УДК 624.012

Л.К.АБДИЕВА, С.К.АБДИЕВА

E-mail: ksucta@elcat.kg.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ И IT-ТЕХНОЛОГИИ

Бул макалада механиканын кебир маселелерин оптималдуу долборлоону IT-технологиясын колдонуу менен каралган.

В данной статье рассматривается применение IT-технологии в некоторых задачах оптимального проектирования конструкций с применением методов оптимизации: симплекс метода и метода динамического программирования.

In given article IT technology application in some problems of optimum designing of designs with application of methods of optimisation is considered: a simplex of a method and a method of dynamic programming.

Широкий класс задач, встречающихся при оптимальном конструировании конструкций, может быть математически сформулирован в виде задач математического программирования (линейного, динамического и др.), т.е. задач поиска экстремума целевой функции нескольких переменных, которые могут быть решены с помощью новых информационных технологий /1-5/.

Основная задача линейного программирования формулируются так: дана линейная форма (целевая функция)

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$$

(1)

и задана система n+m линейных неравенств (ограничений)

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \ \ldots \ \ x_n \ge 0; \qquad (2)$$

$$y_i = -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n + a_i \ge 0;$$
$$(i = 1,2,\ldots,m).$$

(3)

Найти максимум (минимум) формы (1) при выполнении условий (2) и (3). Для решения задач линейного программирования чаще всего применяется симплекс-метод.

Замечание 1. Задачу минимизации функции z можно заменить задачей отыскания максимума функции (- z), к которой применим изложенный выше алгоритм.

Замечание 2. Часто вместо системы неравенств (3) ограничения к задаче линейного программирования задаются в виде системы уравнений или в виде смешанной системы, состоящей из уравнений и неравенств. Кроме того, некоторые из переменных x_1 могут не иметь ограничений по знаку. Для применения симплекс-метода в сформулированном выше виде такую задачу необходимо преобразовать к форме (1), (2), (3). Эти преобразования можно считать вспомогательной задачей линейного программирования, которую можно решать, например, с помощью шагов модифицированного Жорданова исключения.

При методе динамического программирования, предназначенного для решения задач оптимального проектирования, постановка задачи формулируется следующим образом:

рассмотрим функцию вида:

$$z = g_1(x_{0,}x_1) + g_2(x_1, x_2) + \ldots + g_N(x_{N-1}, x_N), \qquad (4)$$

где g_i – заданные функции лишь двух независимых переменных x_{i-1}, x_i

Требуется найти такие значения неизвестных $x_1,\ldots,x_N$, при которых z применяет минимальное значение

$$z \to \min.$$

(5)

Введем функцию $\omega_i(x_i)$, представляющую собой минимум по $x_i,\ldots,x_{i-1}$ суммы первых i слагаемых из (1) при заданном значении x_i :

$$\omega_i(x_i) = \min_{x_i,\ldots,x_{i-1}} \{g_1(x_0, x_1) + \ldots + g_{i-1}(x_{i-2}, x_{i-1}) + g_i(x_{i-1}, x_i)\}.$$

(6)

Очевидно, наименьшее из чисел $\omega_N(x_N)$ и есть минимальное значение функции z.

Произведем теперь некоторые преобразования в правой части (6). Для этого перепишем равенство (6) в виде:

$$\omega_i(x_i) = \min_{x_{i-1}} \min_{x_{i\ldots}, x_{i-2}} \{g_1(x_0, x_1) + \ldots + g_{i-1} \quad (x_{i-2}, x_{i-1}) + g_i(x_{i-1}, x_i)\}$$

(7)

и заметим, что последнее слагаемое в (7) не зависит от $x_1,\ldots,x_{i-2}$

Поэтому последнее слагаемое можно вынести за знак второго минимума, как выносят постоянную. Тогда равенство (7) примет вид

$$\omega_i(x_i = \min_{x_{i-1}})\{g_i(x_{i-1}x_i) + \min_{x_{i,\ldots}, x_{i-2}} [g_1(x_0, x_1) + \ldots + g_{i-1}(x_{i-2}, x_{i-1})]\}.$$

(8)

Второе слагаемое в фигурных скобках в (8) есть ни что иное, как $\omega_{i-1}(x_{i-1})$. Это дает право переписать (8) в виде

$$\omega_i(x_i) = \min_{x_{i-1}} \{g_i(x_{i-1}, x_i \quad) + \omega_{i-1}(x_{i-1})\}. \qquad (9)$$

Равенство (9) называется уравнением Беллмана, а функция (6) – функцией Беллмана.

Чтобы это уравнение можно было использовать при i=1, следует положить $w(x_0)=0$.

Рекуррентная зависимость (9) подсказывает следующий способ решения задачи оптимизации (5), который и носит название метода динамического программирования. Для каждого значения переменной x_1 найдем $\omega_1(x_1)$ и запомним. Затем для каждого $x_2 = x$, используя вычисление значения ω_1, найдем $\omega_2(x_2)$ по формуле (9) и запомним соответствующее условно оптимальное значение (при условии $x_2 = x$) и т. д. Наименьшая из величин дает искомое минимальное значение функции z.

Чтобы найти оптимальные значения, нужно проделать обратный ход, используя сохраненные в памяти условные оптимальные значения.

Метод динамического программирования имеет широкую область принципиально возможных применений. Он позволяет решать задачи оптимизации, в которых $g_1(x_{i-1}, x_i)$ – любые функции, в том числе заданные таблично. При этом выполняется полный перебор всех, подозрительных на оптимальность значений, поэтому найденный экстремум является глобальным. В этом и заключается преимущество метода динамического программирования перед простым перебором, для которого характерна показательная зависимость количества вычислений от числа неизвестных.

Для решения задачи с применением линейного программирования рассмотрим следующую задачу. Заданы схема и две нагрузки для двухпролетной жестко-пластической неразрезной балки из двух элементов постоянного прямоугольного сечения, определяемых пластическими моментами M_1^0 и M_2^0 (рис.1). Требуется так подобрать значения M_1^0 и M_2^0, чтобы добиться минимума веса конструкции в условиях упругопластической работы.

Решение. Стоимость конструкции можно принять пропорциональной предельным пластическим моментом и длинам стержней, откуда получаем целевую функцию

$Z = 2M_1^0 + M_2^0 \rightarrow \min.$

(10)

Согласно статической теореме теории предельного равновесия (теореме А.А.Гвоздева), конструкция не разрушится, если существуют такие значения моментов, которые удовлетворяют условиям равновесия и условиям пластичности. Предельным пластическим моментом называется изгибающий момент, который требуется для полного перехода сечения в пластическую стадию.

Следовательно, задача заключается в минимизации функции (10) при ограничениях, выражающих условия равновесия и пластичности.

Введем основную систему метода сил, отбросив две лишних связи, т.е. введя идеальные шарниры в опорах 1 и 3 (рис.1).

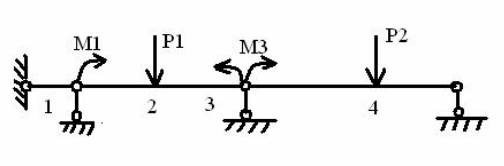

Рис.1. Схема двухпролетной балки

Величины M_1 и M_3 – лишние неизвестные методы сил. Согласно условиям равновесия, максимальные пролетные моменты равны:

$$M_2 = \frac{20*2}{4} = \frac{M_1 + M_3}{2},$$

(11)

$$M_4 = \frac{30*2}{4} = \frac{M_3}{2}.$$

Условия пластичности в опасных сечениях имеют вид:

$$-M_1^0 \le M_1 \le M_1^0,\ M_1 \le 10\frac{M_1 + M_3}{2} \le M_1^0$$

(12)

$$-M_1^0 \le M_3 \le M_1^0,\ -M_2^0 \le M_3 \le M_2^0,\quad -M_2^0 \le 15 + \frac{M_3}{2} \le M_2^0$$

На опоре 3 сформулированы два условия пластичности, поскольку мы не знаем заранее, сечение какого стержня в оптимальном варианте окажется слабее.

Так как моменты над опорами, очевидно, отрицательны, а в опасных сечениях пролетов положительны, то мы можем, введя новые переменные:

$m_1 = -M_1$; $m_3 = -M_3$; ($m_1 \ge 0$, $m_3 \ge 0$,),

(13)

переписать подчеркнутые неравенства (12) в виде:

$y_1 = -m_1 + M_1^0 \ge 0$; $y_2 = m_1 + m_3 + 2M_1^0 - 20 \ge 0$;

$y_3 = -m_3 + M_1^0 \ge 0$; $y_4 = -m_3 + M_2^0 \ge 0$; $y_5 = m_3 + 2M_2^0 - 30 \ge 0$; (14)

где все переменные неотрицательны.

Для нахождения оптимального решения применим инструмент пакета Mathcad (ниже приведено окно расчета приведенного алгоритма решения (рис. 2).

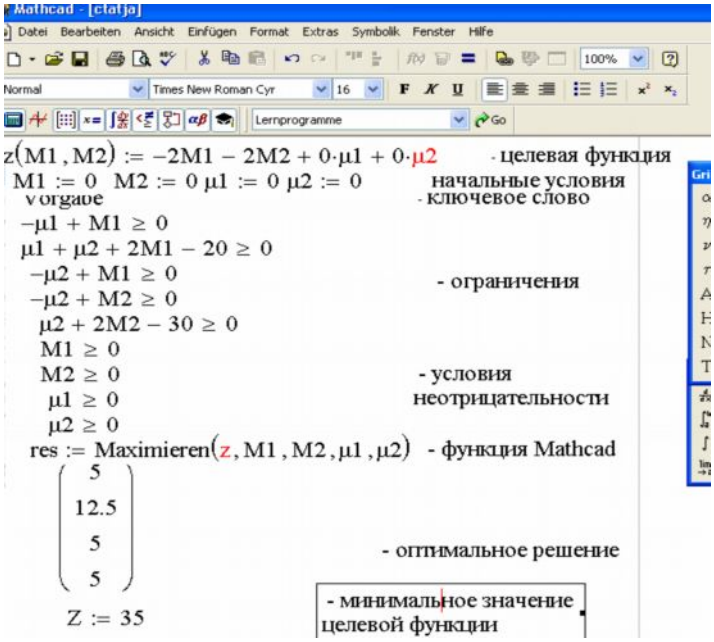

Рис.2. Окно расчета

Получено следующее оптимальное решение: $m_1 = 5$, $m_3 = 5$, $M_1^0 = 5$, $M_2^0 = 12{,}5$. По формулам (13) и (14) находим:

$M_1 = -5$, $M_3 = -5$,

$M_3 = 10+(-5-5)/2=5$; $M_4 = 15-5/2=12{,}5$.

Оптимальное значение целевой функции z=35. Эпюра момента в оптимальной неразрезной балке представлена на рис.3.

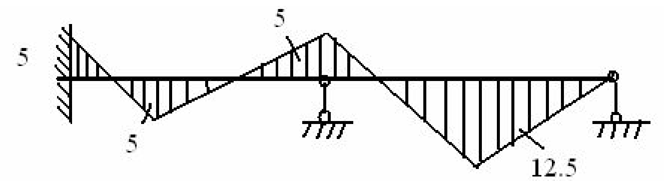

Рис.3. Эпюра момента

Для решения задачи с применением динамического программирования рассмотрим следующую задачу. Заданы нагрузка и длины панелей балочной фермы с восходящими раскосами (рис. 3, а). Требуется составить целевую функцию для задачи отыскания высот стоек $h_1, h_2, \dots h_n$ фермы минимального веса. Показать, что для решения задачи можно использовать метод динамического программирования, и записать уравнение Беллмана.

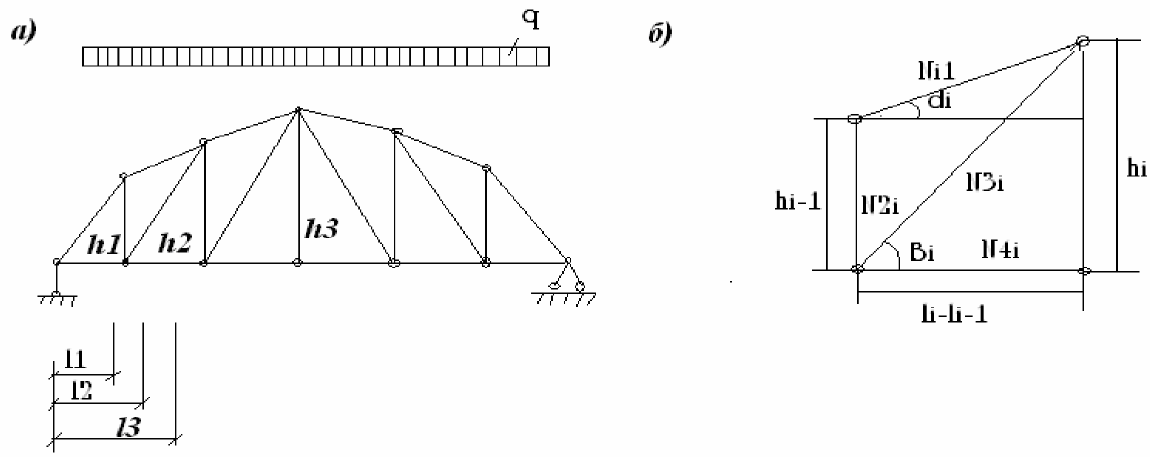

Рис.4

Решение. Рассмотрим i-ю панель фермы (рис.3, б). В силу статической определимости усилия в i-й панели выражаются формулами:

$$N_{1i} = -\frac{M_{i-1}}{h_{i-1} cos\alpha_i}; N_{2i} = Q_i - N_{1i} sin\alpha_i;$$

$$N_{3i} = -\frac{N_{2i}}{sin\,\beta_i}; \; N_{2i} = \frac{M_i}{h_i}$$

(15)

где Mi – изгибающие моменты в точке i простой балки с тем же пролетом, что и у фермы, а Qi – поперечная сила в i-й панели:

$$cos\,\propto_i = \frac{l_i - l_{i-1}}{\sqrt{(l_i - l_{i-1})^2 + (h_i - h_{i-1})^2}};$$

$$sin\,\propto_i = \frac{h_i - h_{i-1}}{\sqrt{(l_i - l_{i-1})^2 + (h_i - h_{i-1})^2}}$$

$$sin\beta_i = \frac{h_i}{\sqrt{(l_i - l_{i-1})^2 + h_i^2}} \qquad (16)$$

По известным усилиям и длинам стержней можно найти их требуемые площади с учетом прочности, устойчивости и конструктивных ограничений. Таким образом, вес каждой панели является функцией высот стоек hi-1, hi, а полный вес фермы равен:

$$z = \sum_{i=1}^{3} g_i\,(h_{i-1,} h_1). \qquad (17)$$

Поскольку целевая функция имеет вид (4), для ее минимизации можно применить метод динамического программирования. Уравнение Беллмана имеет вид /см. (9)/:

$$\omega_i(h_i) = \min_{h_{i-1}}\{g_i(h_{i-1}, h_i) + \omega_{i-1}(h_{i-1})\}.$$

(18)

Вывод. Как видно из вышерассмотренных примеров, применение методов линейного и динамического программирования в решении задач оптимального проектирования конструкций позволяет заранее смоделировать реальные задачи, что является экономически эффективным, так как не требуется больших материальных затрат на экспериментальное и натурное моделирование. В современных условиях это может быть достигнуто использованием новых информационных технологий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кутуев М.Д. Оптимальное управление распределением внутренних усилий строительных конструкций. – Б.: Механика, 1999.
2. Макаров Е.Г. Mathcad. Учебный курс. – СПб.. 2009.
3. Абовский Н.П. Избранные задачи по строительной механике и теории упругости (регулирование, синтез, оптимизация). – М.: Стройиздат, 1978.
4. Радциг Ю.А. Статически неопределимые фермы наименьшего веса. – Казань: Изд-во Казанского университета, 1969.
5. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.