МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. И. РАЗЗАКОВА
КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СТРОИТЕЛЬСТВА, ТРАНСПОРТА И АРХИТЕКТУРЫ
им. Н. ИСАНОВА

Диссертационный совет Д 01.15.505

На правах рукописи
УДК 539.3

ЗАКИРЬЯНОВА ГУЛЬМИРА КОЖАХМЕТОВНА

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СРЕД С УСЛОЖНЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ

01.02.04-механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Бишкек, 2016

Работа выполнена в Кыргызском Государственном Техническом Университете им. И. Раззакова

Научный консультант: доктор физико-математических наук
профессор **Алексеева Л.А.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
профессор **Тюреходжаев А.Н.**

доктор физико-математических наук
профессор **Назарова Л.А.**

доктор физико-математических наук
профессор **Рычков Б.А.**

Ведущая организация: Институт сейсмостойкости сооружений
АН Руз, Республика Узбекистан,
100125, г.Ташкент, ул."Дурмон йули",31

Защита диссертации состоится 9 декабря на заседании объединенного диссертационного совета Д 01.15.505 при Кыргызском государственном техническом университете им. И. Раззакова и Кыргызском государственном университете строительства, транспорта и архитектуры им. Н. Исанова по адресу: 720044, г. Бишкек, пр. Мира, 66, ауд.1/314.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова (720044, г. Бишкек, пр. Мира, 66) и Кыргызского государственного университета строительства, транспорта и архитектуры им. Н. Исанова (720020, Кыргызская Республика, г. Бишкек, ул. А. Малдыбаева, 34б).

Автореферат разослан « 3 » ноября 2016г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, к.ф.-м.н. Мекенбаев Б.Т.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Изучение динамических процессов в сплошных средах, связанных с возникновением, распространением и дифракцией волн, возникающих под действием стационарных и нестационарных воздействий, действия сосредоточенных источников возмущений естественного или искусственного происхождения, относится к числу сложных научно-технических проблем и тесно связано с решением разнообразных инженерно-технических задач, особенно актуальных для стран Средней Азии, которые относятся к числу государств, большая часть территории которых находится в зоне высокой сейсмической активности. В связи с высоким развитием в этом регионе горнодобывающей промышленности остро стоят проблемы обеспечения прочности, надежности и устойчивости разнообразных подземных сооружений (шахт, подземных хранилищ, тоннелей, метрополитенов и т.п.). Эти вопросы тесно связаны с особенностями и строением окружающего массива, характером контактного взаимодействия на границах раздела сред, глубиной заложения сооружений, типа и силы сейсмических воздействий, действующих транспортных и других нагрузок.

Разработка математических моделей волновых процессов в телах и средах с целью наиболее адекватного описания реальных физических процессов является актуальной фундаментальной научной проблемой и связана с построением решений краевых задач для гиперболических систем уравнений и уравнений смешанного типа. Математическая теория краевых задач для таких уравнений пока не имеет достаточного развития в виду сложности динамических процессов в средах. Для учета реальных свойств среды здесь разрабатываются математические модели динамики породного массива при распространении сейсмических волн с привлечением моделей механики деформируемого твердого тела: изотропных и анизотропных упругих, пьезоупругих и двухкомпонентных сред.

В настоящее время наиболее изученной является линейно упругая изотропная модель, но и для нее класс решенных дифракционных задач весьма узок, в основном для границ классических форм, для которых задача допускает разделение переменных. К реальным средам по своим характеристикам ближе анизотропная упругая среда, распространение волн в которой подчинено более сложным закономерностям: могут наблюдаться лакуны. Это явление связано с волноводными свойствами сильно анизотропной среды, резко выраженными в направлениях с преобладающей жесткостью.

Среди динамических задач теории упругости особое место занимают задачи установившихся колебаний, наличие дискретного спектра частот, при которых в телах возникают свободные колебания. При таких частотах наблюдаются резонансные явления: даже кратковременное действие возбуждающей силы той же частоты приводит к потере устойчивости и разрушению конструкции.

Важное место в исследованиях по теории упругости занимают связанные задачи, в которых учитывается связь поля механических напряжений и деформаций с физическими полями другой природы (тепловыми, электромагнитными и др). Здесь рассматриваются волновые процессы в пьезоупругих средах, где связаны между собой упругая деформация и электрические поля. Интерес к изучению пьезоэффекта объясняется широким спектром его приложения: в радиотехнических устройствах для стабилизирования и контролирования частот, в кварцевых часах, приборах для обнаружения подводных лодок и многих других.

Особый класс задач динамики сплошных сред составляют транспортные задачи, в которых действующие нагрузки движутся с определенными скоростями. При этом существенную роль играет соотношение между скоростями распространения сейсмических волн, которых может быть несколько, и скоростью транспортной нагрузки с учетом упругих свойств массива. Реальный породный массив представляет собой сложную многокомпонентную среду, состоящую из твердого пористого скелета, содержащего жидкие и газовые компоненты, которые оказывают существенное влияние на процессы распространения сейсмических волн. Этот класс задач является модельным при изучении воздействия на окружающую среду разнообразных транспортных средств либо транспортируемых объектов.

Целью исследований является разработка методов решения уравнений движения и краевых задач динамики деформируемого твердого тела и исследование на их основе процессов распространения волн в средах с усложненными свойствами.

Задачи исследований:

- на основе теории обобщенных функций разработать методы построения фундаментальных и обобщенных решений уравнений динамики упругих анизотропных сред; изучение волновых и асимптотических свойств решений, построение условий на фронтах ударных волн;
- исследование влияния степени анизотропии на волноводные свойства упругой среды, численные эксперименты;
- разработка метода обобщенных функций для решения краевых задач динамики анизотропных сред при нестационарных воздействиях и в случае стационарных колебаний, а также нестационарных краевых задач динамики пьезоупругих сред;
- построение фундаментальных и обобщенных решений уравнений движения двухкомпонентной среды Био при транспортных нагрузках, построение условий на волновых фронтах; исследование динамики среды при движущихся сосредоточенных нагрузках, численные эксперименты

Объект исследований: упругие анизотропные и пьезоупругие среды, а также двухкомпонентная среда М.Био.

Предмет исследования: волновая динамика деформируемых твердых сред при динамических воздействиях.

Методы исследований: аналитические и численные методы решения дифференциальных уравнений с использованием моделей механики сплошных сред: метод интегральных преобразований, метод граничных интегральных уравнений, метод обобщенных функций и др. Программирование и реализация решений на языке Fortran, в системе MathCad.

Научная новизна работы:

- Разработан метод обобщенных функций для решения краевых задач динамики анизотропных упругих и пьезоупругих сред при нестационарных воздействиях, а также в случае стационарных колебаний анизотропных упругих тел. Построены обобщенные решения уравнений движения таких сред в пространстве обобщенных функций, аналоги формул Сомильяны, Гаусса в пространстве обобщенных функций. Построены сингулярные граничные интегральные уравнения для решения поставленных краевых задач динамики анизотропных сред.
- Использованием аппарата теории обобщенных функций получены законы сохранения энергии, условия сохранения импульса на фронтах, которые связывают скачок скоростей на фронте волны со скачком напряжений.
- На основе преобразования Фурье и Лапласа обобщенных функций построены тензора Грина для уравнений движения анизотропных сред (при плоской и пространственной деформации), тензора фундаментальных напряжений, и их первообразные по времени, исследованы их асимптотические свойства.
- На основе численных экспериментов изучено влияние степени анизотропии породного массива на характер его напряженно-деформированного состояния при действии сосредоточенных импульсных источников.
- Разработана математическая модель динамики породного массива при действии источника возмущений вблизи его дневной поверхности с учетом его анизотропии в случае плоской деформации. Построены трансформанты тензора Грина первой и второй краевой задачи динамики для анизотропной полуплоскости.
- Построены фундаментальные и обобщенные решения уравнений движения двухкомпонентной среды Био, позволяющей учесть водонасыщенность грунтового массива при транспортных нагрузках во всем диапазоне скоростей от дозвуковых до сверхзвуковых. Для сверхзвуковых нагрузок получены условия на фронтах волн.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

- разработка метода обобщенных функций для решения краевых задач динамики анизотропных упругих и пьезоупругих сред при нестационарных воздействиях, а также в случае стационарных колебаний анизотропных упругих тел; построение условий на фронтах ударных волн;
- построение фундаментальных решений – тензоров Грина нестационарных уравнений движения анизотропной среды (при плоской и пространственной деформации);
- построение тензора Грина первой и второй нестационарных краевых задач динамики упругого полупространства при плоской деформации;
- построение фундаментальных и обобщенных решений уравнений движения двухкомпонентной среды Био при транспортных нагрузках во всем диапазоне скоростей от дозвуковых до сверхзвуковых;

- построение динамических аналогов формул Сомильяны, Гаусса в пространстве обобщенных функций и, на их основе, сингулярных граничных интегральных уравнений для решения поставленных краевых задач.

Связь темы диссертации с крупными научными программами (проектами). Диссертационная работа является частью научноисследовательских работ по темам: "Дифракция волн в упругих, термоупругих и многокомпонентных средах" (2012-2014), «Моделирование динамики массива при сейсмических воздействиях» (2013-2015), «Волновая динамика упругих, термоупругих и двухкомпонентных сред» (2015-2017).

Апробации результатов исследования. Основные результаты работы докладывались на многих международных конференциях, среди них: Всерос. съезды по теоретической и прикладной механике (VIII, 2001; IX, 2006), «Mathematical Theory of Hyperbolic Systems of Conservation Laws» (Newton Institute, Cambridge, UK, 2003), 5th European Solid Mechanics Conf. (Greece, 2003), X Int. Conf. on Hyperbolic Problems (Japan, 2004), «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», совместном заседании Московского математического общества и семинара (Москва, 2007), 4th Congress of TWMS (Баку, 2011), "Современные проблемы механики сплошной среды" (Бишкек, 2012), 9 ISAAC Congress (Poland, 2013), «Рахматулинские-Ормонбековские чтения» (Бишкек, 2013), Int. Conf. on Generalized Functions GF2014 (Southampton, UK, 2014), EUROMECH Colloquium «Recent trends in modeling of moving loads on elastic structures» (Turkey, 2015), 10 ISAAC Congress (Macao, 2015), ICAAM 2016 (Almaty).

Достоверность научных результатов обоснована использованием фундаментальных законов МСС, корректной математической постановкой решаемых задач и применением строгих математических методов решения поставленных задач. Полученные решения в частных случаях совпадают с известными формулами и соотношениями механики деформируемого твердого тела.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Разработанный метод обобщенных функций позволяет исследовать физические процессы в деформируемых твердых средах с усложненными свойствами, сопровождающиеся ударными волнами; решать широкий класс задач динамики сплошных сред, описываемых уравнениями гиперболических, эллиптических и смешанных типов.

Личный вклад соискателя. Разработан метод обобщенных функций для решения нестационарных и стационарных задач динамики анизотропных упругих и пьезоупругих сред, а также изотропной двухкомпонентной среды М. Био при действии источников различного типа.

Полнота отражения результатов диссертация в публикациях. По результатам исследований опубликовано более 70 работ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 7 глав, заключения, списка использованных источников из 210 наименований. Объём диссертации содержит 204 страниц текста, включая 35 рисунков.

Автор выражает глубокую благодарность научному консультанту д. ф-м.н. профессору Л.А. Алексеевой за привлечение интереса к данной проблеме, научные консультации и постоянное внимание к данной работе.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** диссертации дается общая характеристика работы: актуальность темы диссертации, научная новизна работы, связь темы диссертации с крупными научными программами, цель и задачи исследования, практическая значимость полученных результатов, основные положения диссертации, выносимые на защиту, личный вклад соискателя, апробации результатов исследования, полнота отражения результатов диссертация в публикациях, структура и объем диссертации.

В **первой главе** дается обзор литературы, состояние проблемы.

Вторая глава посвящена построению обобщенных решений нестационарных краевых задач динамики анизотропных упругих сред при антиплоской деформации. Процессы распространения волн в сплошных средах описываются, как правило, гиперболическими уравнениями и системами. Для гиперболических уравнений характерным является наличие характеристических поверхностей, на которых сами решения, либо их производные разрывны. В физических процессах они описывают ударные волны, на фронтах которых исследуемые характеристики процесса (скорости, напряжения, давление, градиент температуры и др.) могут иметь скачки. Математическая теория краевых задач для таких уравнений требует привлечения аппарата теории обобщенных функций, поскольку решения таких уравнений, как правило, относятся к классу обобщенных функций. Поэтому в начале главы представлены некоторые сведения из теории обобщенных функций, необходимые для дальнейших исследований.

Далее в главе рассматривается постановка нестационарных краевых задач для строго гиперболического уравнения 2-го порядка, описывающего движение анизотропной упругой среды, находящейся в условиях антиплоской деформации. Рассмотрены ударные волны как обобщенные решения уравнений движения рассматриваемых сред, даны условия на волновых фронтах. С использованием методов теории обобщенных функций получен закон сохранения энергии с учетом ударных волн, рассмотрена единственность решений. Для рассматриваемых уравнений построены их фундаментальные решения. Построены динамические аналоги формул Грина и Гаусса в пространстве обобщенных функций, получены их интегральные представления.

Рассматриваемая упругая однородная анизотропная среда характеризуется тензором четвертого ранга упругих постоянных, обладающих свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов

$$C_{ij}^{ml} = C_{ij}^{lm} = C_{ji}^{ml} = C_{ml}^{ij}, \qquad i, j, m, l = \overline{1,3} \tag{1}$$

Структура этого тензора определяет тип анизотропии рассматриваемой среды. В общем случае произвольной анизотропии тензор упругих констант определяется 81 компонентами, но в силу свойства симметрии (1) и произвольности выбора направлений осей декартовой системы координат независимыми из них являются 21 величина. Соотношения симметрии (1) позволяют представить тензор C_{ij}^{ml} в виде квадратной матрицы $C_{\alpha\beta}$ $\left(\alpha, \beta = \overline{1,6}\right)$. Соответствие между парами индексов (ij), (ml) и индексами α, β устанавливается по схеме $(11)\leftrightarrow 1$, $(22)\leftrightarrow 2$, $(33)\leftrightarrow 3$, $(23)=(32)\leftrightarrow 4$, $(31)=(13)\leftrightarrow 5$, $(12)=(21)\leftrightarrow 6$.

Для упругой анизотропной среды закон Гука, связывающий тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij}, записывается в виде

$$\sigma_{im}(x,t)=C_{ij}^{ml}\varepsilon_{jl}(x,t), \quad \varepsilon_{jl}(x,t)=\partial u_j/\partial x_l=u_j,_l(x,t) \tag{2}$$

где $x=(x_1,...,x_N)$, $N-$ размерность пространства (в физических задачах при плоской деформации $N=2$, $N=3$ соответствует пространственному случаю). Предполагая суммирование по повторяющимся идексам в произведении, далее знак суммы опускаем.

В условиях антиплоской деформации характеристики напряженно – деформированного состояния зависят только от координат x_1,x_2, две компоненты вектора перемещения $u(x,t)$ среды, например, $u_1=u_2=0$, $n_3=0$. Тогда $u=u_3(x_1,x_2,t)$, $\sigma_{31}\neq 0,\ \sigma_{32}\neq 0$, остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Система уравнений движения анизотропной среды в случае антиплоской деформации сводится к одному гиперболическому уранению, вид которого зависит от рассматриваемой среды. В общем случае это уравнение представляет собой строго гиперболическое уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i,j}^{N}\left(a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u(x,t)=G(x,t),\ \ (x,t)\in R^{N+1} \tag{3}$$

где $\rho=const$ - плотность среды, коэффициенты $a_{ij}=a_{ji}=const$, соответствующие упругим константам среды, удовлетворяют условию строгой гиперболичности $a_{ij}\xi_i\xi_j\geq\lambda\|\xi\|$, $\lambda=const>0$, $G(x,t)$–массовая сила. Ниже введены следующие обозначения: $u,_i=\partial u/\partial x_i$, $u,_{ij}=\partial^2 u/\partial x_i\partial x_j$, $\dot{u}=u,_t=\partial u/\partial t$, $\ddot{u}=u,_{tt}=\partial^2 u/\partial t^2$.

Решение $u(x,t)$ – дважды дифференцируемая функция почти всюду, за исключением, быть может, характеристических поверхностей (F) в R^{N+1}, которым соответствуют подвижные волновые фронты (F_t) в R^N. Использованием аппарата теории обобщенных функций получены условия на волновых фронтах:

$$[u(x,t)]_{F_t}=0 \tag{4}$$

$$\left[a_{ij}u,_i m_j+\rho c u,_t\right]_{F_t}=0 \tag{5}$$

здесь c - скорость движения волнового фронта определяется решением характеристического уравнения: $a_{ij}\nu_i\nu_j-\rho\nu_t^2=0$, где (ν,ν_t) - вектор характеристичекой нормали. Скачок функции f на волновом фронте F_t опреляется соотношением $[f(x,t)]_{F_t}=f^+(x,t)-f^-(x,t)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(f(x+\varepsilon m,t)-f(x-\varepsilon m,t)\right)$, $x\in F_t$,

$m(x,t)$ (волновой вектор) – единичный вектор нормали к поверхности F_t, направленный в сторону распространения фронта волны: $m = \nu / \|\nu\|_N$.

Из условия непрерывности решения на фронте волны (4) следует условие непрерывности касательных производных функций $u(x,t)$ на волновом фронте:

$$\left[cu,_i - u,_t m_t \right]_{F_t} = 0, \; i = \overline{1,N} \tag{6}$$

Условию (5) в физических задачах соответствует условие сохранения импульса на волновых фронтах.

Заметим, что в отличие от уравнения Даламбера $\left(\partial_t^2 - c^2\Delta\right)u = f(x,t)$ скорость c не является постоянной на фронте волны и зависит от направления нормали в каждой точке фронта волны и

$$c_{\min} \le c < c_{\max}, \text{ где } c_{\min} = \min\left\{a_{ij}\, m_i\, m_j / \rho\right\}, \; c_{\max} = \max\left\{a_{ij}\, m_i\, m_j / \rho\right\}$$

Постановка краевых задач для гиперболического уравнения 2-го порядка. Пусть в области $x \in S^- \subset R^N$, ограниченной поверхностью Ляпунова S, требуется построить решение краевых задач для уравнения (3) при $t \ge 0$. Обозначим через $D^- = S^- \times [0,\infty)$ – пространственно – временной цилиндр: $(x,t) \in D^-$, $D = S \times \left[0,\infty\right)$, $n = (n_1,...,n_N)$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности S $\left(\|n\| = 1\right)$: $\|n(x_2) - n(x_1)\| = O\left(\|x_2 - x_1\|\right)$ для $x_1, x_2 \in S$. Предполагается, что $G \in C(D^- \cup D)$.

Краевая задача I. Найти решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям при $t = 0$

$$u(x,0) = u^0(x), \; x \in \left(S^- \cup S\right), \; u,_t(x,0) = u^1(x), \; x \in S^-, \tag{7}$$

условиям Дирихле

$$u(x,t) = u^S(x,t), \; x \in S, \; t \ge 0 \tag{8}$$

и условиям на волновых фронтах (4) – (5).

Краевая задача II. Найти решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям (7) при $t = 0$, условиям типа условий Неймана

$$a_{ij} u,_i n_j = g_i(x,t), \; x \in S, \; t \ge 0 \tag{9}$$

и условиям на волновых фронтах (4) – (5).

Предполагается, что начальные условия заданы и известно одно из граничных условий соответственно рассматриваемой краевой задаче, причем $u^S \in C(S \times t)$, $g \in C'(S \times t)$, C' – кусочно–непрерывные на данном множестве функции.

Функция $u(x,t) \in C^2(D^-) \cap C^1(D^- \cup D)$ называется *классическим* решением уравнения (3), если она удовлетворяет уравнению (3) в цилиндре D^-, начальным условиям (7) на нижнем основании, граничным условиям (8) либо (9) на S – боковой поверхности этого цилиндра и имеет ограниченное число волновых фронтов, на которых выполняются условия на скачки (4) – (5).

Необходимыми условиями существования дифференцируемого решения начально–краевой задачи являются условия гладкости: $G \in C(D^{-} \cup D)$, $u^{0}(x) \in C^{1}(S^{-} \cup S)$, $u^{1}(x) \in C(S^{-} \cup S)$ и условия согласования начальных и граничных данных. Если эти условия не выполняются, возникают волновые фронты, характерные для ударных волн. Здесь будем предполагать только регулярность этих функций и только одно из двух условий согласования: $u^{S}(x,0) = u^{0}(x)$.

Закон сохранения энергии. Единственность решений начально – краевых задач. Введем следующие функции $\mathrm{W}(x,t) = 0{,}5\, a_{ij} u,_{i}\, u,_{j}$, $\mathrm{K}\,(x,t) = 0{,}5 \rho u,_{t}^{2}$, $\mathrm{E}(x,t) = \mathrm{K}\,(x,t) + \mathrm{W}(x,t) -$ плотности внутренней, кинетической и полной энергии, а также функцию Лагранжа: $\mathrm{L}\;(x,t) = \mathrm{K}\;(x,t) - W\,(x,t)$.

Показано, что если u – классическое решение (3), то на фронтах

$$\left[\mathrm{E}(x,t)\right]_{F_t} = c^{-1}\, n_j \left[a_{ij} u,_{i}\, u,_{t}\right]_{F_t}$$

Доказано, что если внешние воздействия на систему отсутствуют, т.е. $G(x,t) = 0,\ g(x,t) = 0$, то полная энергия $\mathrm{E}(x,t)$ системы не меняется со временем:

$$\int_{S^{-}} \mathrm{E}(x,t)\, dV(x) = \int_{S^{-}} \mathrm{E}(x,0)\, dV(x)$$

Теорема 1. Если классическое решение краевой задачи существует, то оно единственно.

Фундаментальные решения уравнения (3) – решения, когда правая часть $G(x,t)$ уравнения задается сингулярными обобщенными функциями. Физически они описывают движение среды при действии сосредоточенных источников различного вида. Среди фундаментальных решений особое место занимает функция Грина, которая определяется δ – функцией Дирака, т.е. решение (3) при $G(x,t){=}\delta\,(x,t){=}\delta(x)\,\delta(t)$:

$$a_{ij} u,_{ij}\,(x,t) - \rho u,_{tt}\,(x,t) = \delta(x)\,\delta(t),\ (x,t) \in R^{N+1}$$

удовлетворяющее условиям излучения. Здесь $\delta(x,t)$ – обобщенная δ – функция, при фиксированном *k*.

Для построения функции Грина использован матричный метод [4].

Динамический аналог формулы Грина. Введем определенные на всем пространстве R^{N+1} регулярные обобщенные функции

$$\hat{u}(x,t) = u(x,t) H_{D}^{-}(x,t),\ \ \hat{G}(x,t) = G(x) H_{D}^{-}(x,t)$$

где $u(x,t)$ – классическое решение краевой задачи, $H_{D}^{-}(x,t) = H_{S}^{-}(x) H(t)$ – характеристическая функция пространственно – временного цилиндра $D^{-}(x,t)$, $H_{S}^{-}(x)$ – характеристическая функция области S^{-} [20]:

$$H_S^-(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mu\left(S^-\cap O_\varepsilon(x)\right)}{\mu\left(O_\varepsilon(x)\right)}$$

где $\mu(\cdot)$ – мера (площадь, объем) соотвествующего множества, O_ε – ε – окрестность точки x: $O_\varepsilon(x)=\left\{y:\|y-x\|<\varepsilon\right\}$. Если граница области S – гладкая с непрерывной нормалью, то $H_S^-(x)=1/2$ для $x\in S$. Функцию Хевисайда $H(t)$ доопределим в нуле: $H(0)=1/2$.

Введем первообразную функции Грина $U(x,t)$ по времени:

$$V(x,t)=U(x,t)*\delta(x)H(t)=U(x,t)\underset{t}{*}H(t),\quad \partial_t V(x,t)=U(x,t) \tag{10}$$

Здесь символ $"\underset{t}{*}"$ означает неполную свертку функций по t, которая для регулярной функции имеет вид $f(x,t)\underset{t}{*}g(x,t)=H(t)\int_0^t f(x,t-\tau)g(x,\tau)d\tau$. Первообразная $V(x,t)$ является решением (3) при $G(x,t)=\delta(x)H(t)$.

Теорема 2. Если классическое решение краевой задачи $u(x,t)$ существует и единственно, то обобщенное решение $\hat{u}(x,t)$ представимо в виде свертки [2]:

$$\hat{u}(x,t)=U*G+U\underset{x}{*}u^1(x)H_S^-(x)+\left(U\underset{x}{*}u^0(x)H_S^-(x)\right),_t- \tag{11}$$

$$-U*g(x,t)\delta_S(x)H(t)-a_{ij}V,_j*u,_t\,n_i\delta_S(x)H(t)-a_{ij}V,_j\underset{\mathrm{x}}{*}u^0(x)n_i\delta_S(x)$$

здесь $\delta_S(x)$ – сингулярная обобщенная функция – простой слой на поверхности S, соответственно $g(x,t)\delta_S(x)H(t)$ – простой слой на боковой поверхности цилиндра $D=S\times[0,\infty)$, $\delta(t)$ – функция Дирака.

Следствие. При однородных ($u^m(x)=0,\ m=0{,}1$) начальных условиях решение определяется граничными значениями скоростей и нормальных производных $\partial u/\partial n$:

$$\hat{u}(x,t)=U*G-U*g(x,t)\delta_S(x)H(t)-a_{ij}V,_j*u,_t\,n_i\delta_S(x)H(t) \tag{12}$$

В (11) плотности простых и двойных слоев определяются заданными начальными условиями (7) и граничными условиями (8), (9), часть из которых, в зависимости от решаемой краевой задачи, известна. Таким образом, полученная формула по известным начальным и граничным значениям восстанавливает решение в области, поэтому ее можно назвать аналогом формулы Грина для решений уравнений (3). Она является обобщенным решением поставленных задач и может использоваться при $\forall\hat{G}$ в том числе и сингулярных, что характерно для физических задач.

Аналог формулы Гаусса. Введем функцию напряжений T, аналог тензора напряжений и ее первообразную по времени W:

$$T(x,t,n) = a_{ij}U_{,i}\,n_j(x), \quad W(x,n,t) = T(x,n,t)\underset{t}{*}H(t) = a_{ij}\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i}n_j$$

удовлетворяющих соотношениям симметрии.

При фиксированном n функция $T(x,n,t)$ является фундаментальным решением уравнения (3), соответствующим сосредоточенной силе мультипольного типа

$$G(x,t) = a_{ij}n_j\delta_{,i}(x)\delta(t).$$

Динамический аналог формулы Гаусса. В $\mathrm{D}'(R^{N+1})$:

$$-a_{ij}V_{,i}\,n_j\underset{x}{*}\delta_S(x) - \rho U_{,t}\underset{x}{*}H_S^-(x) = H_D^-(x,t)$$

Полученные динамические аналоги формулы Грина и Гаусса используем для построения граничных интегральных уравнений при решении краевых задач.

При однородных начальных условиях формулу (11) формально можно записать в следующем интегральном виде (для $N = 2$)

$$\hat{u}(x,t) = \int_{D^-} U(x-y,t)\hat{G}(y,t)dV(y,t) -$$

$$-\int_0^t d\tau\int_S U(y-x,\tau)g(y,\tau)dS(y,\tau) - \int_0^t d\tau\int_S T(y-x,n(y),t-\tau)u(y,\tau)dS(y) +$$

$$+\int_{S^-}\left(U_{,t}(x-y,t)u^0(y) + U(x-y,t)u^1(y)\right)dV(y)$$

Особенности фундаментальных решений не позволяют использовать последнюю формулу для построения решений краевых задач, в силу сингулярности U и T интегралы справа не существуют. Однако введенные выше первообразные матрицы позволяют строить интегральные представления формулы (11), вид которых зависит от размерности задачи.

В третьей главе на основе обобщенного преобразования Фурье разработан метод построения фундаментальных решений уравнений динамики анизотропных сред при действии импульсных сосредоточенных источников. Уравнения движения анизотропной упругой среды с учетом закона Гука (2) описываются системой гиперболических уравнений вида:

$$L_{ij}(\partial_x,\partial_t)u_j(x,t) + G_i(x,t) = 0, \ (x,t)\in R^{N+1} \tag{13}$$

$$L_{ij}\left(\partial_x,\partial_t\right) = C_{ij}^{ml}\partial_m\partial_l - \rho\delta_{ij}\partial_t^2, \quad i,j,m,l = \overline{1,N}, \tag{14}$$

где $\delta_{ij} = \delta_i^j$ – символ Кронекера, $\partial_x = (\partial_1,...,\partial_N)$, $\partial_t = \partial/\partial t$, массовая сила G – локально-интегрируемая вектор – функция, C_{ij}^{ml} – упругие константы среды, обладающие указанными выше свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов (1) и отвечающие следующему условию строгой гиперболичности:

$$W(n,v) = C_{ij}^{ml}n_m n_l v^i v^j > 0 \quad \forall n \neq 0, \quad v \neq 0 \tag{15}$$

здесь $n=(n_1,...,n_N)$, $\nu=(\nu_1,...,\nu_N)$. В силу положительной определенности W характеристическое уравнение системы (13)

$$\det\left\{C_{ij}^{ml}n_m n_l-\rho c^2\delta_{ij}\right\}=0, \tag{16}$$

имеет $2N$ (с учетом кратности) действительных корней:

$$c=\pm c_k(n),\quad 0<c_k\le c_{k+1},\quad k=\overline{1,N-1}$$

Они имеют смысл фазовых скоростей при гармоническом анализе системы (13) и в общем случае зависят от направления распространения волны.

В силу сплошности рассматриваемых сред, на волновых фронтах F_t выполняются условия непрерывности перемещений при переходе через волновой фронт:

$$[u_i(x,t)]_{F_t}=0,\quad i=\overline{1,N} \tag{17}$$

Следствием (17) являются условия непрерывности касательных производных перемещений на фронте волны:

$$[u_{i,t}\,n_l+cu_{i,l}]_{F_t}=0,\quad i,l=\overline{1,N} \tag{18}$$

где c – скорость движения волнового фронта, $n(x,t)=(n_1,...,n_N)$ – единичный вектор нормали к поверхности F_t, направленного в сторону распространения волнового фронта. Применение закона импульса сил и изменения количества движения приводит к выполнению динамических условий совместности для поля перемещений на волновых фронтах:

$$[\sigma_i^l n_l+\rho cu_{i,t}]_{F_t}=0,\quad i,l=\overline{1,N} \tag{19}$$

Условие (19) связывает скачок скоростей на фронте волны со скачком напряжений. Поэтому такую поверхность называют фронтом ударной волны. Предполагается, что число волновых фронтов конечно, и каждый фронт почти всюду является поверхностью Ляпунова размерности $N-1$.

Обозначим через $\mathsf{D}'(R^{N+1})$ пространство обобщенных вектор – функций $\hat{f}(x,t)=(\hat{f}_1,...,\hat{f}_N)$, определенных на пространстве $\mathsf{D}(R^{N+1})$ финитных бесконечно дифференцируемых вектор – функций $\varphi(x,t)=(\varphi_1,...,\varphi_N)$.

Определение. Функция $\hat{u}(x,t)\in\mathsf{D}'(R^{N+1})$ называется *обобщенным решением* системы уравнений (13), если справедливо равенство $(L\hat{u},\varphi)\equiv(\hat{u},L\varphi)=(G,\varphi)\quad\forall\varphi\in\mathsf{D}(R^{N+1})$.

Решение $u(x,t)$, рассматриваемое как регулярная обобщенная функция, обозначим через $\hat{u}(x,t)=u(x,t)$. Аналогично $\hat{G}(x,t)=G(x,t)$.

Показано, что если функция $u(x,t)$ – классическое решение уравнений (13), то $\hat{u}(x,t)$ – обобщенное решение системы (13).

Фундаментальные решения. При построении тензора Грина используется аппарат интегральных преобразований (Фурье – Лапласа), позволяющий перейти от дифференциальных уравнений к линейным алгебраическим уравнениям для ее изображения. Разрешая последние, определяют трансформанту искомой функции в виде дробно – рациональной функции от переменных интегральных преобразований, затем восстанавливают оригинал. Использовать обратное интегральное преобразование Фурье часто бывает невозможно. Это приводит к привлечению аппарата обобщенного интегрального преобразования Фурье.

Фундаментальные решения дифференциальных уравнений определяются с точностью до решения однородного уравнения. Поэтому полученная трансформанта Фурье определяет целый класс фундаментальных решений. Математически это проявляется в наличии неинтегрируемых особенностей при действительных значениях переменныъ Фурье. Поэтому следует строить определенные регляризации трансформант с учетом условий излучения.

Рассмотрим систему уравнений (13) в пространстве обобщенных функций $\mathrm{D}'(R^{N+1})$. Матрицей Грина $U_{jk}(x,t)$ системы (13) является ее решение из $\mathrm{D}'(R^{N+1})$ при $\hat{G}(x,t)=\delta_{ik}\delta(x,t)$:

$$C_{ij}^{ml}\,U_{j}^{k},_{ml}(x,t)+\delta_{ik}\delta(x,t)=0,\quad i,j,k=\overline{1,N} \tag{20}$$

удовлетворяющее условиям

$$U_{jk}(x,0)=0 \quad \text{при} \quad x\neq 0 \tag{21}$$

$$U_{jk}(x,t)=0 \quad \text{при}\ \ \mathrm{t}<0,\qquad |x|>c_{\max}\,t \tag{22}$$

Доказано [11]*:* 1. Если c_q $\left(q=\overline{1,N}\right)$простые корни уравнения (16), то

$$U_{jk}(x,t)=\frac{(N-2)!}{(2\pi i)^{N}}H(t)\sum_{q=1}^{M}\int\limits_{\|e\|=1}A_{jk}(e,c_q)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\left((e,x)+c_q(e)t-i0\right)^{N-1}}-\frac{1}{\left((e,x)-c_q(e)t-i0\right)^{N-1}}\right\}dS(e)$$

где $A_{jk}\left(e,c_q\right)=\dfrac{Q_{jk}\left(e,c_q\right)}{2c_q\,Q_{mm}\left(e,c_q\right)}$, $H(t)$ – функция Хевисайда.

2. Если c_q $\left(q=\overline{1,N}\right)$ – корни уравнения (16) кратности m_q, то

$$U_{jk}=\frac{(N-2)!}{(2\pi i)^{N}}H(t)\sum_{q}m_q\int\limits_{R^N}\frac{Q_{jk,\omega}^{(m_q-1)}\left(e,c_q\right)}{\left(Q_{,\omega}^{(m_q)}\left(e,c_q\right)\right)}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\left(\left(e,x\right)+c_q(e)t-i0\right)^{N-1}}-\frac{1}{\left(\left(e,x\right)-c_q(e)t-i0\right)^{N-1}}\right\}dS(e)$$

здесь верхний индекс в скобках означает порядок производной по ω.

Таким образом, построение матрицы Грина сводится к вычислению интегралов по единичной сфере. Для нечетных N эти теоремы позволяют строить только ε – приближение матрицы Грина. Для четных N для определения ε – приближения необходимо интегрирование многомерного поверхностного интеграла по единичной сфере. Однако в ряде случаев эта процедура может быть упрощена.

Заметим, что если известен оригинал Q^{-1}

$$J(x,t)=F^{-1}\left[\frac{1}{Q\left(i\xi,i\omega\right)}\right]$$

который строится с учетом условий (21), то можем восстанавить матрицу Грина

$$U_{jk}\left(x,t\right)=-Q_{jk}\left(\partial_x,\partial_t\right)J\left(x,t\right) \tag{23}$$

В случае инвариантности уравнений (13) относительно группы ортогональных преобразований символ оператора L_{ij} является функцией только двух переменных $\|\xi\|$, ω и может быть представлен в виде

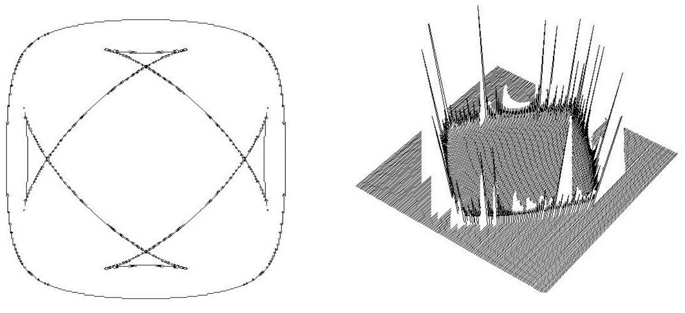
$$Q(i\xi,i\omega)=(i\omega)^{2N}\,Q\left(\|\xi\|\omega^{-1}\right) \tag{24}$$

В случае плоской деформации тензор Грина представляет собой сумму вычетов дробно–рациональных функций [21]:

$$U_j^k(x,t)=\frac{1}{\pi t}\operatorname{Im}\sum_{\substack{q=1\\ \operatorname{Im}\zeta_q>0}}^{2}\frac{Q_{jk}\left(\zeta_q,1,(x_1\zeta_q+x_2)/t\right)}{Q,_\zeta\left(\zeta_q,1,(x_1\zeta_q+x_2)/t\right)}$$

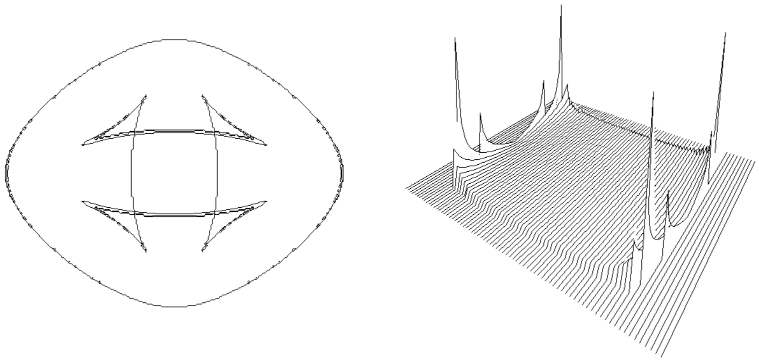
где $Q_{jj}(\cdot)=-L_{kk}(\cdot)$, $Q_{jk}(\cdot)=L_{jk}(\cdot)\quad j\neq k$ или $Q_{11}(\xi_1,\xi_2,\omega)=C_{66}\xi_1^2+C_{22}\xi_2^2+\rho\omega^2$, $Q_{12}(\xi_1,\ \xi_2,\ \omega)\ =\ -\left(C_{12}+C_{66}\right)\xi_1\xi_2$, $Q_{22}(\xi_1,\ \xi_2,\ \omega)=C_{11}\xi_1^2+C_{66}\xi_2^2+\rho\omega^2$, ζ_q– корни уравнения $Q\left(\zeta,1,x_1\zeta+x_2\right)=0$, $Q=Q_{11}Q_{22}-Q_{12}^2$.

В работе рассматривается анизотропная модель среды со слабой и сильной анизотропией упругих свойств. В первом случае топологический тип волновых фронтов подобен расширяющимся сферам. Во втором случае появляются сложные волновые фронты и лакуны - подвижные невозмущенные области, ограниченные волновыми фронтами и расширяющиеся с течением времени. Лакуны–компоненты дополнения к поверхности волнового фронта, в которых фундаментальные решения обращаются в нуль (сильные лакуны). Такая среда обладает резко выраженными волноводными свойствами в направлении вектора максимальной скорости.



а) б)

Рисунок 1 – Картина волновых фронтов (а) и амплитуды перемещений (б) для топаза при действии сосредоточенной силы



а) б)

Рисунок 2 – Картина волновых фронтов (а) и амплитуды перемещений (б) для калия – пентабората при действии сосредоточенной силы

Результаты численных расчетов показывают, что в средах со слабой анизотропией упругих свойств (например, арагонита) картина распространения волн подобна картине распространения волн в изотропной среде, но фронты волн, представляющие замкнутые гладкие кривые, несколько отличаются от концентрических окружностей. В средах с сильной анизотропией упругих свойств возникают лакуны [7, 27]. Координаты таких областей удовлетворяют условиям $\mathrm{Im}\,\zeta_q(x_1,x_2,t)=0,\ q=1{,}2$. Это явление связано с волноводными свойствами сильно анизотропной среды, которые резко выражены в направлениях с преобладающей жесткостью и ослаблены в тех, где жесткость мала. Так, для ортотропных цинка, топаза и калия–пентабората, являющихся сильно анизотропными средами, имеет место наличие лакун (изображены треугольными областями). Расположение лакун различно: для топаза – на обеих осях ортотропии (рис. 1), для калия–пентабората – между осями ортотропии (рис. 2). Для этих сред область квазипродольной волны представляет собой пятисвязную область, ограниченную внешним фронтом и частями внутреннего фронта волны, соединяющими точки возврата между собой, и с узловыми точками. Эти участки внутреннего фронта волны, образующие замкнутые кусочно-гладкие линии, являются внутренними фронтами квазипродольной волны. Фронт квазипоперечной волны состоит из кусочно–гладких кривых.

Приведем результаты расчета тензора Грина для топаза при действии диполя.

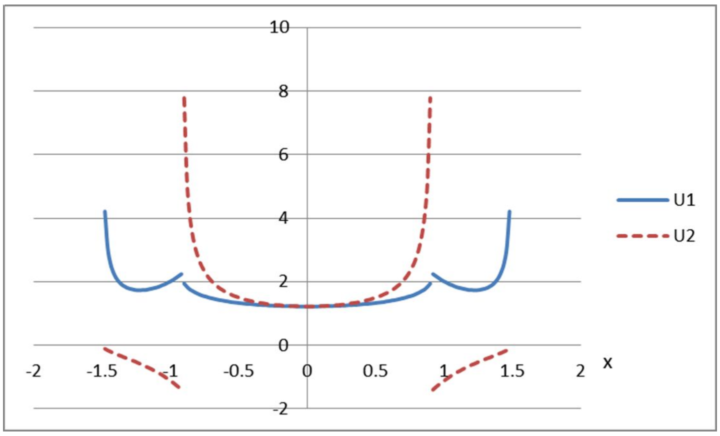


Рисунок 3 - Компоненты тензора Грина для алевролита при действии сосредоточенных сил и моментов при t= 1,5

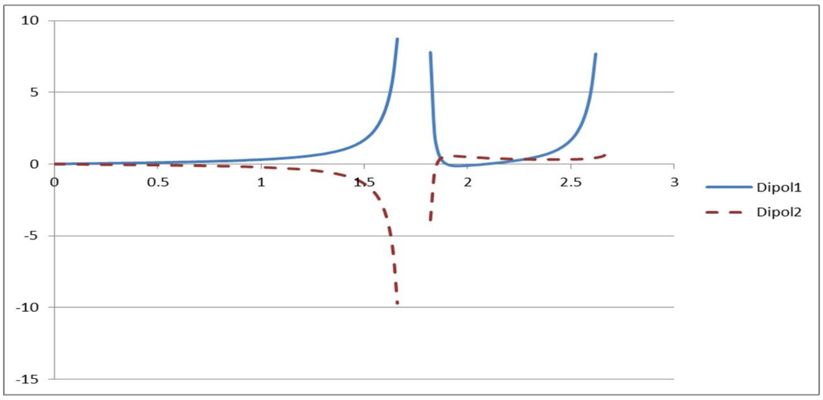


Рис. 4 Компоненты тензора Грина для топаза при действии диполя

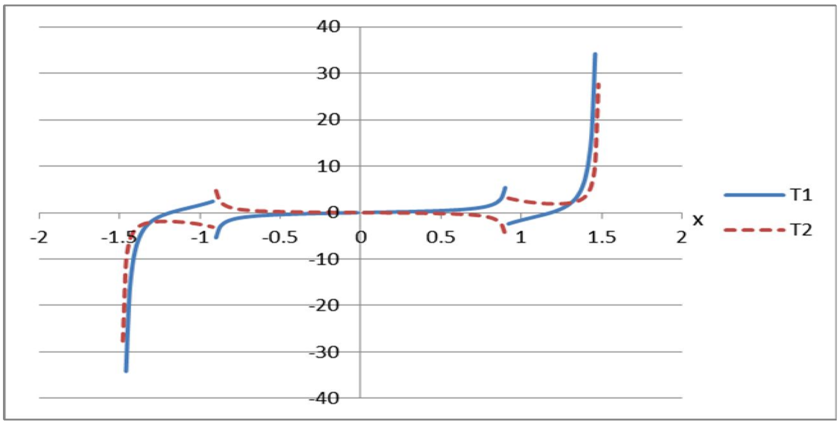


Рисунок 5 - Компоненты тензора фундаментальных напряжений для алевролита при действии сосредоточенных сил при t= 1,5

Расчеты показывают, что перемещения терпят разрыв для топаза на волновых фронтах при действии импульсных источников. Лакуны располагаются на координатных осях. Скачки на обоих фронтах претерпевают обе составляющие перемещений. В участках, соответствующих лакуне, перемещения отсутствуют.

Разработана математическая модель динамики породного массива при действии источника возмущений вблизи его дневной поверхности с учетом его анизотропии в случае плоской деформации. Построены трансформанты тензора Грина первой и второй краевой задачи динамики для анизотропной полуплоскости.

Исследование процессов распространения волн от очагов землетрясений связано с изучением напряженно–деформированного состояния среды при действии распределенных массовых сил $G_k(x,t)$. Для регулярных массовых сил компоненты поля перемещений есть следующие интегральные представления: $u_i(x,t)=\int\limits_0^\infty d\tau\int\limits_{R^3}U_{ik}(x-y,t-\tau)G_k(y,\tau)dV(y)$. Для удаленного очага землетрясения, расстояние до которого существенно превышает его размеры, используются модели сосредоточенных источников в виде сингулярных обобщенных функций с точечным носителем (поль, диполь, мультиполь и др.). Поле перемещений при этом имеет вид свертки $U_{jk}(x,t)$ с соответствующей $G_k(x,t)$: $u_j(x,t)=U_j^k(x,t) * G_k(x,t),\quad j,k=\overline{1,3}$, которую следует брать по правилам определения свертки в теории обобщенных функций.

Построенные тензора Грина позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние рассматриваемых сред при действии произвольных нагрузок, распределенных как по времени, так и по пространству.

В четвертой главе рассмотрены нестационарные краевые задачи динамики упругих анизотропных сред. Дана постановка начально–краевых задач, доказана единственность решений краевых задач. На основе теории обобщенных функций разработан метод построения условий на фронтах ударных волн, получены условия на скачки напряжений, скоростей на фронтах ударных волн. Построены обобщенные решения нестационарных краевых задач для упругой анизотропной среды. Построены нестационарные аналоги формул Сомильяны, Гаусса в пространстве обобщенных функций. Даны регулярные интегральные представления решений при плоской деформации и сингулярные граничные интегральные уравнения начально–краевых задач.

Постановка начально-краевых задач. Условия на фронтах. Пусть рассматриваемая среда занимает область $S^- \in R^N$, ограниченную гладкой замкнутой поверхностью S из класса поверхностей Ляпунова с внешней нормалью $n=(n_1,...,n_N)$ $(\|n\|=1)$ к поверхности S: $\|n(x_2)-n(x_1)\|=O(\|x_2-x_1\|),\ x_1,x_2\in S$. Обозначим через $D^-=S^-\times[0,\infty)$ – пространственно – временной цилиндр: $(x,t)\in D^-$, $D=S\times[0,\infty)$ – поверхность этого цилиндра, $D_t^-=S^-\times[0,t]$, $D_t=S\times[0,t]$. Рассматриваются следующие краевые задачи.

Начально-краевая задача I. Найти решение системы уравнений движений (13), при заданных начальных перемещениях и скоростях:

$$u_i(x,0)=u_i^0(x), \quad x\in S^-\cup S, \quad u_{i,t}(x,0)=u_i^1(x), \quad x\in S^-, \tag{25}$$

и заданных перемещениях на границе:

$$u_i(x,t)=u_i^S(x,t), \quad x\in S, \quad t\geq 0 \tag{26}$$

а также условиям на фронтах ударных волн (17), (19).

Начально-краевая задача II. Найти решение системы уравнений движений (13), удовлетворяющее начальным условиям (25), (26) при заданных напряжениях на границе:

$$\sigma_i^l(x,t)n_l(x)=g_i(x,t), \quad x\in S, \quad t\geq 0, \quad i=\overline{1,N} \tag{27}$$

и условиям на фронтах (17), (19).

Предполагается, что начальные $u_i^0(x)$ и граничные $u_i^s(x,t)$ функции перемещений непрерывны, начальные скорости $u_i^1(x)$ и граничные нагрузки $g_i(x,t)$ – кусочно–непрерывные функции. Для непрерывности и дифференцируемости решений необходимы условия согласования начальных и граничных данных:

$$u_i^s(x,0)=u_i^0(x), \quad u_{i,t}^s(x,0)=u_i^1(x), \quad x\in S \tag{28}$$

Первое условие необходимо для сохранения сплошности среды. В случае, когда внешние воздействия (силы) имеют ударный характер и описываются разрывными или сингулярными функциями, второе из условий (28) согласования по скоростям могут не выполняться, что типично для физических задач. На возникающих в таких случаях в среде волновых фронтах производные перемещений могут терпеть скачки.

Получен *закон сохранения энергии,* доказана *единственность решений первой* (*второй*) *краевой задачи.*

Динамический аналог формулы Сомильяны. Пусть матрица Грина $U_j^k(x,t)$– решение уравнений (13). Введем первообразную матрицы Грина по времени:

$$V_j^k(x,t) = U_j^k(x,t)\underset{t}{*}H(t) \quad \Rightarrow \quad \partial_t V_j^k(x,t)=U_j^k(x,t) \tag{29}$$

Теорема 3. Если классическое решение первой (второй) краевой задачи $u(x,t)$ существует и единственно, то обобщенное решение $\hat{u}(x,t)$ представимо в виде свертки [26]:

$$\begin{gathered}\hat{u}_i(x,t)=U_i^k(x,t)\underset{x}{*}2\rho u_k^1(x)\,H_S^-(x)+\\ +\rho\left(\partial_t U_j^k(x,t)\underset{x}{*}u_k^0(x)H_S^-(x)\right)+U_j^k(x,t)*g_k(x,t)\delta_S(x)H(t)+\\ +C_{kj}^{ml}\partial_t V_j^k(x,t)*u_{j,t}(x,t)n_m(x)\delta_S(x)H(t)+C_{kj}^{ml}\partial_l V_j^k(x,t)\underset{x}{*}u_j^0(x)n_m(x)\delta_S(x)\end{gathered} \tag{30}$$

Для записи этой формулы в интегральном виде и построении на ее основе граничных интегральных уравнений для решения начально-краевых задач рассмотрены свойства входящих в нее функциональных матриц. Используя матрицу Грина $U_j^k(x,t)$, введем фундаментальные матрицы S, T, элементы которых определяются равенствами:

$$S_{ik}^{m}(x,t)=C_{ij}^{ml}U_j^k,_l(x,t), \quad \Gamma_i^k(x,t,n)=S_{ik}^m(x,t)n_m(x) \tag{31}$$

$$T_k^i(x,t,n)=-\Gamma_i^k(x,t,n)=-C_{ij}^{ml}n_m(x)U_j^k,_l(x,t), \quad i,j,k,m,l=\overline{1,N} \tag{32}$$

Тогда уравнение для $U_j^k(x,t)$ уравнение (20) можно записать в виде:

$$S_{ik}^m,_l(x,t)-\rho U_i^k,_{tt}(x,t)+\delta_i^k\delta(x)\delta(t)=0 \tag{33}$$

Введенные матрицы обладают свойствами симметрии, они являются следствием инвариантности уравнений (33) для $U_j^k(x,t)$ относительно преобразований симметрии $y=-x$.

При фиксированном k матрица $T_i^k(x,t,n)$ является фундаментальным решением системы уравнений (13), соответствующим

$$G_i(x,t)=C_{ik}^{ml}n_m(x)\delta,_l(x)\delta(t).$$

Назовем матрицу $T_i^k(x,t,n)$ *мультипольной матрицей*, поскольку она описывает фундаментальные решения системы (13), порождаемые сосредоточенными источниками мультипольного типа. Для построения регулярных представлений решений (30), наряду с V_i^k, введем матрицу

$$W_j^k(x,t,n)=T_j^m(x,t,n)*\delta_{mk}\delta(x)H(t)=T_j^k(x,t,n)\underset{t}{*}H(t), \tag{34}$$

которая является первообразной по времени мультипольной матрицы:

$$\partial_t W_j^k(x,t)=T_j^k(x,t) \tag{35}$$

Ясно, что V_i^k и W_i^k являются фундаментальными решениями систем уравнений:

$$L_{ij}(\partial_x,\partial_t)V_j^k(x,t)+\delta_i^k\delta(x)H(t)=0$$

$$L_{ij}(\partial_x,\partial_t)W_j^k(x,t)+C_{ki}^{ml}n_m(x)\delta,_l(x)H(t)=0$$

V_i^k и W_i^k также обладают свойствами симметрии.

Введем $U_i^{k(s)}(x)$ – матрицу Грина статических уравнений:

$$L_{ij}(\partial_x,0)U_j^{k(s)}(x)+\delta_{ik}\delta(x)=0, \quad U_j^{k(s)}(x)\to 0 \ \ \|x\|\to\infty \tag{36}$$

а также матрицу, аналогично (32):

$$T_i^{k(s)}(x,n) = -C_{kj}^{ml}\, n_m(x)\, \partial_l U_j^{i(s)}$$

Очевидно, что справедливы следующие соотношения симметрии

$$T_i^{k(s)}(x,n) = -T_i^{k(s)}(-x,n) = -T_i^{k(s)}(x,-n)$$

$T_i^{k(s)}$ является фундаментальным решением уравнений статики:

$$L_{ij}(\partial_x,0)\mathrm{T}_j^{k(s)}(x,n) - n_m(x)C_{ik}^{ml}\,\delta,_l(x) = 0$$

Доказано, что имеют место следующие представления:

$$V_i^k(x,t) = U_i^{k(s)}(x)H(t) + V_i^{k(d)}(x,t)$$

$$W_i^k(x,t) = T_i^{k(s)}(x)H(t) + W_i^{k(d)}(x,t),$$

где $U_i^{k(s)}(x)H(t)$, $T_i^{k(s)}H(t)$ – регулярные функции при $x \neq 0$. При $\|x\| \to 0$

$$U_i^{k(s)}(x) \approx \ln\|x\|\, A_{ik}^N(e_x), \quad T_i^{k(s)} \approx \|x\|^{-1}\, B_{ik}^N(e_x), \quad N = 2$$

$$U_i^{k(s)}(x) \approx \|x\|^{-N+2} A_{ik}^N(e_x), \quad T_i^{k(s)} \approx \|x\|^{-N+1} B_{ik}^N(e_x), \quad N > 2$$

здесь $e_x = x/\|x\|$, $A_{ik}^N(e_x)$, $B_{ik}^N(e_x)$ – непрерывные и ограниченные на сфере $\|e\| = 1$ функции; $V_i^{k(d)}$, $W_i^{k(d)}$ – регулярные функции, непрерывные при $x = 0,\ t > 0$. При любом N:

$$V_i^{k(d)}(x,t) = 0 \ \text{ и } W_i^{k(d)}(x,t) = 0 \ \text{ при } \|x\| > \max_{\|e\|=1} c_k(e)t,$$

а при нечетных N эти равенства справедливы и при $\|x\| < \min_{\|e\|=1} c_k(e)t$.

Динамический аналог формулы Гаусса. Граничные интегральные уравнения нестационарных краевых задач.

Лемма (аналог формулы Гаусса). Если S – произвольная замкнутая поверхность Ляпунова в R^N, то

$$\int_S T_i^{k(s)}(y-x,n(y))\,dS(y) = \delta_k^i\, H_S^-(x)$$

при $x \in S$ интеграл сингулярный, берется в смысле главного значения.

Теорема 4. Классическое решение первой (второй) начально–краевой задачи для $x \in S,\ t > 0$ удовлетворяет сингулярным граничным интегральным уравнениям вида

$$0.5u_k(x,t) = U_k^i(x,t) * G_i(x,t) + U_k^i(x,t) * g_i(x,t)\,\delta_s(x)H(t) -$$

$$-V.P.\int_S T_k^{i(s)}(x-y,n)\,u_i(y,t)\,dS(y) - \int_S dS(y) \int_0^t W_k^{i(d)}(x-y,n,t-\tau)\,u_i,_t(y,\tau)\,d\tau -$$

$$-\int_S W_k^{i(d)}(x-y,n,t)\,u_i^0(y)\,dS(y)+\left(U_k^i(x,t)\underset{x}{*}u_i^0(x)\,H_S^-(x)\right)_{,t}+U_k^i(x,t)\underset{x}{*}u_i^1(x)\,H_S^-(x)$$

Эти уравнения позволяют определить неизвестные граничные функции соответствующей начально–краевой задачи. После их определения формулы теоремы определяют решение внутри области определения.

Вопрос разрешимости полученных СГИУ на определенном классе функций представляет собой самостоятельную задачу функционального анализа. Численное решение этих уравнений с использованием метода граничных элементов вполне реализуемо. С частными случаями решения таких СГИУ для нестационарных краевых задач теории упругости (соответствующие $N=2{,}3$ можно познакомиться в работах В.З.Партона, П.И.Перлина, Ш.М.Айталиева, М.А.Каюпова, А.Я.Александрова, Б.М. Зиновьева, Т.Ф.Кармановой, Ш.А.Дильдабаева и др.

В пятой главе рассмотрены стационарные краевые задачи для анизотропных упругих сред. Построены обобщения формул Сомильяны, Гаусса и сингулярные граничные интегральные уравнения (СГИУ) для решения краевых задач в анизотропных средах при стационарных колебаниях.

Постановка задач стационарных колебаний. Уравнения движения для анизотропной упругой среды для комплексных амплитуд приводятся к системе уравнений вида

$$L_{ij}(\partial_x,-i\omega)u_j(x)+G_i(x)=0, \tag{37}$$
$$L_{ij}(\partial_x,-i\omega)=C_{ij}^{ml}\partial_m\partial_l+\delta_{ij}\rho\omega^2\,,\quad i,j,m,l=\overline{1,N}\,,$$

Краевая задача I. Найти решение (37), если известны перемещения на S:

$$u_i(x)=u_i^S(x),\qquad x\in S$$

Краевая задача II. Найти решение (37), если известны напряжения на S:

$$\sigma_{ij}(x)n_j(x)=g_i(x),\qquad x\in S\,.$$

Граничные условия записаны для комплексных амплитуд. При постановке стационарных задач начальные условия не задаются. Для выделения единственного решения в случае неограниченной области S^- (внешняя задача) задаются условия типа условий излучения Зоммерфельда. Предполагается, что $u\in C^2(S^-)\bigcup C(S^-\bigcup S)$, $G\in C(S^-\bigcup S)$.

Стационарные аналоги формул Сомильяны.

Теорема 5. Если при данном ω классическое решение первой (второй) краевой задачи $u(x)$ существует и единственно, то $\hat{u}(x)$ представимо в виде свертки

$$\hat{u}_i(x)=-U_i^k*\hat{G}_k+U_i^k*g_k\delta_S(x)-C_{kj}^{ml}U_{i,l}^k*u_jn_m\delta_S(x) \tag{38}$$

и является обобщенным решением (37).

Граничные интегральные уравнения стационарных краевых задач.

Теорема 6. *При фиксированных k и n матрица* $T_i^k(x,n)$ *является фундаментальным решением системы (37), соответствующим сосредоточенным источникам мультипольного типа* $G_i(x) = n_m C_{il}^{km} \delta_{,l}(x)$.

Аналог формулы Гаусса. Если S – произвольная замкнутая поверхность Ляпунова в R^N, *то*

$$V.p.\int_S T_i^k(x,y,n(y))dS(y) = \rho\omega^2 \int_{S^-} U_k^i(x,y)dV(y) + \delta_{ki} H_S^-(x) \tag{39}$$

при $x \in S$ *интеграл сингулярный, берется в смысле главного значения.*

Формула (38) может быть представлена в следующем интегральном виде

$$\begin{gathered}\hat{u}_i(x) = \int_{S^-} U_k^i(y,x)\hat{G}_i(y)dV(y) + \\ + \int_S U_i^k(y,x)g_k(y)dS(y) - \int_S T_i^k(y,x,n(y))u_k(y)dS(y)\end{gathered} \tag{40}$$

Для $x \notin S$ $U_i^k(x)$, $T_i^k(x,n)$ – регулярные функции. Для граничных точек имеют место следующие асимптотики [32]:

$$U_i^k(x) \sim \ln\|x\| A_{ik}^N(e_x), \qquad T_i^k(x,n) \sim \|x\|^{-1} B_{ik}^N(e_x) \qquad \text{при } N=2$$

$$U_i^k(x) \sim \|x\|^{-N+2} A_{ik}^N(e_x), \qquad T_i^k(x,n) \sim \|x\|^{-N+1} B_{ik}^N(e_x) \qquad \text{при } N>2$$

здесь $e_x = x/\|x\|$, $A_{ik}^N(e_x)$, $B_{ik}^N(e_x)$ – непрерывные и ограниченные на сфере $\|e\| = 1$ функции. Поэтому последнее слагаемое в правой части (40) является сингулярным.

Соотношения (40) являются обобщением формулы Сомильяны для эллиптических систем. Они получены для обобщенных функций. Согласно лемме дю Буа – Реймона, в силу регулярности *u* и подынтегральных функций эти равенства справедливы и обычном смысле для $x \notin S$.

На границе полученные соотношения дают сингулярные граничные интегральные уравнения для решения краевых задач. Верна следующая теорема.

Теорема 7. Если u – классическое решение первой (второй) краевой задачи, то оно удовлетворяет СГИУ вида

$$\begin{gathered}H_S^- u_k(x) = \int_{S^-} U_k^i(y,x)G_i(y)dV(y) + \\ + \int_S U_k^i(y,x)g_i(y)dS(y) - V.p.\int_S T_k^i(y,x,n(y))u_i^S(y)dS(y)\end{gathered}$$

Вопросы разрешимости такого типа граничных интегральных уравнений достаточно хорошо исследованы. Численной реализации уравнений для решения стационарных задач для изотропной упругой среды, статических задач для анизотропной упругой среды посвящены работы Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л., Бенерджи П., Баттерфилд Р. и др.

В шестой главе рассматриваются анизотропные пьезоэлектрические среды, характеризующиеся отсутствием центральной симметрии. В пространстве обобщенных функций записаны уравнения движения и их решения для рассматриваемых сред. Построен динамический аналог формулы Сомильяны для решения краевых задач в пьезоупругих средах, позволяющий по известным начальным и граничным значениям перемещений, поверхностных нагрузок, электрического потенциала, плотности потока заряда восстанавливать перемещения, напряжения и напряженность электрического поля в среде.

Уравнения движения пьезоупругих сред. Пьезоэлектрический эффект имеет место в анизотропных средах, не обладающих центром упругой симметрии, в этом случае пьезоэлектрические константы $e_{lij}\neq 0$. Поскольку в пьезоупругих средах упругое и электрическое поля связаны между собой, в общем случае такие среды описываются пьезоэлектрическим тензором, содержащим 45 констант ($C_{ij}^{ml(E)} - 21$, e_{lij} – 18, κ_{il} – 6):

$$C_{ij}^{ml} := \begin{cases} C_{ij}^{ml(E)}, & i,j,m,l=\overline{1,N}, \\ e_{lij}, & i,j,l=\overline{1,N}, \qquad m=M \\ e_{iml}, & j,m,l=N, \qquad i=M \\ -\kappa_{il}, & j,m=N, \qquad i,l=M \end{cases} \tag{41}$$

где $C_{ij}^{ml(E)}$ – матрица упругих констант, измеренных при постоянном электрическом поле, удовлетворяющая условию $W(\nu)=\sum\limits_{i,j,m,l}^{N} C_{ij}^{ml(E)}\nu_m^i\nu_l^j>0\ \forall\nu$, e_{lij} – пьезоэлектрические константы, κ_{il} – диэлектрические проницаемости, измеренные при постоянной деформации, N – размерность пространства ($N=2$ при плоской деформации, $N=3$ соответствует пространственному случаю), $M=N+1$. Константы $C_{ij}^{ml(E)}$, e_{lij}, κ_{il} обладают следующими свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов:

$$C_{ij}^{ml(E)}=C_{ij}^{lm(E)}=C_{ji}^{ml(E)}=C_{ml}^{ij(E)}, \qquad e_{lij}=e_{lji}, \qquad \kappa_{il}=\kappa_{li} \tag{42}$$

В пьезоупругих средах упругие деформации и электрическое поле связаны между собой и описываются линейными уравнениями состояния:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{ml(E)} u_m,_l - e_{lij} E_l, \quad i,j,m,l = \overline{1,N} \tag{43}$$

$$D_j = e_{jml} u_m,_l + \kappa_{jl} E_l, \quad j,m,l = \overline{1,N} \tag{44}$$

где $u = (u_1,...,u_N)$ – перемещения упругой среды, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, D_i – компоненты вектора электрических смещений, E_l – компоненты вектора напряженности электрического поля, $u_i,_j = \partial_j u_i = \partial u_i / \partial x_j$, $x = (x_1,...,x_N) \in R^N$. Здесь и всюду по одноименным индексам в произведении проводится суммирование в указанных выше пределах изменения индексов.

Подставим соотношения (43), (44) в уравнения движения для электроупругой среды:

$$\sigma_{ij},_j + G_i = \rho u_i,_{tt},$$
$$D_j,_j = \rho_e$$

где ρ – плотность среды, G_i – компоненты массовой силы, $u_i,_{tt} = \partial^2 u_i / \partial t^2$, t – время, ρ_e – плотность электрического заряда. Учитывая, что пьезоэлектрики являются диэлектриками, которым свойственно отсутствие свободных электрических зарядов ($\rho_e \equiv 0$), получим следующую систему уравнений динамики для пьезоупругих сред:

$$C_{ij}^{ml(E)} u_m,_{lj} - e_{lij} \varphi,_{lj} = \rho u_i,_{tt} - G_i \tag{45}$$

$$e_{jml} u_m,_{lj} - \kappa_{jl} \varphi,_{lj} = 0, \quad E_m = -\varphi,_m \tag{46}$$

Таким образом, для исследования нестационарных процессов в пьезоупругих средах необходимо рассматривать систему уравнений смешанного типа: уравнения гиперболического типа (45), описывающие анизотропные упругие среды, и уравнение эллиптического типа (46) – уравнение электрического поля.

Обобщенные решения нестационарных краевых задач для пьезоупругих сред. Условия на волновых фронтах. Введем вектор $\upsilon = (\upsilon_1,...\upsilon_{N+1})$, объединяющий упругие перемещения и электрический потенциал:

$$\upsilon_j := \begin{cases} u_j, & j = \overline{1,N} \\ \varphi, & j = N+1 \end{cases}, \tag{47}$$

матрицу напряжений T_{ij}, содержащую тензор напряжений Коши и электрический вектор перемещений, а также матрицу деформаций Z_{ml}, содержащую тензор упругих деформаций $\varepsilon_{ml} = 0{,}5(u_m,_l + u_l,_m)$ и вектор напряженности электрического поля:

$$\mathrm{T}_{ij} := \begin{cases} \sigma_{ij}, & j = \overline{1,N} \\ D_i, & j = M \end{cases}, \qquad \mathrm{Z}_{ml} := \begin{cases} \varepsilon_{ml}, & m = \overline{1,N} \\ -E_l, & m = M \end{cases} \tag{48}$$

векторный поток p_i, объединяющий вектор нагрузки $g_i=\sigma_{ij}n_j$ и плотность потока заряда $q=D_j n_j$, и вектор источников $\widetilde{G}_i$, содержащий массовые силы

$$p_i:=\begin{cases} g_i, & i=\overline{1,N} \\ q, & i=M \end{cases}, \qquad \widetilde{G}_i:=\begin{cases} G_i, & i=\overline{1,N} \\ 0, & i=M \end{cases} \tag{49}$$

Аналог закона Гука (связь между Σ и Z) и соотношение для вектора потока запишем в виде:

$$\mathrm{T}_{ij}=\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{N}C_{ij}^{ml}\mathrm{Z}_{ml}, \quad i=\overline{1,N+1}, \quad j=\overline{1,N} \tag{50}$$

$$p_i=\sum_{j=1}^{N}\mathrm{T}_{ij}n_j \quad i=\overline{1,N+1} \tag{51}$$

Таким образом, с учетом введенных выше обобщений (41), (47) – (49), уравнения движения для пьезоупругой среды можно записать в следующем операторном виде:

$$L_{im}(\partial_x,\partial_t)\upsilon_m(x,t)+\widetilde{G}_i(x,t)=0 \tag{52}$$

$$L_{im}(\partial_x,\partial_t)=C_{ij}^{ml}\partial_j\partial_l-\rho\widetilde{\delta}_{im}\partial_t^2, \quad i,m=\overline{1,N+1}, \quad j,l=\overline{1,N}$$

$$\widetilde{\delta}_{im}:=\begin{cases} \delta_{im}, & i,m=\overline{1,N} \\ 0, & i=m=N+1 \end{cases},$$

где $\partial_x=(\partial_1,...,\partial_N)$, $x\in S^-\subset R^N$, δ_{ij} – символ Кронекера. Поскольку электрическое поле квазистатическое, система (52) гиперболо – эллиптического типа. В силу положительной определенности W характеристическое уравнение системы (52) имеет действительные корни c, в общем случае зависящие от направления распространения волны.

Теорема 8. *Если $\upsilon(x,t)$ удовлетворяет (52) почти всюду за исключением волновых фронтов, на которых выполняются условия на скачки* [35]

$$\left[u_i(x,t)\right]_{F_t}=0, \qquad \left[\sigma_{ij}n_j+\rho c u_i,_t\right]_{F_t}=\left[e_{lij}E_l n_j\right]_{F_t}, \tag{53}$$

$$\left[\varphi(x,t)\right]_{F_t}=0, \qquad \left[D_j\right]_{F_t}=0 \tag{54}$$

то $\hat{\upsilon}(x,t)$ является обобщенным решением (52).

Обозначим:

при $t=0$ $\qquad u_i(x,0)=u_i^0(x), \quad x\in S^-\bigcup S,$

$$u_i,_t(x,0)=u_i^1(x), \quad x\in S^- \tag{55}$$

для $x\in S$, $t\geq 0$

$$u_i(x,t)=u_i^S(x,t), \qquad \sigma_{ij}(x,t)n_j(x)=g_i(x,t), \tag{56}$$

$$D_j n_j=q^S(x,t), \qquad \varphi(x,t)=\varphi^S(x,t)$$

Требуется по известным начальным и граничным значениям перемещений, поверхностных нагрузок, электрического потенциала, плотности потока заряда восстановить перемещения, напряжения и напряженность электрического поля в среде.

Динамический аналог формулы Сомильяны. Введем определенные на всем пространстве R^N обобщенные функции

$$\hat{u}_k(x,t) = u_k(x,t)H_D^-(x,t),\ \hat{\varphi}(x,t) = \varphi(x,t)H_D^-(x,t),\ \hat{G}_k(x,t) = G_k(x)H_D^-(x,t)$$

Доказано, что если классическое решение краевой задачи $\upsilon(x,t)$ существует и единственно, то обобщенное решение $\hat{\upsilon}(x,t)$ представимо в виде свертки:

$$\hat{\upsilon}_i(x,t) = U_i^k * \widetilde{G}_k + U_i^k \underset{x}{*} \upsilon_k^1(x)H_S^-(x) + \left(U_i^k \underset{x}{*} \upsilon_k^0(x)H_S^-(x)\right)_{,t} +$$
$$+ U_i^k * p_k\delta_S(x)H(t) + C_{kj}^{ml}V_i^k{}_{,l} * \upsilon_j{}_{,t}\, n_m\delta_S(x)H(t) + C_{kj}^{ml}V_i^k{}_{,l} \underset{\mathrm{x}}{*} \upsilon_j^1(x)n_m\delta_S(x)$$

Здесь $\delta_S(x)$ – сингулярная обобщенная функция – простой слой на S, соответственно $p_k(x,t)\delta_S(x)H(t)$ – простой слой на D.

Полученные аналоги формулы Сомильяны позволяют по известным скоростям, напряжениям и др. характеристикам на границе сред находить исследуемые функции внутри него.

В седьмой главе рассматривается однородная изотропная двухкомпонентная среда М. Био, состоящая из твердой и жидкой компонент, в случае действия транспортных нагрузок, движущихся с постоянной скоростью. Построен тензор Грина системы уравнений М. Био при действии массовых сил в виде подвижных нагрузок. Также записаны обобщенные решения уравнений движения среды Био при произвольных транспортных массовых силах.

У*равнения движения* среды М.Био в случае отсутствия вязкости жидкости описываются следующей системой гиперболических уравнений второго порядка:

$$(\lambda+\mu)u_j^s{}_{,ji} + \mu u_i^s{}_{,jj} + Qu_j^f{}_{,ji} + G_i^s = \rho_{11}\ddot{u}_i^s + \rho_{12}\ddot{u}_i^f \qquad (57)$$

$$Qu_j^s{}_{,ji} + Ru_j^f{}_{,ji} + G_i^f = \rho_{12}\ddot{u}_i^s + \rho_{22}\ddot{u}_i^f, \quad (x,t) \in R^3 \times [0,\infty)$$

где $u_i^s(x,t)$, $u_i^f(x,t)$ – компоненты векторов перемещений упругого скелета и жидкости в точке $x \in R^3$ в момент времени t, G_i^s, G_i^f – объемные силы, действующие соответственно на твердую и жидкую компоненты среды. Константы среды Био λ, μ, Q, R имеют размерность напряжений, физико–механические константы $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$ имеют размерность плотности и связаны с плотностью масс частиц, слагающих скелет ρ_s и жидкости ρ_f соотношениями: $\rho_{11} = (1-m)\rho_s - \rho_{12}$, $\rho_{22} = m\rho_f - \rho_{12}$, где m – пористость среды. Константа присоединенной плотности ρ_{12} связана с дисперсией отклонения микроскоростей частиц жидкости в порах от средней скорости потока жидкости и зависит от геометрии пор, $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$.

Среда М. Био характеризуется тремя звуковыми скоростями. Две из них c_1, c_2 описывают скорость распространения продольных волн 1-го и 2-го рода, а третья c_3 – поперечную волну ($c_2 < c_3 < c_1$).

Для рассматриваемой среды связь между напряжениями и деформациями имеют вид обобщенного закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \mu(u_i^s,_j + u_i^f,_j) + (\lambda u_k^s,_k + Q u_k^f,_k)\delta_{ij}, \qquad \sigma = -mp = Q u_k^s,_k + R u_k^f,_k$$

где p – давление жидкости в порах, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в упругом скелете.

В дальнейшем для удобства обозначений введем вектор $\overline{u} = \{\overline{u}^s, \overline{u}^f\}$ размерности 6, полагая u_i компонентами перемещения твердой фазы для $i = \overline{1,3}$ и жидкости для $i = \overline{4,6}$. Аналогично введем вектор массовых сил $\overline{G} = \{\overline{G}^s, \overline{G}^f\}$.

Транспортные уравнения М. Био. Для записи уравнений движения однородной изотропной двухкомпонентной среды М. Био при действии транспортных нагрузок рассматривается класс решений системы уравнений (57) в предположении, что массовая сила, действующая в среде, движется с постоянной скоростью «*с*» вдоль оси x_3 и в подвижной системе координат не зависит от времени, т.е. $G_i = G_i(x_1, x_2, x_3 + ct)$. Искомые перемещения u_i обладают такой же структурой: $u_i = u_i(x_1, ..., x_N + ct)$. Обозначим новую подвижную систему координат через $x' = (x_1', x_2', x_3') = (x_1, x_2, x_3 + ct)$. В новой системе координат система уравнений (57) запишется в виде:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial x_k' \partial x_i'} u_i + Q\frac{\partial^2}{\partial x_k' \partial x_i'} u_{i+3} + \mu\frac{\partial^2}{\partial x_k' \partial x_k'} u_i + G_i = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3'^2}(\rho_{11} u_i + \rho_{12} u_{i+3})$$

$$Q\frac{\partial^2}{\partial x_k' \partial x_i'} u_i + R\frac{\partial^2}{\partial x_k' \partial x_i'} u_i + G_{i+3} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3'^2}(\rho_{12} u_i + \rho_{22} u_{i+3}) \qquad (58)$$

Тип этой системы уравнений (58) существенно зависит от скорости транспортной нагрузки. Здесь рассматривается весь диапазон скоростей.

Фундаментальные решения уравнений движения среды М. Био в классе бегущих решений. Для построения фундаментальных решений U_{ik} уравнений динамики двухкомпонентной среды М. Био рассмотрим систему уравнений (58) при действии бегущих нагрузок в виде сосредоточенных импульсных функций: $G_{si}(x') = \delta_{ij}\delta(x')$, $G_{fi}(x') = \delta_{ij}\delta(x')$. В этом случае рассматриваемая система уравнений примет следующий вид

$$(\lambda + \mu)U_{ik},_{kj} + \mu U_{ij},_{kk} + QU_{i(k+N)},_{kj} - c^2\rho_{11}U_{ij},_{NN} - c^2\rho_{12}U_{i(j+N)},_{NN} + \delta_{ij}\delta(x') = 0,$$

$$QU_{ik},_{kj} + RU_{i(k+N)},_{NN} - c^2\rho_{12}U_{ij},_{NN} - c^2\rho_{22}U_{i(j+N)},_{NN} + \delta_{i(j+N)}\delta(x') = 0$$

здесь всюду по одноименным индексам проводится суммирование в указанных выше пределах их изменения от 1 до N, хотя размерность тензора U_{ij} - ($2N \times 2N$). Компоненты тензора имеют следующий физический смысл: при $1 \le j$

$\le N$ это j-ые компоненты перемещений твердой фазы, при $N+1 \le j \le 2N$ - это *(j- N)*-ые компоненты перемещений жидкости от действия сосредоточенной силы вдоль *i*- ой оси координат (при $1 \le i \le N$) на твердую фазу или от действия сосредоточенной силы вдоль (*i-N*) -ой оси координат (при $N+1 \le i \le 2N$) на жидкость.

Обозначим $M_l = c/c_l$ $(l=\overline{1,3})$ - числа Маха, $m_l = \sqrt{1-M_l^2}$. Назовем *c* - скорость подвижных нагрузок *дозвуковой,* если $c < c_2$, т.е $M_l < 1$; *сверхзвуковой,* если $c > c_1$, $M_l > 1$. В случае, когда величина *c* находится между значениями скоростей (58), имеет место *межзвуковая (трансзвуковая)* скорость. Поскольку вид фундаментальных решений зависит значений числа Маха, в пространстве пребразований они запишутся в виде

$$\tilde{U}_{kj} = \frac{a_3^2}{\mu}\left(\frac{b_{k3}\delta_{kj}}{a_3^2(\xi^2 - M_3^2\xi_N^2)} - \frac{\xi_k\xi_j}{c^2\xi_N^2}\sum_{l=1}^{3} b_{kl}\frac{1}{\xi^2 - M_l^2\xi_N^2}\right) \quad \text{при} \quad k=\overline{1,N},\ j=\overline{1,2N},$$

$$\widetilde{U}_{kj} = \widetilde{U}_{kj} \quad \text{при } k=\overline{N+1,2N}, \quad j=\overline{1,N}$$

$$\tilde{U}_{kj} = \frac{\delta_{kj}}{\rho_{22}c^2\xi_N^2} + \frac{a_3^2}{\mu}\left(\frac{d_3\delta_{kj}}{a_3^2(\xi^2 - M_3^2\xi_N^2)} - \frac{\xi_{k-N}\xi_{j-N}}{c^2\xi_N^2}\sum_{l=1}^{3} d_l\frac{1}{\xi^2 - M_l^2\xi_N^2}\right)$$

При $k=\overline{N+1,2N}$, $j=\overline{N+1,2N}$,

где $b_{k1} = \dfrac{a_1^2 - a_f^2}{a_2^2 - a_f^2}$, $\quad b_{k2} = \dfrac{a_2^2 - a_f^2}{a_2^2 - a_f^2}$, $\quad b_{k3} = -1$, $\quad k=\overline{1,3}$,

$$b_{k1} = \zeta_1\frac{a_1^2 - a_f^2}{a_2^2 - a_f^2}, \quad b_{k2} = -\zeta_2\frac{\rho_{11}a_2^2 - a_s^2}{\rho_{22}a_1^2 - a_2^2}, \quad b_{k3} = -\zeta_3, \quad k=\overline{4,6},$$

$$d_1 = \frac{\rho_{11}a_1^2 - a_s^2}{\rho_{22}a_1^2 - a_2^2}, \quad d_2 = -\frac{\rho_{11}a_2^2 - a_s^2}{\rho_{22}a_1^2 - a_2^2}, \quad d_3 = -\zeta_3, \quad k=\overline{4,6}$$

В случае *дозвуковых скоростей* ($M_l < 1$, т.е $c < c_2$) получим тензор фундаментальных решений:

$$U_{kj} = \frac{a_3^2}{\mu}\Big[b_{k3}\delta_{kj}\left(m_3^2 r^2 + x_3^2\right)^{-1/2} / 4\pi a_3^2 -$$

$$-\left(\sum_{l=1}^{3} b_{kl}\left(m_l^2 r^2 + x_3^2\right)^{-1/2}\left(x_3^2 x_k x_j / r^4 - x_3\left(\delta_{k3}x_k + \delta_{j3}x_j\right)/r^2 + \delta_{k3}\delta_{j3w}\right) -\right.$$

$$\left.\left(\left(m_l^2 r^2 + x_3^2\right)^{-1/2} - m_l r\right)\left(\delta_{ij} - x_k x_j / r^2\right)/r^2\Big]\right. / 4\pi c^2, \quad k=\overline{1,3}, \quad j=\overline{1,6}$$

$$U_{jk} = U_{kj},\ k = \overline{4,6},\ j = \overline{1,3}$$

$$U_{kj} = \frac{-\pi\delta_{kj}|x_3|}{\rho_{22}c^2} + \frac{a_3^2}{\mu}\Big\{ d_3\delta_{dkj}\left(m_3^2 r^2 + x_3^2\right)^{-1/2} / 4\pi a_3^2 -$$

$$-\left(\sum_{l=1}^{3} d_l\left(m_l^2 r^2 + x_3^2\right)^{-1/2}\left(x_3^2 x_k x_j / r^4 - x_3\left(\delta_{k3}x_k + \delta_{j3}x_j\right)/r^2 + \delta_{k3}\delta_{j3w}\right) -\right.$$

$$-\left(\left(m_l^2 r^2 + x_3^2\right)^{-1/2} - m_l r\right)\left(\delta_{ij} - x_k x_j / r^2\right)/r^2\Big]\Big\} / 4\pi c^2,\ k = \overline{4,6},\ j = \overline{4,6}$$

При $R \to 0$ фундаментальные решения $U_{jk} \approx const / R$.

В случае *сверхзвуковых скоростей* ($c > c_l$, $M_l > 1$) имеем:

$$U_{kj} = \frac{a_3^2}{\mu}\left[\frac{b_{k3}\delta_{kj}H(x_3 - m_l r)}{2\pi a_3^2\sqrt{x_3 - m_l^2 r^2}} -\right.$$

$$-\left(\sum_{l=1}^{3} b_{kl}H(x_3 - m_l r)\left(x_3^2 - m_l^2 r^2\right)^{-1/2}\left(x_3^2 x_k x_j / r^4 - x_3\left(\delta_{k3}x_k + \delta_{j3}x_j\right)/r^2 + \delta_{k3}\delta_{j3}\right) -\right.$$

$$\left.\left(\left(x_3^2 - m_l^2 r^2\right)^{-1/2} H(x_3 - m_l r)\right)\left(\delta_{kj} - x_k x_j / r^2\right)/r^2\right] / 2\pi c^2,\ k = \overline{1,3},\ j = \overline{1,6}$$

$$U_{jk} = U_{kj},\ k = \overline{4,6},\ j = \overline{1,3}$$

$$U_{kj} = \frac{-\pi\delta_{kj}|x_3|}{\rho_{22}c^2} + \frac{a_3^2}{\mu}\Big\{ d_3\delta_{dkj}\left(x_3^2 - m_3^2 r^2\right)^{-1/2} / 2\pi a_3^2 -$$

$$-\left(\sum_{l=1}^{3} d_l H(x_3 - m_3 r)\left(x_3^2 - m_l^2 r^2\right)^{-1/2}\left(x_3^2 x_k x_j / r^4 - x_3\left(\delta_{k3}x_k + \delta_{j3}x_j\right)/r^2 + \delta_{k3}\delta_{j3}\right) -\right.$$

$$-\left(x_3^2 - m_l^2 r^2\right)^{-1/2} H(x_3 - m_l r)\left(\delta_{ij} - x_k x_j / r^2\right)/r^2\Big]\Big\} / 2\pi c^2,\ k = \overline{4,6},\ j = \overline{4,6}$$

Для *звуковых скоростей* ($c = c_l, M_l = 1$) тензор фундаментальных решений имеет вид:

$$\text{для}\ k = \overline{1,3},\ j = \overline{1,6} \quad U_{kj} = \frac{a_3^2}{2\pi\mu}\left\{\frac{b_{k3}\delta_{kj}\delta(x_3)\ln r^{-1}}{a_3^2} -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{c^2}\sum_{l=1}^{3} b_{kl}\left[H(x_3)\left(x_3\left(2x_k x_j / r^2 - \delta_{kj}\right) - \left(\delta_{k3}x_j + \delta_{j3}x_k\right)/r\right)/r - \delta_{k3}\delta_{j3}\delta(x_3)\ln r\right]\right\}$$

$$U_{jk} = U_{kj},\ k = \overline{4,6},\ j = \overline{1,3}$$

$$\text{для } k=\overline{4,6},\ j=\overline{4,6} \quad U_{kj} = \frac{-\pi a_3^2 x_3}{\rho_{22}c^2} + \frac{a_3^2}{\mu}\left\{\frac{d_3\delta_{kj}\delta(x_3)\ln r^{-1}}{a_3^2} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{c^2}\sum_{l=1}^{3} d_l\left[H(x_3)\left(x_3\left(2x_kx_j/r^2-\delta_{kj}\right)-\left(\delta_{k3}x_j+\delta_{j3}x_k\right)/r\right)/r-\delta_{k3}\delta_{j3}\delta(x_3)\ln r\right]\right\}$$

Ниже представлены результаты расчетов компонент тензора Грина при действии дозвуковой нагрузки в направлении оси x_1 для для среды Био с безразмерными параметрами: $\lambda=\mu=1$, $Q=1$, $R=1$, $\rho_{11}=3$, $\rho_{22}=1$, $\rho_{12}=0{,}2$: перемещения твердой компоненты U_{21}, U_{22}, U_{23} при действии нагрузки в твердой компоненте (рисунок 6) и перемещения жидкой компоненты U_{64}, U_{65}, U_{66} при действии нагрузки в жидкости (рисунок 7).

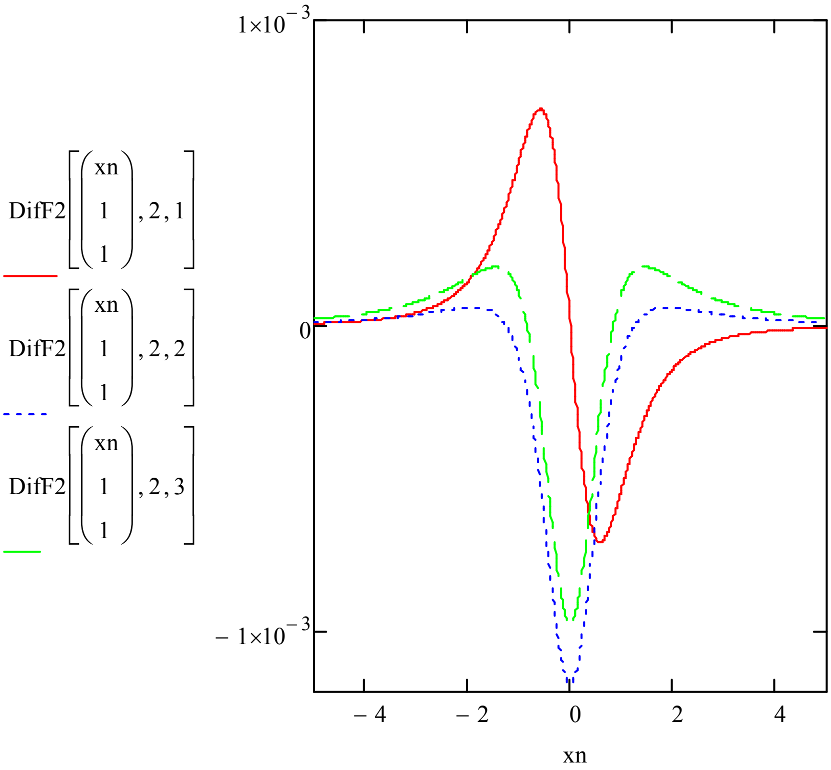


Рисунок 6 - U_{21}, U_{22}, U_{23} при действии нагрузки в твердой компоненте

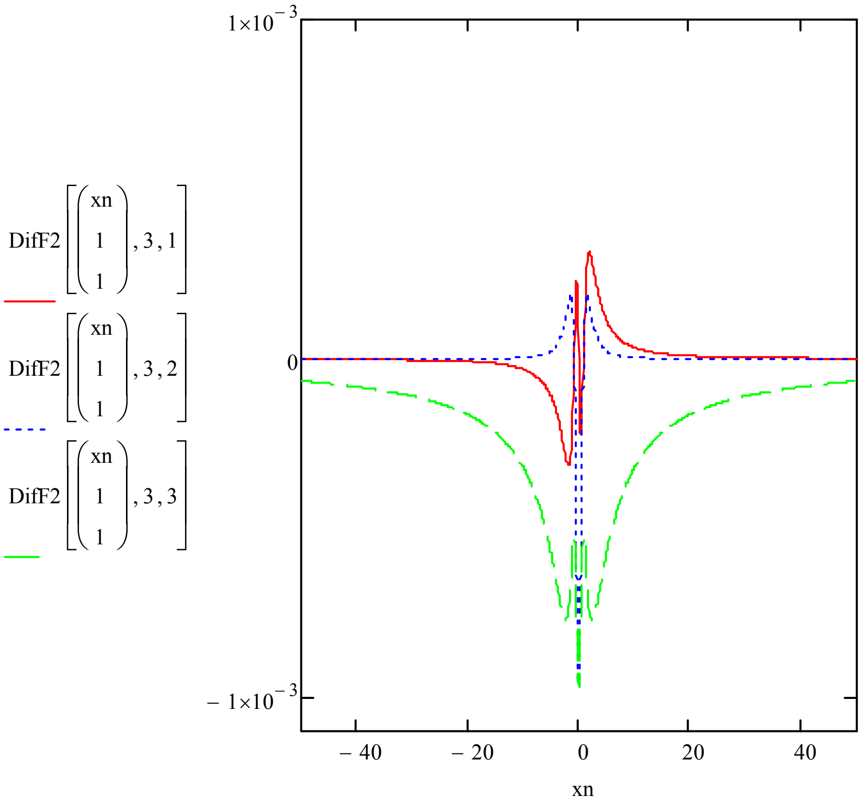


Рисунок 7 - U_{64}, U_{65}, U_{66} при действии нагрузки в жидкости

Для произвольных регулярных массовых сил $G_k(x,t)$ решения транспортных уравнений Био имеют вид интегральной свертки $u_i = \int\limits_{R^3} U_{ik}(x-y)G_k(y)dV(y)$. При сингулярных массовых силах свертку следует брать согласно определению свертки обобщенных функций.

Условия на волновых фронтах в случае транспортной нагрузки, движущейся со сверхзвуковой скоростью, имеют вид [38]:

$$\left[u_i^s(x,t)\right]_{F_t} = \left[u_i^f(x,t)\right]_{F_t} = 0, \tag{59}$$

$$\left[\mu u_i^s,_j n_j + \left((\lambda+\mu)u_j^s,_j + Qu_j^f,_j\right)n_i - c^2\left(\rho_{11}u_i^s,_3 + \rho_{12}u_i^f,_3\right)n_3\right]_{F_t} = 0, \tag{60}$$

$$\left[\left(Qu_j^s,_j + Ru_j^f,_j\right)n_i - c^2\left(\rho_{12}u_i^s,_3 + \rho_{22}u_i^f,_3\right)n_3\right]_{F_t} = 0,\ i=1,2,4. \tag{61}$$

Здесь n_j – компоненты единичной нормали к волновому фронту. При сверхзвуковых скоростях движения таких фронтов будет три. Первые два передних фронта связаны объемными деформациями в упругом скелете и жидкой компоненте, третий фронт – со сдвиговыми деформациями пористого скелета. Условия (59) – это условия сплошности среды, в модели которой предполагается непрерывность перемещений скелета и жидкости. Из двух других условий следует, что на фронтах ударных волн напряжения в твердой и жидкой компонентах среды Био будут иметь скачки. Условия (60) и (61) – это законы сохранения импульса для твердой и жидкой компоненты. Это значительно усложняет построение решений уравнений движения среды Био при сверхзвуковых нагрузках, в отличие от дозвуковых, где решения непрерывны и дифференцируемы.

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе разработаны методы решения уравнений движения и краевых задач динамики деформируемого твердого тела для исследования волновых процессов в деформируемых твердых средах с усложненными свойствами. Это направление относится к актуальным проблемам механики и математической физики и тесно связано с решением разнообразных инженерно-технических задач.

- На основе преобразования Фурье и Лапласа обобщенных функций построены тензора Грина для уравнений движения анизотропных сред (при плоской и пространственной деформации), тензора фундаментальных напряжений, и их первообразные по времени, исследованы их асимптотические свойства.
- На основе численных экспериментов изучено влияние степени анизотропии породного массива на характер его напряженно-деформированного состояния при действии сосредоточенных импульсных источников. Расчеты проведены для сред со слабой и сильной анизотропией упругих свойств. Показано, что в первом случае топологический тип волновых фронтов подобен расширяющимся сферам. Во втором случае появляются сложные волновые фронты и лакуны – подвижные невозмущенные области, ограниченные волновыми фронтами и расширяющиеся с течением времени. Это явление связано с волноводными свойствами сильно анизотропной среды, которые резко выражены в направлениях с преобладающей жесткостью и ослаблены в тех, где жесткость мала.
- Разработана математическая модель динамики породного массива при действии источника возмущений вблизи его дневной поверхности с учетом его анизотропии в случае плоской деформации. Построены трансформанты тензора Грина первой и второй краевой задачи динамики для анизотропной полуплоскости.
- Разработан метод обобщенных функций для решения краевых задач динамики анизотропных упругих и пьезоупругих сред при нестационарных воздействиях, а также в случае стационарных колебаний анизотропных упругих тел. Построены обобщенные решения уравнений движения таких сред в пространстве обобщенных функций, аналоги формул Сомильяны, Гаусса в пространстве обобщенных функций.
- Построены сингулярные граничные интегральные уравнения для решения поставленных начально-краевых задач динамики анизотропных сред.

- На основе теории обобщенных функций получены законы сохранения энергии, условия сохранения импульса на фронтах, которые связывают скачок скоростей на фронте волны со скачком напряжений.
- Построены фундаментальные и обобщенные решения уравнений движения двухкомпонентной среды Био, позволяющей учесть водонасыщенность грунтового массива при транспортных нагрузках во всем диапазоне скоростей от дозвуковых до сверхзвуковых. Для сверхзвуковых нагрузок получены условия на фронтах волн.

Список основных публикций по теме диссертации

1. **Zakir'yanova, G.K.** Dynamic analogues of Green and Gauss's formulas for unsteady dynamics of anisotropic elastic medium at antiplane deformation [Текст] / Zakir'yanova G.K. // AIP Conference Proceedings. – 2016. – V.1759. 020150; http://dx.doi.org/10.1063/1.4959616

2. **Закирьянова, Г.К.** Динамические аналоги формул Грина, Гаусса начально-краевых задач для гиперболических уравнений [Текст] / Г.К.Закирьянова // Математический журнал. – 2010. - Т.10. - № 3(37). - С.45-50.
3. **Закирьянова, Г.К.** Обобщенные решения нестационарных краевых задач для гиперболического уравнения [Текст] / Г.К.Закирьянова // Вестник НИИ развития путей сообщения. – 2009. - №3 (28). - С. 44–50
4. **Закирьянова, Г.К.** Фундаментальные решения гиперболических уравнений [Текст] /Г.К.Закирьянова // Межд. научная конф. "Суверенный Казахстан: 15-летний путь развития космической деятельности". Сб.докл./ Алматы, Казахстан. -2006. - С.53-56
5. **Закирьянова, Г.К.** О единственности решений краевых задач динамики анизотропных упругих сред при антиплоской деформации с учетом ударных волн [Текст] / Т.Б. Дуйшеналиев, Г.К.Закирьянова // IV межд. научн. конф. «Актуальные проблемы механики и машиностроения». Алматы. - 2014. - С.268-275.
6. **Zakir'yanova, G.K.** The Green Matrix for Strictly Hyperbolic Systems with Second-Order Derivatives [Текст] / Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K. //Differential Equations. -2001 - Vol.37. - No.4. - P.517-523.
7. **Закирьянова, Г.К.** Ударные волны в анизотропной среде при действии импульсных сосредоточенных источников [Текст] / Г.К.Закирьянова //Высокие технологии,образование, промышленность. Том 3. Сб. статей 11 межд. научно-практ. конф. "Фундаментальные и прикладные исследования, разработка и применение высоких технологий в промышленности". Санкт-Петербург, Россия. - 2011. - С. 143-150.
8. **Закирьянова, Г.К.** Динамика анизотропных сред при взрывных воздействиях [Текст] / Г.К.Закирьянова // Материаловедение. – 2013. – №2. – С. 149-152.

9. **Закирьянова, Г.К.** Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики ортотропных сред[Текст] / Г.К.Закирьянова // Известия КГТУ им. И.Раззакова. – 2014. --№32. - С.112-116.
10. **Закирьянова, Г.К.** Динамика анизотропных сред при действии импульсных сосредоточенных источников [Текст] / Г.К.Закирьянова // Материалы IV межд. научн. конф. «Актуальные проблемы механики и машиностроения». Алматы. – 2014. - С.291-298.
11. **Закирьянова, Г.К.** Матрица Грина для строго гиперболических систем с производными второго порядка [Текст] /Л.А. Алексеева, Г.К.Закирьянова //Дифференциальные уравнения. – 2001. - т.37. - №4. - С.488-494.
12. **Закирьянова, Г.К.** Волновая динамика ортотропных среде при действии импульсных источников [Текст] / Г.К.Закирьянова // Сборник материалов Респ. науч-метод. конф. «Актуальные вопросы механики и математики». Астана. – 2016. - С. 38-43.
13. **Закирьянова, Г.К.** Фундаментальные решения первой и второй краевых задач динамики для упругой анизотропной полуплоскости. [Текст] / Ш.А.Дильдабаев, Г.К.Закирьянова // Изв. НАН РК, сер. Физ-мат. – 1993. - №5. - С.65 -70.
14. **Закирьянова, Г.К.** Импульсные источники в анизотропной среде [Текст] / Г.К.Закирьянова // Труды межд.научн конф. "Теория функций, информатика, дифференц. уравнения и их приложения". Алматы. Казахстан. - 2015.- С.127-130.
15. **Zakir'yanova, G.K** Generalized Solutions of Initial–Boundary Value Problems for Second_Order Hyperbolic Systems [Текст] /Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2011. - Vol. 51. -No. 7. - P. 1194–1207.
16. **Закирьянова, Г.К.** Волны от сосредоточенных источников в анизотропной среде [Текст] /Г.К.Закирьянова // Материалы межд. научно–практ. конф. Проблемы геомеханики и преподавания естеств. дисц. Алматы.– 2012. - С. 155-159.
17. **Закирьянова, Г.К.** Регулярное представление формул Кирхгофа и Сомильяны для нестационарной динамики анизотропных сред на волновых фронтах [Текст] / Ш.М.Айталиев, Л.А. Алексеева, Ш.А.Дильдабаев, Г.К.Закирьянова // Вестник АН КазССР. – 1991. -№ 3. - С.58-62.
18. **Закирьянова, Г.К.** Нестационарные уравнения движения анизотропных сред в пространстве обобщенных функций. Формулы Кирхгофа и Сомильяны [Текст] /Л.А. Алексеева, Г.К.Закирьянова // Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1991. -№ 1. - С. 70-74.
19. **Закирьянова, Г.К.** Метод граничных интегральных уравнений в динамике сред с усложнен-ными свойствами [Текст] /Л.А. Алексеева, В.В. Шершнев, Г.К.Закирьянова // Матер. научной сессии ОФМН, посв. пробл. развития механики и машиностроения в Казахстане. – 1993. - С. 9-18.

20. **Закирьянова, Г.К.** Регулярное представление формул Кирхгофа и Сомильяны для нестационарной динамики анизотропных сред на контуре. [Текст] / Г.К.Закирьянова //Вестник АН КазССР. – 1992.- № 3.- С.79-84.
21. **Закирьянова, Г.К.** Граничные интегральные уравнения основных краевых нестационарных задач анизотропной среды. [Текст] / Г.К.Закирьянова // Известия АН КазССР, 1993, №5 деп № 1146 -В93 от 2.04.93
22. **Zakir'yanova, G.K.** Boundary Integral Equations Method in two-and three-dimensional probl. of elastodynamics [Текст]/ Alexeyeva L.A., Dildabayev Sh.A., Zhanbyrbaev A.B., Zakir'yanova G.K. // Extended Abstr. The Third World Congress on Computational Mechanics. Chiba, Japan. August 1-5. - 1994.- V.I.- P.848-849.
23. **Zakir'yanova, G.K.** Boundary Integral Equations Method in two-and three-dimensional problems of elastodynamics. [Текст] / Alexeyeva L.A., Dildabayev Sh.A., Zhanbyrbaev A.B., Zakir'yanova G.K. // Computational mechanics.- 1996. - Vol.18.- No 2. - P.147-157.
24. **Zakir'yanova, G.K.** Dynamic analogues of Somigliana's formula for unsteady dynamics of elastic media with an arbitrary degree of anisotropy. [Текст] / Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K. //J. Appl. Maths Mechs. – 1994. - Vol.58. - No2. - P. 367- 372.
25. **Zakir'yanova, G.K.** Discontinuous solutions of boundary value problems for hyperbolic systems [Текст] / Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K. // Труды межд. .конф. Современное состояние и перспективы развития математики в рамках прогр. "Казахстан в третьем тысячелетии". Алматы. – 2001.- С. 140-143.
26. **Zakir'yanova, G.K.** Generalized Solutions of Boundary Value Problems of Dynamics of Anisotropic Elastic Media [Текст] /Alexeyeva L.A., Zakir'yanova G.K. // Journal of the Mechanical Behavior of Materials. 2005 - Vol. 16. - Nos.4-5. - P. 259-267.
27. **Zakir'yanova, G.K.** Generalized Solutions of Boundary Value Problems for Second Order Hyperbolic Systems [Текст] / Zakir'yanova G.K. // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications –II, Yokohama Publishers. – 2006. - P. 409-416.
28. **Закирьянова, Г.К.** Динамические аналоги формулы Сомильяны для нестационарной динамики упругих сред с произвольной степенью анизотропии [Текст] / Л.А. Алексеева, Г.К.Закирьянова //ПММ. -1994. - т.58.- №2. - С.170-175.
29. **Закирьянова, Г.К.** Обобщенные решения начально-краевых задач для гиперболических систем второго порядка [Текст] /Л.А. Алексеева, Г.К.Закирьянова // ЖВММФ. – 2011. – т. 51. - № 7. - С. 1280–1293.
30. **Zakir'yanova G.K.** Generalized Solutions of Boundary Value Problems for Second Order Hyperbolic Systems [Текст] / Zakir'yanova G.K. // X Int. Conf. on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications (Sept.2004 Osaka, Japan). Abstracts. 42-43pp.

31. **Закирьянова, Г.К.** Метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах для эллиптических систем второго порядка [Текст] / Г.К.Закирьянова // Труды межд.конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения». Алматы. - 2002. - С.112-115
32. **Закирьянова, Г.К.** Обобщенные решения краевых задач стационарных колебаний анизотропной упругой среды [Текст] / Г.К.Закирьянова // Изв.НАН РК. Сер физ-мат. – 2010. - № 3. - С.103–106.
33. **Закирьянова, Г.К.** Метод граничных интегральных уравнений для решения стационарных краевых задач [Текст] / Г.К.Закирьянова // Труды Межд. науч-практ. конф. "Механика и строительство транспортных сооружений". Алматы. – 2010. - С.68–72.
34. **Закирьянова, Г.К.** Метод граничных интегральных уравнений в стационарных задачах для анизотропной упругой среды [Текст] / Дуйшеналиев Т.Б., Г.К.Закирьянова // Материаловедение. –2013. –№2. – С. 146-149.
35. **Закирьянова, Г.К.** Динамический аналог формулы Сомильяны для решения нестационарных краевых задач в пьезоупругих средах [Текст] / Г.К.Закирьянова // ЖПЭОС. – 2010. -Вып.12. - Т.1. - С.54–60.
36. **Закирьянова, Г.К.** Обобщенные решения начально–краевых задач для пьезоупругих сред [Текст] / Г.К.Закирьянова // Труды межд. науч-практ. конф. «Математическое и компьютерное моделирование экологических процессов и актуальные проблемы современного образования», т.1. Тараз – 2010. - С. 37–42.
37. **Закирьянова, Г.К.** Фундаментальные решения уравнений движения среды М.Био при транспортных нагрузках, движущихся с дозвуковой скоростью [Текст] / Г.К.Закирьянова // Труды межд. науч. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды. Бишкек. –2012. – С.272-277.
38. **Закирьянова, Г.К.** Фундаментальные и обобщенные решения уравнений движения двухкомпонентной среды при транспортных нагрузках [Текст] / Г.К.Закирьянова // Труды межд. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и математическая физика». Алматы. – 2014. – С.273–277.
39. **Zakir'yanova G.K.** Generalized and fundamental solutions of M. Biot equations for moving loads [Текст] / Zakir'yanova G.K. // ISAAC 9-th Congress: abstracts. – Krakow, 2013. – pp. 227–228

РЕЗЮМЕ

диссертации Закирьяновой Гульмиры Кожахметовны на тему: «Фундаментальные и обобщенные решения краевых задач динамики сред с усложненными свойствами» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04-Механика деформируемого твердого тела

Ключевые слова: волновая динамика, упругость, пьезоупругость, среда Био, краевая задача, напряженно-деформированное состояние, транспортная нагрузка, стационарные колебания, метод обобщенных функций.

Объектом исследований являются упругие анизотропные и пьезоупругие среды, а также двухкомпонентная среда М.Био.

Методы исследований включают аналитические и численные методы решения дифференциальных уравнений с использованием моделей механики сплошных сред: метод интегральных преобразований, метод граничных интегральных уравнений, метод обобщенных функций и др. Программирование и реализация решений на языке Fortran, в системе MaтhCad-14.методы механики сплошных сред, обобщенных функций, вычислительной математики.

Цель работы заключается в разработке методов решения уравнений движения и краевых задач динамики деформируемого твердого тела и исследование процессов распространения волн в средах с усложненными свойствами.

Научная новизна работы состоит в разработке на основе теории обобщенных функций метода построения фундаментальных решений уравнений движения упругих анизотропных сред, разработке метода обобщенных функций для решения краевых задач динамики анизотропных тел при нестационарных воздействиях и в случае стационарных колебаний, построении обобщенных решений уравнений движения анизотропных сред в пространстве обобщенных функций, аналогов формул Сомильяны, Гаусса в пространстве обобщенных функций, построении сингулярных граничных интегральных уравнений для решения поставленных краевых задач динамики анизотропных сред. Получены закон сохранения энергии, условие сохранения импульса на фронтах, которое связывает скачок скоростей на фронте волны со скачком напряжений. В диссертационной работе также разработан метод обобщенных функций для решения нестационарных краевых задач динамики пьезоупругих сред. Получены динамические аналоги формул Сомильяны, которые позволяют по известным скоростям, напряжениям и другим граничным значениям искомых функций находить искомые функции внутри него. Построены фундаментальные и обобщенные решения уравнений движения двухкомпонентной среды Био при транспортных нагрузках во всем диапазоне скоростей и изучены их свойства. Для сверхзвуковых нагрузок получены условия на волновых фронтах

Область применения. Разработанный метод позволяет исследовать физические процессы, сопровождающиеся ударными волнами, и решать широкий класс задач динамики сплошных сред, описываемых уравнениями гиперболических, эллиптических и смешанных типов.

01.02.04-Деформацияланган катуу телолордун механикасы адистиги боюнча физика-математика илимдеринин доктору илимий даражасын изденүү үчүн жазылган **Закирьянова Гульмира Кожахметовнанын «Татаалдашкан касиеттерге ээ болгон чөйрөнүн динамикасынын четтик маселелеринин фундаменталдык жалпыланган чыгарылыштары»** темадагы диссертациясынын

КОРУТУНДУСУ

Негизги сөздөр: толкундук динамика, серпилгич, пьезосерпилгич, Био чөйрөсү, четтик маселе, шыкалган-деформацияланган абал, транспорттук жүктөм, стационардык термелүүлөр, жалпыланган функциялар ыкмасы.

Изилдөөлөрдүн объектиси: серпилгич анизотроптук жана пьезосерпилгич чөйрөлөр, ошондой эле изотроптук Био чөйрө.

Изилдөөнүн ыкмалары туташ чөйрөлөрдүн механикасынын моделдерин колдонуу менен дифференциалдык теңдемелерди чыгаруунун аналитикалык жана сандык ыкмаларын камтыйт: интегралдык өзгөртүп туюнтуу ыкмасы, чек аралык интегралдык теңдемелер ыкмасы, жалпыланган функциялар ыкмасы ж.б. Fortran тилиндеги, MathCad системасындагы чыгарылыштарды программалоо жана ишке ашыруу.

Изилдөөнүн максаты – деформацияланган катуу телонун динамикасынын четтик маселелерин жана кыймылынын теңдемесинин чыгарылыш ыкмаларын иштеп чыгуу жана татаалдашкан касиеттерге ээ болгон чөйрөлөрдөгү толкундардын таралуу процесстерин изилдөө.

Иштин илимий жаңылыгы: жалпыланган функциялар теориясынын негизинде серпилгич анизотроптук чөйрөлөрдүн кыймылынын теңдемелеринин фундаменталдык чыгарылыштарын түзүүнүн ыкмасы, стационардык эмес таасирлер астындагы жана стационардык термелүүлөр учурундагы анизотроптук телолордун динамикасынын четтик маселелерин чыгаруу үчүн жалпыланган функциялар ыкмасы иштелип чыккан, сингулярдык чек аралык интегралдык теңдемелери, жалпыланган функциялар мейкиндигиндеги Сомильяндын, Гausстун формулаларынын аналогдору түзүлгөн. Энергиянын сак-талуу закону, толкун фронтундагы ылдамдыктын кескин өзгөрүүсүн чыңалуу-нун кескин өзгөрүүсү менен байланыштырган фронттордогу импульсту сактоо-нун шарттары алынган. Ошондой эле диссертациялык иште пьезосерпилгич чөйрөлөрдүн динамикасынын стационардык эмес четтик маселелерин чыгаруу үчүн жалпыланган функциялар ыкмасы иштелип чыккан. Изделип жаткан функциянын белгилүү ылдамдыктары, чыңалуулары жана башка чек аралык маанилери боюнча изделип жаткан эле функциянын ичинен табууга мүмкүн болгон Сомильяндын формулаларынын динамикалык аналогдору алынган. Транспорттук нагрузкалардагы Бионун эки компоненттүү чөйрөсүнүн кыймылынын теңдемелеринин жалпыланган чыгарылыштары түзүлгөн жана алардын касиеттери изилденген.

Колдонуу тармактары. Сунушталган ыкма **с**окмо толкундар менен коштолгон физикалык процесстерди изилдөөгө жана гиперболалуулук, эллиптикалык жана аралаш типтеги теңдемелер менен берилген туташ чөйрөлөрдүн динамикасынын маселелеринин кеңири классын чечүүгө мүмкүнчүлүк берет.

SUMMARY

Of dissertation of Gulmira Kozhakhmetovna Zakiryanova on the topic: "The fundamental and generalized solutions of boundary value problems of the dynamics of media with complicated properties" for the degree of doctor of physical and mathematical sciences on a specialty 01.02.04. - Mechanics of deformable solids

Keywords: wave dynamics, elasticity, piezoelasticity, medium of Bio, boundary value problem, stress-strain state, moving load, stationary oscillations, method of generalized functions.

The **object of research** are elastic isotropic and anisotropic medium, piezoelastic medium and twocomponent medium of Bio.

Research methods include the methods of continuum mechanics, generalized functions, Computational Mathematics.

The purpose of work are development the methods for solving the motion equations and boundary value problems of the dynamics of deformable solids and investigation the waves propagation in media with complicated properties.

The scientific novelty of this work are development on the basis of the theory of generalized functions method of construction the fundamental solutions of the motion equations of the elastic anisotropic media, development of a method of generalized functions for solving boundary value problems of the dynamics of anisotropic bodies for nonstationary force, and in the case of stationary oscillations, the construction of generalized solutions of the motion equations of anisotropic media in space generalized functions, analogues of Somigliana and Gauss's formulas in the space of generalized functions, the construction of singular boundary integral equations for solving the boundary value problems of the dynamics of anisotropic media. The energy conservation law is obtained, the condition of conservation of momentum at the front, which connects the velocity jump at the wave front with a stress jump. Also the generalized functions method for the solution of non-stationary boundary value problems of the dynamics piezoelastic medium is developed. The dynamical analogues of Somigliana's formula are obtained. They allow by known velocities, stress and other boundary values to find the required functions within it. The fundamental and generalized solutions of the motion equations for two-component medium of Bio under with moving loads are constructed and their properties are studied. Conditions on the wave fronts are obtained.

Application area. The developed method allows investigating the physical processes that are accompanied by shock waves, and solve a wide class of problems of the dynamics of continuous media described by equations of hyperbolic, elliptic and mixed types.