

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПОТОКА

САРБАЛИЕВ А.Ш.
izvestiya@ktu.aknet.kg

Для численного моделирования одномерных и двумерных течений жидкости в рамках уравнений Сен-Венана наибольшее распространение получили численные методы типа Годунова, основанные на точном или приближенном решении одномерной задачи Римана о распаде произвольного гидродинамического разрыва для уравнений мелкой воды. Методы типа Годунова позволяют учесть произвольный рельеф дна. Предложены и реализованы различные методы на основе TVD-алгоритма ([9], подробный обзор дан в монографии [19]).

Уравнения Сен-Венана в консервативной векторной форме имеют следующий вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G(F)}{\partial x} = 0$$

Уравнение неразрывности ($F=h$, $G=hu$) и уравнение движения ($F=hu$, $G=hu^2+P$) имеют такой вид, за исключением того, что в правой части имеются ненулевые недифференциальные члены.

Для решения уравнений мелкой воды предложены многие методы. Нами предлагается новый метод решения задачи. Заданный поток разбивается на n число прямоугольников – частиц (рис. 1). Эти частицы во время движения не меняют массу т.е. $m=\text{const}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial \left(hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \cos \alpha \right)}{\partial x} = gh \sin \alpha - \tau_x & x \geq x_0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Потенциальная энергия среднего сечения частицы равна: $e = \frac{g}{2} h^2$.

Проинтегрировав по длине частицы, имеем

$$E = \int \frac{g}{2} h^2 dx = \frac{g}{2} h^2 z, \quad (2)$$

где z - ширина частицы.

Учитывая, что масса частицы не меняется, т.е. $m=\rho h z$ (ρ -плотность потока) найдем потенциальную энергию частицы

$$E = \frac{g}{2} h^2 z = \frac{g}{2} h^2 \frac{m}{\rho h} = \frac{mg}{2\rho} h. \quad (3)$$

Используя второй закон Ньютона получим

$$m \frac{du}{dt} = - \frac{g}{2\rho} \frac{\partial(mh)}{\partial x} + R - \tau \quad (4)$$

где R – внешние силы.

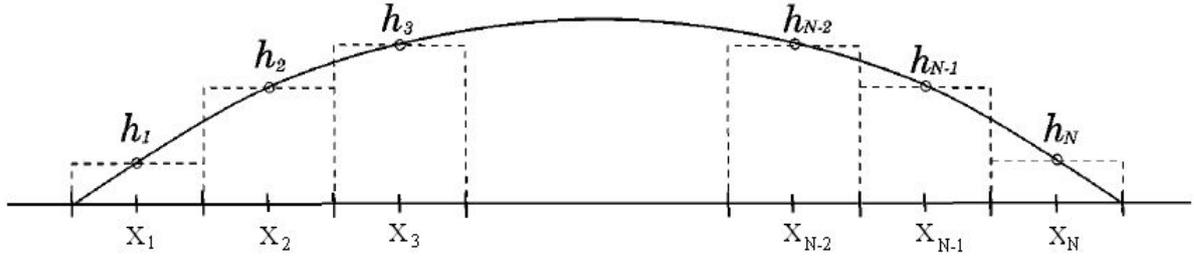


Рис. 1. Аппроксимация частицами-прямоугольниками произвольной параболы. Точками обозначены центры частиц

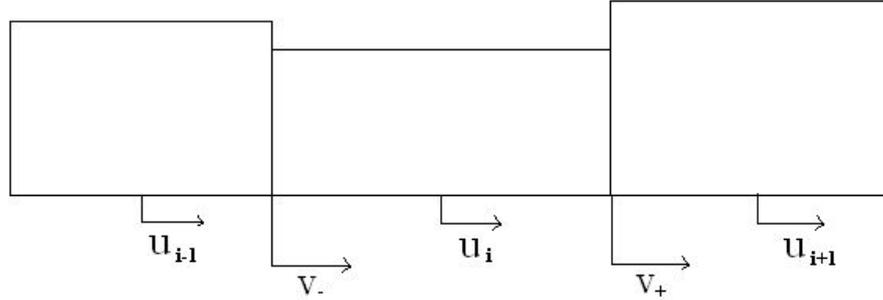


Рис. 2. Для вывода уравнения разрывности частиц

Уравнение (4) должно выполняться для любой частицы - прямоугольников потока. Для i - частицы потока по формуле определяется скорость движения

$$m_i u_i(t + dt) - m_i u_i(t) = -\frac{g}{2\rho} \frac{m_{i+1} h_{i+1}(t) - m_{i-1} h_{i-1}(t)}{z_i(t)} dt + (R_i(t) - \tau_i(t)) dt. \quad (5)$$

Важным моментом является тот факт, что частицы-прямоугольники соприкасаются друг с другом (они не перекрывают друг друга и не образуют пустот между собой). Также соблюдается принцип сохранения симметрии частиц и середины основания прямоугольников, являются координатами частиц.

Будем рассматривать три соседние частицы ($i-1$, i , $i+1$) (рис. 2).

Скорость изменения ширины i - частицы

$$\frac{dz_i}{dt} = (v_+ - v_-), \quad (6)$$

где v_+ и v_- - скорости изменения границы частицы.

Для левой частицы можно записать,

$$v_- = u_{i-1} + \frac{1}{2} \frac{dz_{i-1}}{dt}, \quad (7)$$

Аналогичную формулу можно записать и для правой частицы

$$v_+ = u_{i+1} - \frac{1}{2} \frac{dz_{i+1}}{dt}. \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (6) получим

$$\frac{dz_i}{dt} = u_{i+1} - u_{i-1} - \frac{1}{2} \frac{dz_{i+1}}{dt} - \frac{1}{2} \frac{dz_{i-1}}{dt}. \quad (9)$$

Это является уравнением разрывности частиц потока.

Для крайних частиц можно получить

$$u_i - \frac{1}{2} \frac{dz_i}{dt} = u_{i-1} + \frac{1}{2} \frac{dz_{i-1}}{dt}. \quad (10)$$

Для всей частицы потока должно удовлетворяться теорема об изменении кинетической энергии

$$\sum_{i=1}^n m_i (u(t+dt) - u(t)) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{gm_i}{2\rho} (h_i(t+dt) - h_i(t)) + (R_i(t) - \tau_i(t)) dl_i \right), \quad (11)$$

где dl_i - перемещение i частицы.

Алгоритм решения состоит в следующем:

- 1) по схеме Эйлера: $x_i^{m+1} = x_i^m + u_i^m dt$ осуществляется вычисление координат центров частиц;
- 2) вычисляются новые значения скоростей частиц по формуле (5);
- 3) из условия соприкасаемости определяются ширины и высоты частицы. Это приводит к изменению параметров частиц. Новые размеры частиц должны удовлетворять теореме об изменении кинетической энергии (11).

Тестирование программы на модельных задачах.

Задача о разрушении плотины. В [3] решена задача о разрушении плотины в горизонтальном бесконечном длинном канале. Рассмотрим горизонтальный канал постоянного поперечного сечения, простирающийся до бесконечности в обе стороны, который имеет тонкую перегородку в сечении $x = x_1$ (рис. 3). При $x < x_1$ вода имеет глубину h_1 , а при $x > x_1$ – глубину $h_0=0$. Первоначально вода предполагается покоящейся по обе стороны плотины. В момент времени $t = 0$ плотина внезапно разрушается. При этом процесс движения жидкости будет описываться системой уравнений (1) с начальными условиями:

$$\begin{cases} u(x,t)|_{t=0} = 0 \\ h(x,t)|_{t=0} = h_0 \end{cases}$$

Уравнения мелкой воды для данной задачи имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial \left(hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \cos \alpha \right)}{\partial x} = 0 & x \geq x_0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Решение таково:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{2}{3} \left(c_0 + \frac{x}{t} \right), \\ h(x,t) &= \frac{1}{9g} \left(2c_0 - \frac{x}{t} \right)^2, \\ c_0 &= \sqrt{gh_0}. \end{aligned}$$

Из формул видно, что глубина и скорость в створе плотины постоянны и форма свободной поверхности - парабола.

Численное решение задачи о разрушении плотины, полученное предложенным методом, представлено на рис. 3.

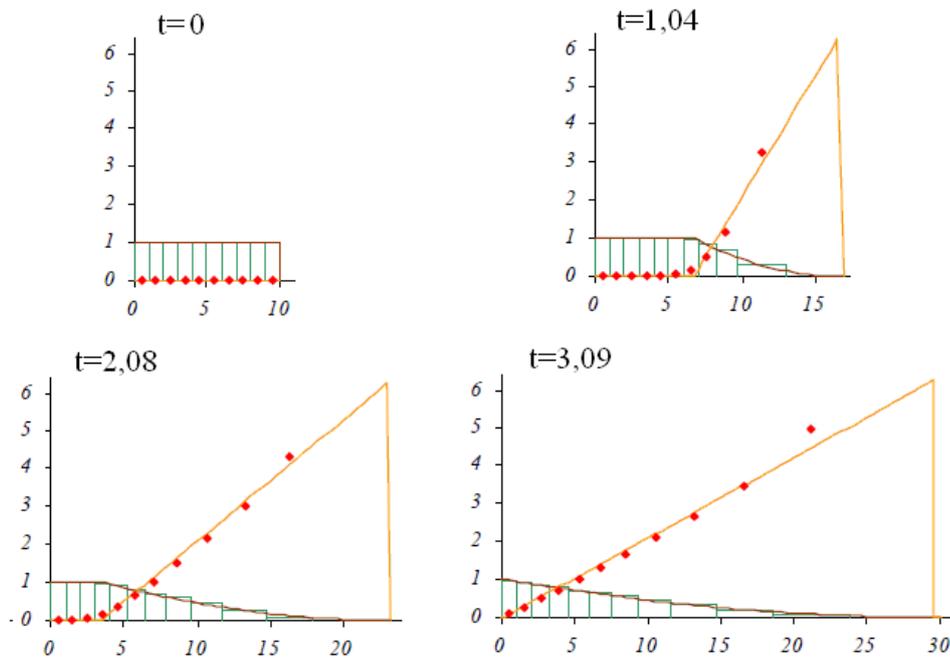


Рис.3. Решение задачи о прорыве плотины. Плотина находится в точке $x = 10$

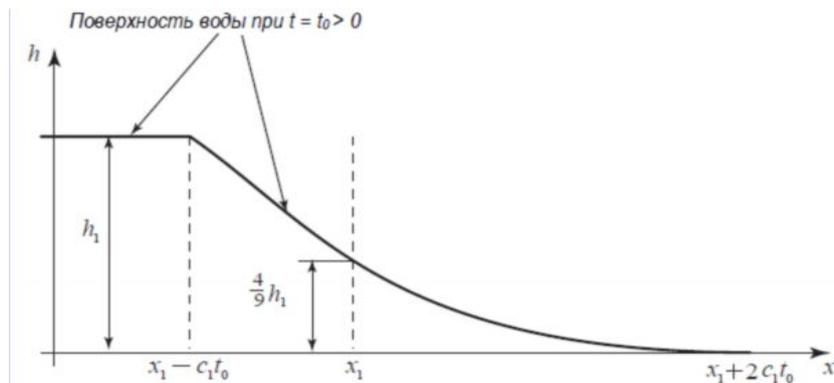


Рис. 4. Решение задачи о разрушение плотины при $h_0 = 0$

Точками на графиках изображены значения скоростей частиц u , прямоугольниками—частицы, отвечающие за уровень жидкости h . Сплошные линии на графиках рис. 3 – решение, полученное в [1]. Плотина находится в точке с координатой $x = 10$. Число частиц $N = 10$, т.е. расстояние между частицами в начальный момент времени равно 1. На графике показано решение с шагом $\tau = 0.01$ для шагов – 0; 13; 26; 39.

Как видно из начального условия функция $h(x)$ в точке $x = x_1$ терпит разрыв. При $t > 0$ этот разрыв мгновенно сглаживается, а поверхность части жидкости, находящейся в движении, принимает форму параболы (рис. 4), касающейся оси x (т.е. дна) в точке $x = x_1 + 2c_1 t$. Указанная парабола проходит от фронта волны до точки $x = x_1 - c_1 t$, после которой поверхность жидкости становится горизонтальной ($c_1 = \sqrt{gh_0}$).

Интересно отметить некоторые особенности процесса в случае $h_0 = 0$. На рис. 5 представлен уровень жидкости h в зависимости от x для различных моментов времени. Как видно из рисунка расход воды в створе плотины постоянен в силу постоянства глубины и скорости в этой точке.

Эта особенность процесса разрушения плотины была отмечена в [1] и подтверждена при численном решении задачи методом частиц.

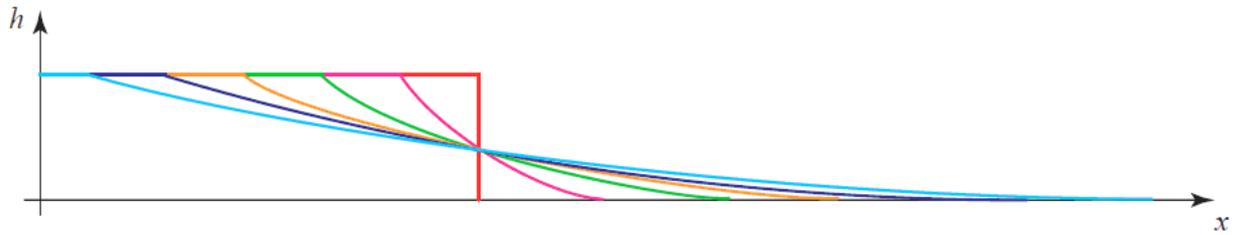


Рис. 5. Уровень воды выше и ниже плотины для различных моментов времени в случае $h_0 = 0$

При этом высота свободной поверхности непрерывна всюду и монотонно возрастает при движении от фронта потока влево, а скорость частиц воды падает по абсолютной величине. Это тот случай, когда поршень, находящийся в точке x_1 , начинает двигаться вправо. Ускорение поршня предполагается бесконечным, так что его скорость внезапно меняется от нуля до постоянного конечного значения, при котором происходит отрыв поршня от воды и последующее движение поршня не оказывает влияния на движение воды.

Задача о распространении бора. Рассмотрим следующую задачу: поршень, расположенный в левом конце канала, наполненного покоящейся водой, внезапно начинает вдвигаться в воду с постоянной скоростью w (рис. 6). Так как поршень движется с постоянной скоростью, то возникающее движение будет ударной волной, распространяющейся в покоящуюся воду и оставляющей за собой зону постоянного состояния (т.е. $u \equiv \text{const}$, $h \equiv \text{const}$), в которой жидкость движется со скоростью поршня w .

Этот случай соответствует случаю распространения бора в покоящуюся воду.

Данную задачу описывает система уравнений с начальными условиями:

$$\begin{cases} u(x,t)|_{t=0} = \begin{cases} u_1 > 0 & x \leq x_1 \\ u_0 = 0 & x \geq x_1 \end{cases} \\ h(x,t)|_{t=0} = \begin{cases} h_1, & x \leq x_1 \\ h_0, & x \geq x_1 \end{cases} \\ h_1 > h_0 > 0, \end{cases}$$

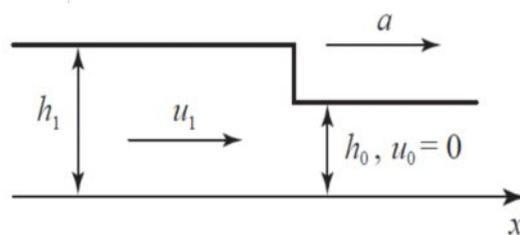


Рис. 6. Бор, распространяющийся в покоящуюся воду

где определяется из условий на разрыве:

$$\begin{cases} h_1(u_1 - a) = h_0(u_0 - a) \equiv m \\ m(u_1 - u_0) = \frac{g}{2}(h_0^2 - h_1^2) \end{cases}$$

здесь a – скорость распространения разрыва, m – поток массы через фронт разрыва. Следовательно, $u(x,t)$, $h(x,t)$ могут быть представлены в виде [1]:

Графики функций $u(x,t)$, $h(x,t)$ для любого момента времени $t \geq 0$ приведены на рис. 7.

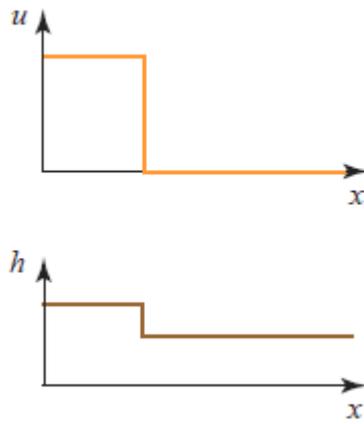


Рис. 7. Общий вид функций $u(x,t)$, $h(x,t)$, $t \geq 0$

На рис. 8 приведены некоторые результаты расчетов задачи о распространении бора в покоящуюся жидкость в различные моменты времени. Наиболее интересным моментом численного решения является часть расчетной области, содержащая прыжок воды h , которая и приведена на графиках. Частицы, отвечающие за уровень жидкости h , изображены на графиках прямоугольниками, значения скоростей частиц u – точками, штрихом отмечено положение фронта прыжка воды.

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1 = a \left(1 - \frac{h_0}{h_1} \right), & x \leq (x_1 + at) \\ u_0 = 0, & x \geq (x_1 + at) \end{cases}$$

$$h(x,t) = \begin{cases} h_1, & x \leq (x_1 + at) \\ h_0, & x \geq (x_1 + at) \end{cases}$$

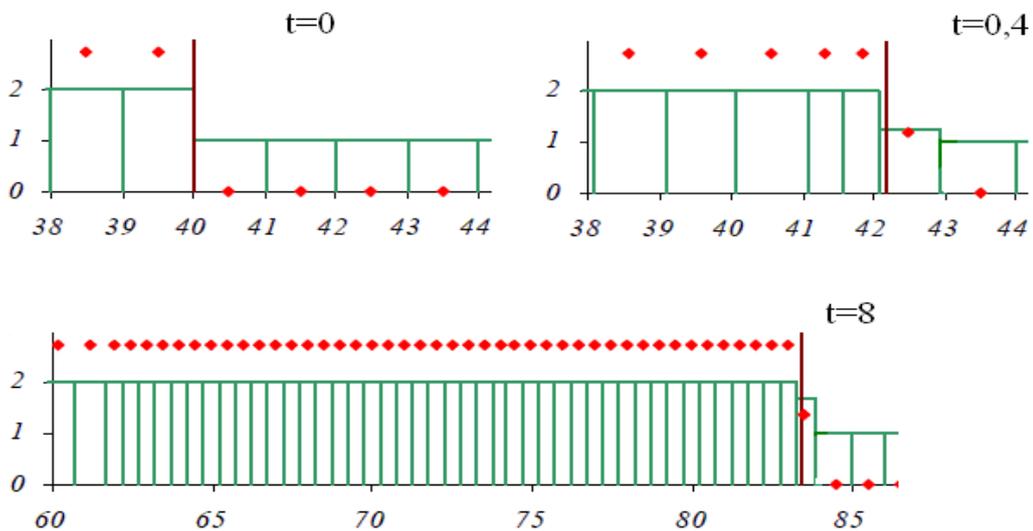


Рис. 8. Задача о распространении бора

Движение оползневого потока. Приведем результаты расчета движения оползня-потока по склону с переменным углом наклона (рис. 9).

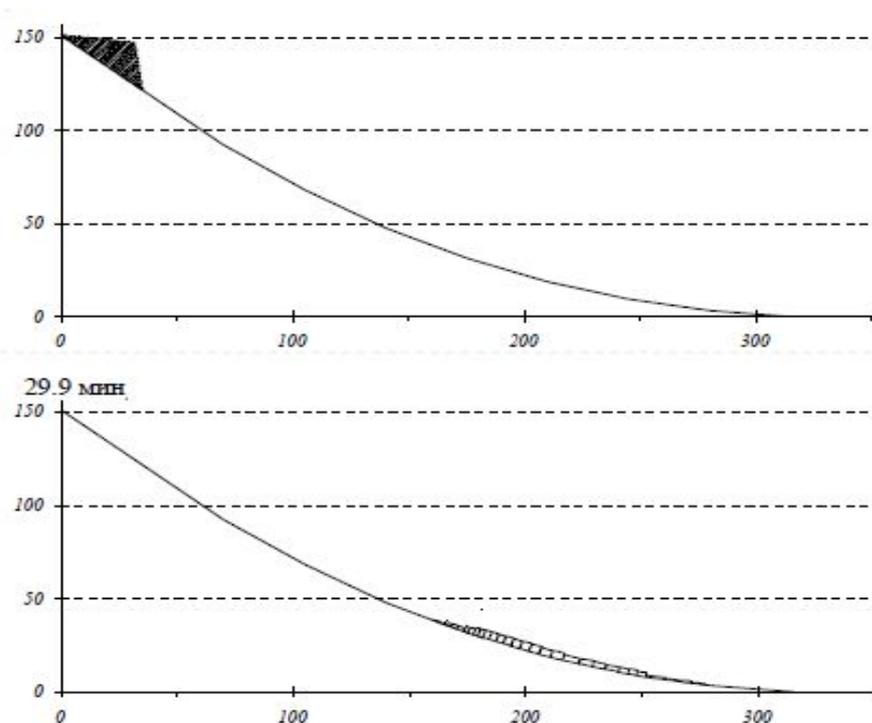


Рис. 9. Движение оползня-потока по склону с переменным углом наклона

Максимальное значение угла наклона склона к горизонту $\alpha_{\max} = 400$, минимальное значение $\alpha_{\min} = 50$. Коэффициенты трения принимали значения $k_C = 0.42$, $k_T = 0.13$, шаг по времени брался равным $\tau = 0.01$, количество частиц $N = 30$, первоначально вся масса оползня была расположена в области $0 \leq x \leq 35$ м. На рис. 9 дано распределение грунта в оползне-потоке для моментов времени – 0; 30 мин. Момент времени 30 мин. соответствует остановке потока, когда в основной массе оползня скорость равна нулю. За 30 мин. оползень-поток прошел расстояние в 247 м, высота вала уменьшилась с 17 м (в начальный момент) до 3,94 м.

Литература

1. Стокер Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. –М.: Изд-во иностр. литературы, 1959. – 617 с.
2. Эглит М.Э. Неустойчивые движения в руслах и на склонах. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 96 с.
3. Богомолов С.В., Захаров Е.В., Зеркаль С.В. Математическое моделирование движения оползня-потока методом частиц // Труды X Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики (МДОЗМФ-2001)». – Херсон, 2001. –С. 69-71.
4. Григорян С.С., Нилов Н.Н., Остроумов А.В., Федоренко В.С. Математическое моделирование горных обвалов и оползней больших объемов // Инженерная геология. – 1983. – № 6. – С. 61-73.
5. Эглит М.Э. Расчет параметров лавин в зоне торможения и остановки // Материалы гляциологических исследований. Хроника обсуждений. – 1982. – Вып. 43. – С. 35-39.
6. Богомолов С.В., Замаева А.А., Карабелли Х., Кузнецов К.В. Консервативный метод частиц для квазилинейного уравнения переноса // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1998. – Т. 38. – № 9. – С. 1602-1607.
7. Богомолов С.В., Кузнецов К.В. Метод частиц для системы уравнений газовой динамики // Математическое моделирование. – 1998. – Т. 10. – № 3. – С. 93-100.
8. Богомолов С.В., Захаров Е.В., Зеркаль С.В. Моделирование волн на мелкой воде методом частиц // Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14. – № 3. – С. 103-116.
9. Зеркаль С.В. Апостериорная оценка погрешности метода частиц на моделях теории мелкой воды // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова. Под ред. Д.П.Костомарова, В.И.Дмитриева. – 2002. – № 10. – С. 90-101.
10. Rodriguez M.X., Bonet J., Kulasegaram S., Lok T.-S.L. Mesh-free Numerical Simulation of Debris Flow Avalanches // Proceedings of ann. conf. Assoc. of Compt. Mech. (ACME), UK – 2000.

11. Kulasegaram S., Bonet J., Lok T.-S.L., Rodriguez-Paz M. Corrected Smooth Particle Hydrodynamics – A Meshless Method for Computational Mechanics // CD-Rom Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering “ECCOMAS-2000”. – Barcelona, – 11-14 September 2000. – 11 p.