$$

Производные функции $б_i(t)$: $\dot{б}_i(t)=\alpha\, б_i^o e^{\alpha t},\qquad i=\overline{1,2}$.

$$Q = A + BK = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}k_{11} & b_{11}k_{12} & a_{13} + b_{11}k_{13} \\ a_{21} + b_{22}k_{21} & b_{22}k_{22} & a_{23} + b_{22}k_{23} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix},$$

$$C = B\Delta K = \begin{bmatrix} b_{11}\Delta k_{11} & b_{11}\Delta k_{12} & b_{11}\Delta k_{13} \\ b_{22}\Delta k_{21} & b_{22}\Delta k_{22} & b_{22}\Delta k_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix},$$

С учетом формул (12) и (13) соотношения (9) имеют вид

$$\left(|q_{12}| + |q_{13}| + |c_{12}| + |c_{13}|\right) \cdot б_1^0 \cdot б_2^0 \int_{t_o}^{t} e^{2\alpha\tau}\, d\tau \le \left[\alpha - (q_{11} + c_{11})\right] \cdot \left(б_1^0\right)^2 \int_{t_o}^{t} e^{2\alpha\tau}\, d\tau,$$

$$\left(|q_{21}| + |q_{23}| + |c_{21}| + |c_{23}|\right) \cdot б_2^0 \cdot б_3^0 \int_{t_o}^{t} e^{2\alpha\tau}\, d\tau \le \left[\alpha - (q_{22} + c_{22})\right] \cdot \left(б_2^0\right)^2 \int_{t_o}^{t} e^{2\alpha\tau}\, d\tau,$$

$$\left(|q_{31}| + |q_{32}| + |c_{31}| + |c_{32}|\right) \cdot б_3^0 \cdot б_2^0 \int_{t_o}^{t} e^{2\alpha\tau}\, d\tau \le \left[\alpha - (q_{33} + c_{33})\right] \cdot \left(б_1^0\right)^2 \int_{t_o}^{t} e^{2\alpha\tau}\, d\tau,$$

Поскольку в интервале управления $[t_o, t_k]$ справедливо соотношение

$$\int_{t_o}^{t} e^{2\alpha\tau} d\tau > 0,$$

то последние неравенства эквивалентны следующим неравенствам:

$$\left(|q_{12}| + |q_{13}| + |c_{12}| + |c_{13}|\right) \cdot б_1^0 \cdot б_2^0 \le \left[\alpha - (q_{11} + c_{11})\right] \cdot \left(б_1^0\right)^2,$$

$$\left(|q_{21}| + |q_{23}| + |c_{21}| + |c_{23}|\right) \cdot б_2^0 \cdot б_3^0 \le \left[\alpha - (q_{22} + c_{22})\right] \cdot \left(б_2^0\right)^2,$$

$$\left(|q_{31}| + |q_{32}| + |c_{31}| + |c_{32}|\right) \cdot б_3^0 \cdot б_2^0 \le \left[\alpha - (q_{33} + c_{33})\right] \cdot \left(б_3^0\right)^2.$$

Последние соотношения имеют вид

$$\left(|b_{11}k_{12}| + |a_{13} + b_{11}k_{13}| + |b_{11}\Delta k_{12}| + |b_{11}\Delta k_{13}|\right) \cdot б_1^0 \cdot б_2^0 \le \left[\alpha - (a_{11} + b_{11}k_{11} + b_{11}\Delta k_{11})\right] \cdot \left(б_1^0\right)^2,$$

$$\left(|a_{21} + b_{22}k_{21}| + |a_{23} + b_{22}k_{23}| + |b_{22}\Delta k_{21}| + |b_{22}\Delta k_{23}|\right) \cdot б_2^0 \cdot б_3^0 \le \left[\alpha - (b_{22}k_{22} + b_{22}\Delta k_{22})\right] \cdot \left(б_2^0\right)^2, \qquad (10)$$

$$б_3^0 \cdot б_2^0 \le \left(б_3^0\right)^2,$$

где $\hat{б}_1^0 = б_1^0 / б_2^0 => 0$, $\hat{б}_2^0 = б_3^0 / б_2^0 > 0$.

Теперь нетрудно видеть, что неравенства (10) выполняются, если будут обеспечены соотношения

$$\left(|b_{11}k_{12}| + |a_{13} + b_{11}k_{13}| + |b_{11}\Delta k_{12}| + |b_{11}\Delta k_{13}|\right) \cdot б_2^0 \le \left[\alpha - (a_{11} + b_{11}k_{11} + b_{11}\Delta k_{11})\right] \cdot б_1^0,$$

$$\left(|a_{21} + b_{22}k_{21}| + |a_{23} + b_{22}k_{23}| + |b_{22}\Delta k_{21}| + |b_{22}\Delta k_{23}|\right) \cdot б_3^0 \le \left[\alpha - (b_{22}k_{22} + b_{22}\Delta k_{22})\right] \cdot б_2^0, б_2^0 \le б_3^0$$

или

$$\left(|b_{11}k_{12}| + |a_{13} + b_{11}k_{13}| + |b_{11}\Delta k_{12}| + |b_{11}\Delta k_{13}|\right) \cdot б_2^0 \le \left[\alpha - (a_{11} + b_{11}k_{11} + b_{11}\Delta k_{11})\right] \cdot \hat{б}_1^0,$$

$$\left(|a_{21} + b_{22}k_{21}| + |a_{23} + b_{22}k_{23}| + |b_{22}\Delta k_{21}| + |b_{22}\Delta k_{23}|\right) \cdot б_3^0 \le \left[\alpha - (b_{22}k_{22} + b_{22}\Delta k_{22})\right] \cdot \hat{б}_2^0, \qquad (11)$$

$$б_2^0 \le б_3^0.$$

Анализ неравенств (11) и позволяет определить искомую матрицу регулятора K.

Выводы: Основная идея состоит в том, что при возможных допустимых вариациях регулятора переходные процессы проектируемой системы автоматического управления должны оставаться в пределах заданных допустимых областей (множеств) гарантированным образом. Границы этих множеств задаются такими инженерными показателями качества, как время управления, перерегулирование и статическая точность системы.

Литература

1. Оморов Т.Т. Принцип гарантируемой динамики в теории систем управления. Кн.1. - Бишкек: Илим, 2001. – 150 с.
2. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами.–М.: Наука, 1981.
3. Черников С.Н. Линейные неравенства.– М.: Наука, 1968. – 488 с.
4. Андерсон П., Фуад А. Управление энергосистемами и устойчивость. – М.: Энергия, 1980. –568 с.
5. Глебов И.А. Системы возбуждения синхронных машин. Л., 1979.
6. Габасов Р.Ф., Ружицкая Е.А. Стабилизация динамических систем с обеспечением дополнительных свойств переходных процессов // Кибернетика и системный анализ, №3. 2001. – С.139-151.
7. Кунцевич В.М., Кунцевич А.В. Синтез робастно-адаптивных систем управления линейными нестандартными объектами при ограниченных возмущениях // Проблемы управления и информатики. №1-2. 2006. С. 87-107.
8. Поляк Б.Т.,Назин С.А. Оценивание параметров в линейных многомерных системах с интервальной неопределённостью // Проблемы управления и информатики. №1-2. 2006. – С. 190-197.
9. Цыпкин Я.З. Синтез робастно оптимальных систем управления объектами в условиях ограниченной неопределенности // А и Т. №5. 1992. С. 92-99.